ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε το $\int_C y dx - x dy$, όπου C είναι το σύνορο του τετραγώνου $[-1,1] \times [-1,1]$ προσανατολισμένο κατά την φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green).

2. Βρείτε το εμβαδόν του δίσκου D ακτίνας R χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green.

3. Επαληθεύστε το θεώρημα του Green για τον δίσκο D με κέντρο το (0, 0) και ακτίνα R και τις συναρτήσεις:
   (a) $P(x,y) = xy^2, Q(x,y) = -yx^2$
   (b) $P(x,y) = x + y, Q(x,y) = y$
   (c) $P(x,y) = xy = Q(x,y)$
   (d) $P(x,y) = 2y, Q(x,y) = x$

4. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης, δείξτε ότι $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0$, όπου $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ και D είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Κάντε απ' ευθείας επαλήθευση.

5. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα σε ένα τόξο του κυκλοειδούς $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta), a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, και τον άξονα x (χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green).

6. Με τις υποθέσεις του θεωρήματος του Green, αποδείξτε ότι

(a) $$\int_{\partial D} PQdx + PQdy = \int_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

(b) $$\int_{\partial D} \left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx + \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = 2\int_D \left(P\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right) dxdy$$

7. Υπολογίστε το $\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος, και επαληθεύστε το θεώρημα του Green σ' αυτή την περίπτωση.

8. Αποδείξτε την ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος του Green: Έστω D ένα χωρίο στο επίπεδο xy με σύνορο ένα πεπερασμένο πλήθος από προσανατολισμένες απλές κλειστές καμπύλες. Υποθέτουμε ότι με ένα πεπερασμένο πλήθος από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στους άξονες συντεταγμένων, το D διασπάται σε ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων D_i τύπου 3, με το σύνορο του κάθε D_i προσανατολισμένο αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού (δείτε Σχήμα 8.1.5). Τότε, αν οι P και Q είναι της κλάσεως C^1 στο D, έχουμε ότι

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

όπου ∂D είναι το προσανατολισμένο σύνορο του D. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Εφαρμόστε το θεώρημα του Green σε κάθε D_i.)

9. Επαληθεύστε το θεώρημα του Green για την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση της Άσκησης 7 ($P = 2x^3 - y^3, Q = x^3 + y^3$) και τον δακτύλιο D που περιγράφεται από τις ανισότητες $a \le x^2 + y^2 \le b$, με τα σύνορα προσανατολισμένα όπως στο Σχήμα 8.1.5.

10. Έστω D ένα χωρίο για το οποίο ισχύει το θεώρημα του Green. Υποθέτουμε ότι η f είναι αρμονική, δηλαδή,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

στο D. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

11. (a) Επαληθεύστε το θεώρημα της απόκλισης για $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ και D τον μοναδιαίο δίσκο $x^2 + y^2 \le 1$.

(b) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του $2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ πάνω στην έλλειψη $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

12. Έστω $P(x,y) = -y/(x^2+y^2), Q(x,y) = x/(x^2+y^2)$. Υποθέτοντας ότι D είναι ο μοναδιαίος δίσκος, διερευνήστε γιατί το θεώρημα του Green αποτυγχάνει γι' αυτές τις P και Q.

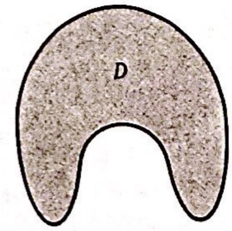
13. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, υπολογίστε το $\int_{C^+} (y^2+x^3)dx + x^4 dy$, όπου C^+ είναι η περίμετρος του $[0,1] \times [0,1]$ με τη φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

14. Αποδείξτε το Θεώρημα 3.

15. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2, υπολογίστε το εμβαδόν στο εσωτερικό της έλλειψης $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

16. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2, αποδείξτε ξανά τον τύπο $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$ για ένα χωρίο σε πολικές συντεταγμένες.

17. Περιγράψτε την απόδειξη του θεωρήματος του Green για το χωρίο που βλέπετε στο Σχήμα 8.1.10.



Σχήμα 8.1.10 Αποδείξτε το θεώρημα του Green γι' αυτό το χωρίο.

18. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} ds = \int_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) dA.$$

19. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, βρείτε το εμβαδόν ενός φύλλου του τετράφυλλου λουλουδιού $r = 3\sin 2\theta$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: $xdy - ydx = r^2 d\theta$.)

20. Δείξτε ότι αν C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που φράσσει ένα χωρίο στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα του Green, τότε το εμβαδόν του χωρίου D που φράσσεται από την C είναι ίσο με

$$A = \int_{\partial D} xdy - \int_{\partial D} ydx.$$

Δείξτε ότι από το γεγονός αυτό έπεται το Θεώρημα 2.

