ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΙΒΛΙΟ Α΄

Επιμέλεια Μετάφρασης:

- Αποστολάκη Μαρία Α.Μ.3414
- Βεϊζη Αρίων Α.Μ.3551
- Μουτζιάνου Γεώργιος Α.Μ. 3405
- Παντελάκη Άννα Α.Μ.3341
- Παπουτσάκης Κώστας Α.Μ.3249
- Χριστοφάκη Μαρία Α.Μ.3277

Ορισμοί

1. Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος.

2. Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος.

3. Τα άκρα της γραμμής είναι σημεία.

4. Ευθεία γραμμή είναι αυτή η οποία εκτείνεται εξ' ίσου από τα σημεία της.

5. Και επιφάνεια είναι μόνο μήκος και πλάτος.

6. Και τα άκρα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.

7. Επίπεδη επιφάνεια είναι αυτή η οποία εκτείνεται εξ' ίσου από τις γραμμές της.

8. Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο γραμμών που τέμνουν η μία την άλλη σε επίπεδο και δεν εκτείνονται σε ευθεία γραμμή.

9. Και όταν οι γραμμές που περιέχουν την γωνία είναι ευθείες η γωνία καλείται ευθύγραμμη.

10. Και όταν μια ευθεία γραμμή βρίσκεται πάνω σε μια άλλη ευθεία γραμμή τότε οι παρακείμενες γωνίες είναι ίσες, κάθε μία από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η πρώτη ευθεία ονομάζεται κάθετη πάνω σε αυτή την οποία τοποθετείται.

11. Αμβλεία γωνία είναι η μεγαλύτερη της ορθής.

12. Οξεία η μικρότερη της ορθής.

13. Το όριο είναι αυτό το οποίο είναι ακραίο σημείο κάποιου.

14. Σχήμα είναι αυτό το οποίο περιέχεται από κάποιο όριο ή κάποια όρια.

15. Ο κύκλος είναι ένα επίπεδο σχήμα που περιέχεται σε μία γραμμή (η οποία ονομάζεται περιφέρεια) προς την οποία από ένα σημείο από αυτά που κείνται

μέσα στο σχήμα όλες οι προσπίπτουσες ευθείες (προς την περιφέρεια του κύκλου) είναι μεταξύ τους ίσες.

16. Και το σημείο αυτό καλείται κέντρο του κύκλου.

17. Και διάμετρος του κύκλου είναι κάποια ευθεία που άγεται δια μέσω του κέντρου και τελειώνει σε καθένα από τα δύο μέρη της περιφέρειας του κύκλου και η οποία χωρίζει στη μέση τον κύκλο.

18. Και ημικύκλιο είναι το σχήμα που περιέχεται από τη διάμετρο και από την περιφέρεια που τέμνεται από αυτήν. Και το κέντρο του ημικυκλίου είναι το ίδιο όπως είναι και του κύκλου.

19. Ευθύγραμμα είναι τα σχήματα τα οποία περιέχονται σε ευθείες, τα τρίπλευρα σε τρεις, τα τετράπλευρα σε τέσσερις, τα πολύπλευρα περιέχονται σε περισσότερες από τέσσερις ευθείες.

20. Από τα τρίπλευρα σχήματα, ισόπλευρο τρίγωνο είναι αυτό που έχει τις τρεις πλευρές του ίσες, ισοσκελές αυτό που έχει μόνο τις δύο πλευρές ίσες και σκαληνό αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.

21. Από τα τρίπλευρα σχήματα ορθογώνιο τρίγωνο είναι αυτό που έχει ορθή γωνία, αμβλυγώνιο αυτό που έχει αμβλεία γωνία, οξυγώνιο αυτό που έχει τρεις οξείες γωνίες,

22. Από τα τετράπλευρα σχήματα τετράγωνο είναι αυτό που είναι ισόπλευρο και ορθογώνιο, και ετερόμηκες αυτό που είναι ορθογώνιο μεν αλλά όχι ισόπλευρο και ρόμβος είναι αυτό το οποίο είναι ισόπλευρο μεν αλλά όχι ορθογώνιο, ρομβοειδές είναι αυτό που έχει τις απέναντι πλευρές και τις γωνίες ίσες μεταξύ τους και δεν είναι ούτε ισόπλευρο ούτε ορθογώνιο. Και τα τετράπλευρα εκτός των προηγούμενων ας ονομαστούν τραπέζια.

