... 5.2 είδαμε ότι το μήκος $l(\boldsymbol{\sigma})$ μιας καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t)), a \leq t \leq b$, δίνεται από τον τύπο

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = \int ds = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt}\right) dt$$

και όμοια για τα dy και dz. Χρησιμοποιήστε τον νόμο των μορφών για τις βασικές μορφές 1. du και dv. Τότε το dS γράφεται σαν γινόμενο μιας συνάρτησης επί την βασική μορφή 2. $dudv$, την οποία ολοκληρώνουμε πάνω στο D.)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. Έστω $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + (-x + 3y + 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Υπολογίστε το $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, όπου S είναι ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq 1$ (χωρίς την οροφή και τη βάση). Ποιό είναι το αποτέλεσμα αν συμπεριληφθούν η οροφή και η βάση;

2. Έστω Ω ένα χωρίο στον $\mathbf{R}^3$ με σύνορο $\partial\Omega$. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\int_{\partial\Omega} [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot d\mathbf{S} = \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) dV - \int_\Omega \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}) dV.$$

3. Έστω $\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} + z^8\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ πάνω στην επιφάνεια του μοναδιαίου κύβου.

4. Επαληθεύστε το θεώρημα του Green για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β' είδους)

$$\int_C x^2 y dx + y dy$$

όπου C είναι το σύνορο του χωρίου ανάμεσα στις καμπύλες $y = x$ και $y = x^3, 0 \leq x \leq 1$.

5. (a) Δείξτε ότι το $\mathbf{F} = (x^3 - 2xy^3)\mathbf{i} - 3x^2y^2\mathbf{j}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κλίσεων.

(b) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\mathbf{F}$ κατά μήκος της καμπύλης $x = \cos^3\theta, y = \sin^3\theta, 0 \le \theta \le \pi/2$.

6. Μπορείτε να αποδείξετε το Θεώρημα του Green στο επίπεδο, θεωρώντας γνωστό το Θεώρημα του Gauss;

7. (a) Δείξτε ότι το $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\mathbf{j} - 3x^2y(\sin z)\mathbf{k}$ είναι συντηρητικό (δείτε την Παράγραφο 8.3).
   (b) Βρείτε μία f με την ιδιότητα $\mathbf{F} = \nabla f$.
   (c) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ κατά μήκος της καμπύλης $x = \cos^3\theta, y = \sin^3\theta, z = 0, 0 \le \theta \le \pi/2$.

8. Έστω $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z), r = ||\mathbf{r}||$. Δείξτε ότι $\nabla^2(\log r) = 1/r^2$ και $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.

9. Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα ενός ρευστού περιγράφεται από το $\mathbf{F} = 6xz\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Υπολογίστε το ρυθμό με τον οποίο το ρευστό εκρέει από τον μοναδιαίο κύβο.

10. Έστω $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (x^2y - 2xy)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$. Υπάρχει $\mathbf{G}$ με την ιδιότητα $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$;

11. Έστω $\mathbf{a}$ σταθερό διάνυσμα και $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ [ως συνήθως, $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$]. Είναι το $\mathbf{F}$ συντηρητικό; Αν ναι, βρείτε ένα δυναμικό γι' αυτό το πεδίο.

*12. Θεωρούμε την περίπτωση ενός ασυμπίεστου ρευστού με πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{F}$ και πυκνότητα ρ.
   (a) Αν η ρ είναι σταθερή για κάθε συγκεκριμένο t, δείξτε ότι η ρ είναι σταθερή και ως προς t.
   (b) Αν η ρ είναι σταθερή ως προς t, τότε δείξτε ότι $\mathbf{F} \cdot \nabla\rho = 0$.

13. (a) Έστω $f(x, y, z) = 3xye^{z^2}$. Υπολογίστε την ∇f.
   (b) Έστω $\boldsymbol{\sigma}(t) = (3\cos^3 t, \sin^2 t, e^t), 0 \le t \le \pi$. Υπολογίστε το

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$

   (c) Επαληθεύστε απ' ευθείας το Θεώρημα του Stokes για διανυσματικά πεδία κλίσεων $\mathbf{F} = \nabla f$.

14. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, υπολογίστε το $\int_C x^3 dy - y^3 dx$, όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος ($x^2 + y^2 = 1$).

15. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ και S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

16. (a) Διατυπώστε το Θεώρημα του Stokes για επιφάνειες στον $\mathbf{R}^3$.
   (b) Έστω $\mathbf{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$, που ικανοποιεί την $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Stokes, δείξτε ότι $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ αν C είναι μια κλειστή καμπύλη.

17. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Green για να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που έχει για σύνορο την (κλειστή) καμπύλη $x = a\sin\theta\cos\theta, y = a\sin^2\theta$, για $a > 0$ και $0 \le \theta \le \pi$.

18. Υπολογίστε το $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ όπου C είναι η καμπύλη της τομής του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ με την επιφάνεια $z = y^2$.

19. Υπολογίστε το $\int_C (x+y)dx + (2x-z)dy + (y+z)dz$, όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου που συνδέει τα (2, 0, 0), (0, 3, 0) και (0, 0, 6) μ' αυτήν τη διάταξη.

20. Ποιά από τα παρακάτω πεδία είναι συντηρητικά στον $\mathbf{R}^3$; Γι' αυτά που είναι, βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$.
   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+z)\mathbf{i} - (y+z)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$
   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$

21. Θεωρούμε τα ακόλουθα δύο διανυσματικά πεδία στον $\mathbf{R}^3$:
   (i) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
   (ii) $\mathbf{G}(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
   (a) Ποιά από αυτά τα πεδία (ή και κανένα) είναι συντηρητικά στον $\mathbf{R}^3$; (Δηλαδή, ποιά είναι τα πεδία κλίσεων;) Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
   (b) Βρείτε δυναμικά για τα πεδία που είναι συντηρητικά.
   (c) Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ η καμπύλη που πηγαίνει από το (0, 0, 0) στο (1, 1, 1) ακολουθώντας τις ακμές του κύβου $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ από το (0, 0, 0) στο (0, 0, 1) στο (0, 1, 1) στο (1, 1, 1). Έστω $\boldsymbol{\beta}$ η καμπύλη από το (0, 0, 0) στο (1, 1, 1) που ακολουθεί τη διαγώνιο του κύβου. Βρείτε τις τιμές των ολοκληρωμάτων

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}, \quad \int_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \int_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$$

22. Θεωρούμε το σταθερό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ στον $\mathbf{R}^3$.

(a) Βρείτε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x, y, z)$ στον $\mathbf{R}^3$, τέτοιο ώστε $\nabla\phi = \mathbf{F}$ στον $\mathbf{R}^3$ και $\phi(0, 0, 0) = 0$.

(b) Στη σφαίρα Σ ακτίνας 2 με κέντρο την αρχή των αξόνων, βρείτε όλα τα σημεία στα οποία

(i) η ϕ μεγιστοποιείται

(ii) η ϕ ελαχιστοποιείται

(c) Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της ϕ πάνω στην Σ.

23. Υποθέτουμε ότι $\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$. Δείξτε ότι για μία αρκετά μικρή σφαίρα S με κέντρο το (x_0, y_0, z_0) η ροή του $\mathbf{F}$ προς τα έξω, διαμέσου της S, είναι θετική.