Οι Ασκήσεις 21 ώς 29 περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα του Green στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Αφορούν, πιο συγκεκριμένα, τις λύσεις της εξίσωσης του Laplace, δηλαδή, τις αρμονικές συναρτήσεις. (Δείτε την Παράγραφο 8.5 για περισσότερα αποτελέσματα.) Γι' αυτές τις ασκήσεις, υποθέτουμε ότι το D είναι ένα ανοικτό χωρίο στον $\mathbf{R}^2$ με σύνορο το ∂D. Έστω $u : D \cup \partial D \to \mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση της κλάσεως C^2 στο D. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{p} \in D$ και ότι οι κλειστοί δίσκοι $B_\rho = B_\rho(\mathbf{p})$ με ακτίνα ρ και κέντρο το $\mathbf{p}$, περιέχονται στο D όταν $0 \leq \rho \leq R$. Ορίζουμε το $I(\rho)$ σαν το

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u ds.$$

***21.** Δείξτε ότι $\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(\mathbf{p})$.

***22.** Έστω $\mathbf{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂B_ρ και $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. Δείξτε ότι

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{B_\rho} \nabla^2 u dA.$$

***23.** Δείξτε ότι $I'(\rho) = \frac{1}{\rho} \iint_{B_\rho} \nabla^2 u dA$.

***24.** Υποθέτουμε ότι η u ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace: $\nabla^2 u = 0$ στο D. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ασκήσεις δείξτε ότι

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_\rho} u ds.$$

(Η σχέση αυτή εκφράζει το γεγονός ότι η τιμή μιας αρμονικής συνάρτησης σε ένα σημείο είναι η μέση τιμή των τιμών της στην περιφέρεια οποιουδήποτε δίσκου με κέντρο το σημείο.)

***25.** Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 24 δείξτε ότι αν η u είναι αρμονική (δηλ. αν $\nabla^2 u = 0$), τότε το $u(\mathbf{p})$ εκφράζεται σαν ένα διπλό ολοκλήρωμα

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u dA.$$

***26.** Υποθέτουμε ότι u είναι μια αρμονική συνάρτηση ορισμένη στο D (δηλαδή, $\nabla^2 u = 0$ στο D) και ότι η u έχει τοπικό μέγιστο (ή ελάχιστο) σε κάποιο σημείο $\mathbf{p}$ του D.

(a) Δείξτε ότι η u πρέπει να είναι σταθερή σε κάποιον δίσκο με κέντρο το $\mathbf{p}$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 25.)

(b) Υποθέτουμε ότι το D είναι συνεκτικό κατά δρόμους (δηλαδή, αν $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ είναι δύο σημεία του D, υπάρχει μια συνεχής καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$: $[0,1] \to D$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{p}$ και $\boldsymbol{\sigma}(1) = \mathbf{q}$) και το μέγιστο ή ελάχιστο στο $\mathbf{p}$ είναι ολικό· δηλαδή, $u(\mathbf{q}) \leq u(\mathbf{p})$ ή $u(\mathbf{q}) \geq u(\mathbf{p})$ για κάθε $\mathbf{q}$ στο D). Δείξτε ότι η u πρέπει να είναι σταθερή στο D.

(Το συμπέρασμα αυτής της Άσκησης λέγεται *αρχή του ισχυρού μεγίστου ή ελαχίστου* για αρμονικές συναρτήσεις. Συγκρίνατέ το με τις Ασκήσεις 34 ώς 38 στην Παράγραφο 4.2.)

***27.** Μία συνάρτηση u λέγεται *υφαρμονική* στο D αν $\nabla^2 u \geq 0$ παντού στο D. Λέμε ότι είναι *υπεραρμονική* αν $\nabla^2 u \leq 0$.

(a) Αποδείξτε μια αρχή ισχυρού μεγίστου για υφαρμονικές συναρτήσεις.

(b) Αποδείξτε μια αρχή ισχυρού ελαχίστου για υπεραρμονικές συναρτήσεις.

***28.** Υποθέτουμε ότι D είναι ο δίσκος $\{(x,y)|x^2 + y^2 < 1\}$ και C είναι η περιφέρεια $\{(x,y)|x^2 + y^2 = 1\}$. Στην Παράγραφο 8.5 θα δείξουμε ότι αν f είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο C, τότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση u στο $D \cup C$ που συμπίπτει με την f στο C και είναι αρμονική στο D. Δηλαδή, η f έχει μια αρμονική επέκταση στο δίσκο. Υποθέτοντας το παραπάνω γνωστό, δείξτε τα εξής:

(a) Αν q είναι μία μη σταθερή συνεχής συνάρτηση στο $D \cup C$ και υφαρμονική (όχι όμως αρμονική) στο D, τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση u στο $D \cup C$ που είναι αρμονική στο D, τέτοια ώστε η u να συμπίπτει με την q στο C και $q < u$ παντού στο D.

(b) Ο ίδιος ισχυρισμός, αν αντικαταστήσουμε το "υφαρμονική" με το "υπεραρμονική" και την "$q < u$" με την "$q > u$".

***29.** Έστω D όπως στην Άσκηση 28, και $f : D \to \mathbf{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης $\nabla^2 u = 0$ που ικανοποιεί την $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in \partial D$ είναι μοναδική.

***30.** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green αποδείξτε τον τύπο της αλλαγής μεταβλητών στην ακόλουθη ειδική περίπτωση:

$$\int_D dxdy = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

για έναν μετασχηματισμό

$$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v)).$$