23. Παράλληλες είναι οι ευθείες, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και όταν εκτείνονται απεριόριστα προς κάθε κατεύθυνση δεν συμπίπτουν η μία με την άλλη πουθενά.

Αιτήματα

1. Έχει αξιωθεί ότι μπορεί να αχθεί ευθεία γραμμή από κάθε σημείο προς κάθε σημείο.

2. Και από πεπερασμένη ευθεία μπορεί να παραχθεί άπειρη ευθεία κατά συνεχή τρόπο.

3. Και μπορεί να γραφεί κύκλος με κάθε κέντρο και διάστημα.

4. Και όλες οι ορθές γωνίες ίσες μεταξύ τους.

5. Και εάν μια ευθεία εμπίπτει σε δυο άλλες ευθείες έτσι ώστε το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών τότε προεκτεινόμενες απείρως οι ευθείες τέμνονται από το μέρος που το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

Κοινές έννοιες

1. Αυτά που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι ίσα μεταξύ τους.

2. Και αν ίσα προστεθούν σε ίσα τότε όλα είναι ίσα.

3. Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα τα υπόλοιπα είναι ίσα.

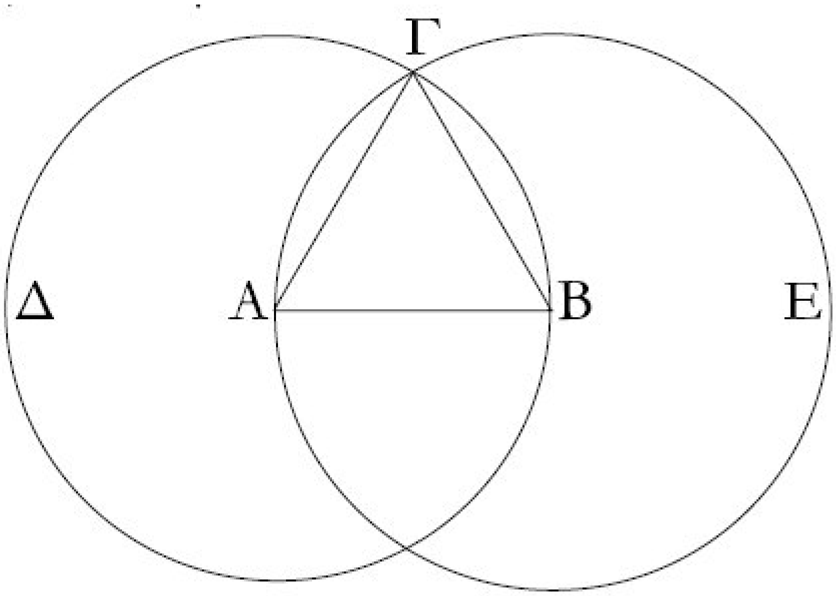
4. Και τα εφαρμόζοντα πράγματα το ένα με το άλλο είναι ίσα μεταξύ τους.

5. Και το όλο είναι μεγαλύτερο του μέρους.

Πρόταση 1

Να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο από δοθείσα πεπερασμένη ευθεία.

Έστω ΑΒ η δοθείσα πεπερασμένη ευθεία. Πρέπει να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο από την ευθεία ΑΒ.



Με κέντρο το Α και διάστημα το ΑΒ γράφεται ο κύκλος ΒΓΔ. Και πάλι με κέντρο το Β και διάστημα το ΒΑ γράφεται κύκλος ΑΓΕ και από το Γ σημείο όπου τέμνουν οι κύκλοι ο ένας τον άλλο στα σημεία Α, Β συνδέονται οι ευθείες ΓΑ, ΓΒ.

