Η απόδειξη σκιαγραφείται στην Άσκηση 16. Προειδοποιούμε
τον αναγνώστη σ' αυτό το σημείο ότι, σε αντίθεση με το $\mathbf{F}$ του Θεω-
ρήματος 7, το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ στο Θεώρημα 8 δεν επιτρέπεται
να έχει κατ' εξαίρεση σημεία. Για παράδειγμα, το πεδίο δυνάμεων
βαρύτητας $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ έχει την ιδιότητα $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, ωστόσο
δεν υπάρχει $\mathbf{G}$ για το οποίο $\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{G}$ (δείτε την Άσκηση 25). Το
Θεώρημα 8 δεν εφαρμόζεται, γιατί το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας $\mathbf{F}$
δεν ορίζεται στο $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις δυναμικού για ένα διανυσματικό πεδίο διαφέρουν το πολύ κατά μία σταθερά.

2. (a) Έστω $\mathbf{F}(x, y) = (xy, y^2)$ και $\boldsymbol{\sigma}$ η καμπύλη $y = 2x^2$ που συνδέει το (0, 0) με το (1, 2) στο $\mathbf{R}^2$. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.
(b) Εξαρτάται το ολοκλήρωμα του (a) μέρους από το ποιά καμπύλη συνδέει τα (0, 0) και (1, 2);

3. Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \sin x)\mathbf{i} + x^2 z\mathbf{j} + x^2 y\mathbf{k}$. Βρείτε μία συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$.

4. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, όπου $\sigma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4), 0 \leq t \leq \pi$, και το $\mathbf{F}$ είναι όπως στην Άσκηση 3.

5. Ποιό είναι το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ όταν ένα σωματίδιο μετακινείται από ένα σημείο $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ "στο ∞", όπου $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$;

6. Στην Άσκηση 5, δείξτε ότι $\mathbf{F} = \nabla(1/r), r \neq 0, r = \|\mathbf{r}\|$. Με ποιά έννοια είναι το ολοκλήρωμα της $\mathbf{F}$ ανεξάρτητο του δρόμου;

7. Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Είναι δυνατόν να υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$;

***8.** Έστω $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ και ας υποθέσουμε ότι κάθε F_k ικανοποιεί τη συνθήκη ομογένειας

$$F_k(tx, ty, tz) = tF_k(x, y, z) \qquad k = 1, 2, 3.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Αποδείξτε ότι $\mathbf{F} = \nabla f$ όπου

$$2f(x, y, z) = xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z).$$

(ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε την Επαναληπτική Άσκηση 23, του Κεφαλαίου 2.)

9. Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sin y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, όπου $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp\sqrt{t}), 0 \leq t \leq 1$.

10. Υποθέτουμε ότι ένα ρευστό έχει πεδίο ταχυτήτων το $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Ποιά είναι η κυκλοφορία γύρω από τη μοναδιαία περιφέρεια του επιπέδου xy; Ερμηνεύστε την απάντησή σας (με φυσικούς όρους).

11. Η μάζα της γης είναι προσεγγιστικά 6×10^{27} g και του ήλιου 330.000 φορές μεγαλύτερη. Η σταθερά της βαρύτητας είναι 67×10^{-8} $\mathrm{m^3/s^2 \cdot g}$. Η απόσταση της γης από τον ήλιο είναι περίπου $1,5 \times 10^{12}$ cm. Υπολογίστε, προσεγγιστικά, το έργο που απαιτείται για να αυξηθεί η απόσταση της γης από τον ήλιο κατά 1 cm.

12. (a) Δείξτε ότι $\int_C (x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2) = 2\pi$, όπου C είναι ο μοναδιαίος κύκλος.
(b) Συμπεράνατε ότι το διανυσματικό πεδίο $[-y/(x^2 + y^2)]\mathbf{i} + [x/(x^2 + y^2)]\mathbf{j}$ του (a) μέρους δεν είναι συντηρητικό πεδίο.
(c) Δείξτε, όμως ότι $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Έρχεται αυτό σε αντίφαση με το πόρισμα του Θεωρήματος 7, της προηγούμενης παραγράφου; Αν όχι, γιατί;

13. Για κάθε ένα από τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{F}$ (στο επίπεδο) που ακολουθούν, εξετάστε αν είναι η κλίση κάποιας βαθμωτής συνάρτησης f. Αν υπάρχει τέτοια f, βρείτε την
(a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
(b) $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
(c) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

14. Επαναλάβετε την Άσκηση 13 για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία:
(a) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \sin xy)\mathbf{i} - (x^2 \sin xy)\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = (x\sqrt{x^2y^2+1})\mathbf{i} + (y\sqrt{x^2y^2+1})\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (2x\cos y + \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \sin y + x\sin y)\mathbf{j}$

15. Δείξτε ότι τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά. Υπολογίστε το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ για την καμπύλη που δίνεται κάθε φορά.