Και επειδή το σημείο Α είναι κέντρο του κύκλου ΓΔΒ, η ΑΓ είναι ίση με την ΑΒ. Και πάλι επειδή το Β σημείο είναι κέντρο του κύκλου ΓΑΕ, η ΒΓ είναι ίση με την ΒΑ. Και αποδείχτηκε ότι η ΓΑ είναι ίση με την ΑΒ, άρα κάθε μία από τις ΓΑ, ΓΒ είναι ίση με την ΑΒ. Αυτά που είναι ίσα με το ίδιο πράγμα είναι ίσα και μεταξύ τους. Άρα η ΓΑ είναι ίση με την ΓΒ. Οι ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ είναι ίσες μεταξύ τους.

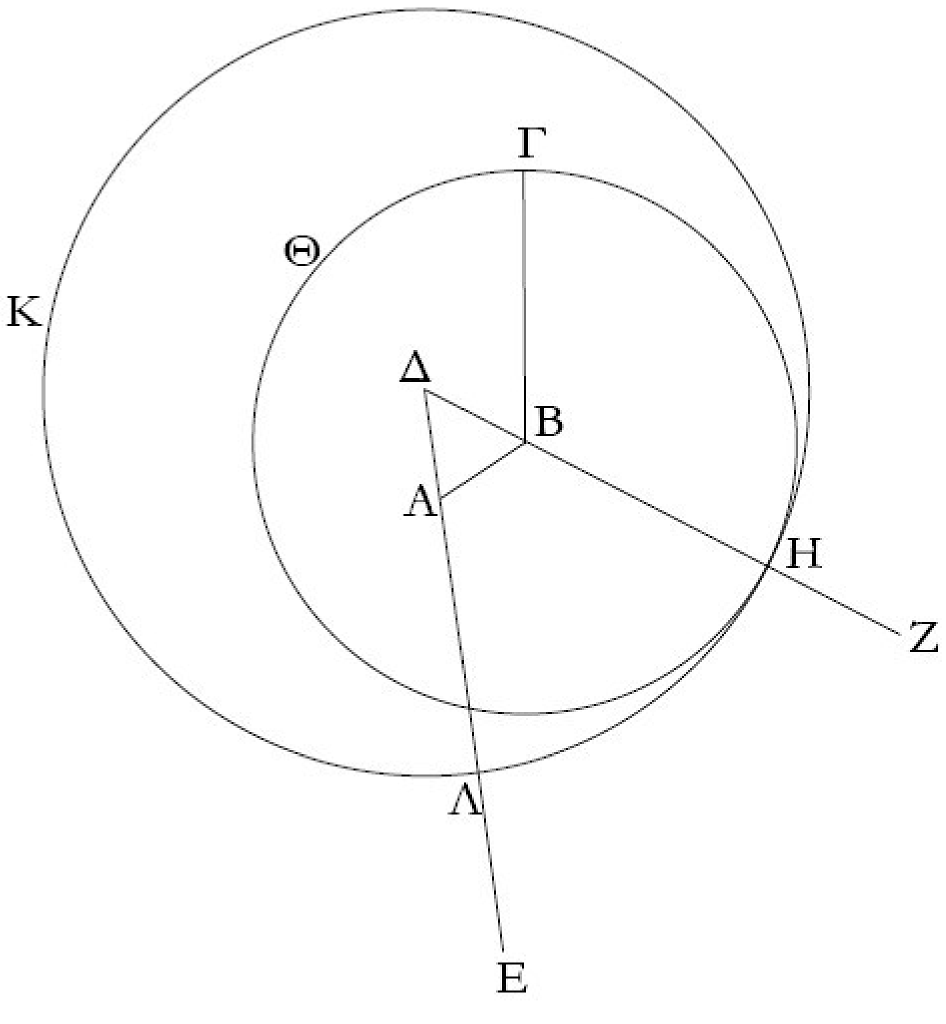
Άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και κατασκευάστηκε από τη δοθείσα πεπερασμένη ευθεία ΑΒ. Ο. Ε. Π[1]

Πρόταση 2

Να τοποθετηθεί ευθεία ίση με δοθείσα ευθεία σε δοθέν σημείο.

1 Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι

Έστω Α το δοθέν σημείο και ΒΓ η δοθείσα ευθεία. Πρέπει να τοποθετηθεί μια ευθεία στο σημείο Α ίση με τη δοθείσα ευθεία ΒΓ.



Ενώνεται από το σημείο Α στο σημείο Β η ευθεία ΑΒ και κατασκευάζεται σε αυτήν ισόπλευρο τρίγωνο ΔΑΒ. Και παράγονται οι ευθείες ΑΕ και ΒΖ από τις ευθείες ΔΑ και ΔΒ. Γράφεται ο κύκλος ΓΗΘ με κέντρο Β και διάστημα ΒΓ, και πάλι γράφεται ο κύκλος ΗΚΛ με κέντρο το Δ και διάστημα ΔΗ.

Επειδή το σημείο Β είναι το κέντρο του ΓΗΘ, η ΒΓ είναι ίση με την ΒΗ. Πάλι, αφού το Δ σημείο είναι κέντρο του κύκλου ΗΚΛ, η ΔΛ είναι ίση με τη ΔΗ. Σύμφωνα με αυτά η ΔΑ είναι ίση με τη ΔΒ. Άρα η λοιπή ΑΛ είναι ίση της λοιπής ΒΗ. Αποδείχθηκε ότι και η ΒΓ ίση με την ΒΗ. Άρα καθεμία των ΑΛ, ΒΓ είναι ίση με την

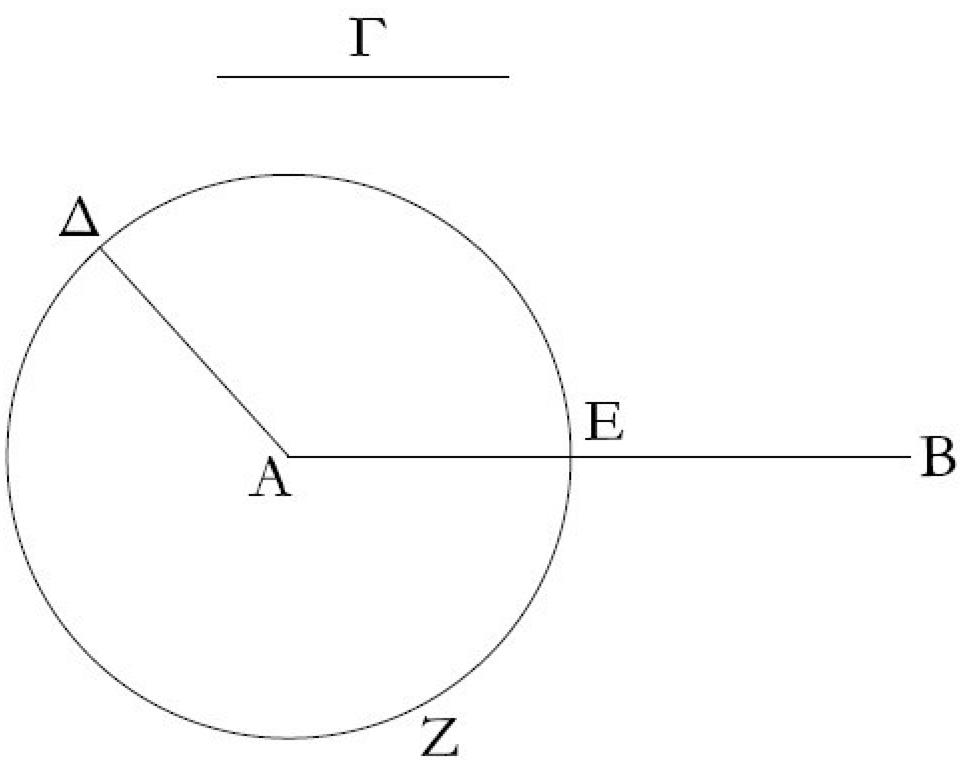
ΒΗ. Αυτά που είναι ίσα στο ίδιο πράγμα είναι ίσα μεταξύ τους και άρα η ΑΛ είναι ίση με την ΒΓ.

Άρα στο δοθέν σημείο Α κείται η ευθεία ΑΛ η οποία είναι ίση με την ΒΓ. Ο. Ε. Π.