(a) $\mathbf{F} = (xy^2 + 3x^2y)\mathbf{i} + (x+y)x^2\mathbf{j}$. C είναι η καμπύλη που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα από το $(1, 1)$ στο $(0, 2)$ και μετά στο $(3, 0)$.

(b) $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y^2+1}\mathbf{i} - \dfrac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\mathbf{j}$, η C παραμετρικοποιείται από τις $x = t^3-1, y = t^6-t, 0 \leq t \leq 1$.

(c) $\mathbf{F} = [\cos(xy^2) - xy^2\sin(xy^2)]\mathbf{i} - 2x^2y\sin(xy^2)\mathbf{j}$, C είναι η καμπύλη των $(e^t, e^{t+1}), -1 \leq t \leq 0$.

16. Αποδείξτε το Θεώρημα 8. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίστε $\mathbf{G} = G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j} + G_3\mathbf{k}$ μέσω των ισοτήτων

$$G_1(x,y,z) = \int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)dt$$

$$G_2(x,y,z) = -\int_0^z F_1(x,y,t)dt$$

και

$G_3(x,y,z) = 0$.)

17. Είναι κάποιο από τα επόμενα διανυσματικά πεδία ο στροβιλισμός κάποιου άλλου διανυσματικού πεδίου; Αν ναι, βρείτε το διανυσματικό πεδίο.

(a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F} = (x^2+1)\mathbf{i} + (z - 2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

18. Έστω $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Επαληθεύστε ότι $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Βρείτε μία $\mathbf{G}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{G}$.

19. Επαναλάβετε την Άσκηση 18 για το $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

20. Έστω $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - (x\cos z)\mathbf{j} + ze^y\mathbf{k}$. Βρείτε ένα $\mathbf{G}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{G}$.

21. Έστω $\mathbf{F} = (x\cos y)\mathbf{i} - (\sin y)\mathbf{j} + (\sin x)\mathbf{k}$. Βρείτε ένα $\mathbf{G}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{G}$.

22. Χρησιμοποιώντας διαφορετικές καμπύλες από το $(0,0,0)$ στο (x,y,z), δείξτε ότι η συνάρτηση f που ορίστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 7 για το μέρος "συνθήκη (ii)⇒συνθήκη (iii)" ικανοποιεί τις $\partial f/\partial x = F_1$ και $\partial f/\partial y = F_2$.

23. Έστω $\mathbf{F}$ το διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$ που δίνεται από την $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

(a) Δείξτε ότι το $\mathbf{F}$ δεν είναι αστρόβιλο.

(b) Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{F}$ παριστάνει το διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού. Δείξτε ότι αν αφήσουμε έναν φελλό μέσα σ' αυτό το ρευστό θα περιστρέφεται σε ένα επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο xy, με κυκλική τροχιά γύρω από τον άξονα z.

(c) Με ποια κατεύθυνση περιστρέφεται ο φελλός;

***24.** Έστω $\mathbf{G}$ το διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3\backslash\{$άξονας $z\}$ που ορίζεται από την

$$\mathbf{G} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

(a) Δείξτε ότι το $\mathbf{G}$ είναι αστρόβιλο.

(b) Δείξτε ότι το συμπέρασμα της Άσκησης 23 (b) ισχύει και για το $\mathbf{G}$.

(c) Πώς εξηγείται το γεγονός ότι οι τροχιές των $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι οι ίδιες (κυκλικές γύρω από τον άξονα z) και το $\mathbf{G}$ είναι αστρόβιλο, ενώ το $\mathbf{F}$ όχι; (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Η ιδιότητα "όχι αστρόβιλο" είναι τοπική, δηλαδή, είναι ιδιότητα του ρευστού στην περιοχή ενός σημείου).

***25.** Έστω $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας που ορίζεται στον $\mathbf{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$.

(a) Δείξτε ότι $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

(b) Δείξτε ότι $\mathbf{F} \neq \operatorname{curl}\mathbf{G}$ για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ κλάσεως C^1 στον $\mathbf{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$.

8.4

Το Θεώρημα του Gauss