Πρόταση 3

Από δύο δοθείσες άνισες ευθείες να αφαιρεθεί από την μεγαλύτερη η μικρότερη.

Θεωρούνται οι δύο άνισες δοθείσες ευθείες ΑΒ και Γ από τις οποίες μεγαλύτερη είναι η ΑΒ. Πρέπει λοιπόν να αφαιρέσουμε μία ευθεία ίση της μικρότερης Γ από τη μεγαλύτερη ΑΒ.



Τοποθετείται στο σημείο Α ευθεία ΑΔ ίση με την Γ και γράφεται κύκλος ΔΕΖ με κέντρο το Α και διάστημα ΑΔ.

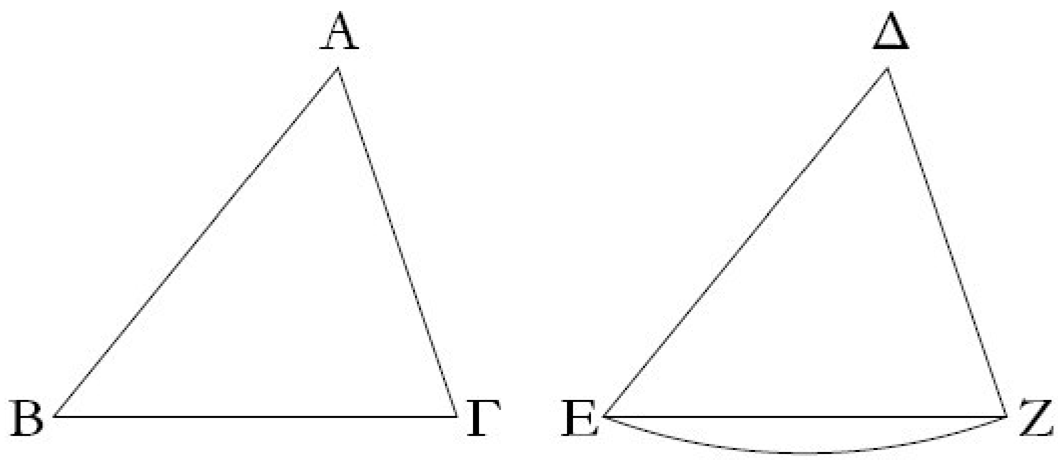
Και επειδή το σημείο Α είναι κέντρο του κύκλου ΔΕΖ η ΑΕ είναι ίση της ΑΔ. Αλλά και η Γ είναι ίση με την ΑΔ. Καθεμία από τις ΑΕ, Γ είναι ίση με την ΑΔ. Επομένως και η ΑΕ είναι ίση με την Γ.

Άρα από δύο δοθείσες άνισες ευθείες ΑΒ, Γ από την μεγαλύτερη ΑΒ αφαιρείται ευθεία ΑΕ ίση με την μικρότερη Γ. Ο. Ε. Π.

Πρόταση 4

Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές και τις περιεχόμενες υπό των ίσων πλευρών γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις βάσεις ίσες και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες.

Έστω δύο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν τις δύο πλευρές ΑΒ, ΑΓ ίσες αντίστοιχα με τις ΔΕ, ΔΖ δηλαδή την ΑΒ με την ΔΕ και την ΑΓ με την ΔΖ. Και έστω ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ. Λέγω ότι και η βάση ΒΓ είναι ίση με την βάση ΕΖ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες υποτείνονται οι ίσες πλευρές είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες. Δηλαδή η ΑΒΓ είναι ίση με την ΔΕΖ και η ΑΓΒ είναι ίση με την ΔΖΕ.



Εάν το τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμοστεί επί του τριγώνου ΔΕΖ και το σημείο Α τεθεί στο σημείο Δ, και η ευθεία ΑΒ επί την ΔΕ, τότε το σημείο Β εφαρμόζει επί το σημείο Ε αφού η ΑΒ είναι ίση με την ΔΕ. Έτσι επειδή η ΑΒ εφαρμόζει επί την ΔΕ, η ευθεία ΑΓ εφαρμόζει επίσης επί την ΔΖ λόγω του ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ. Ώστε και το σημείο Γ εφαρμόζει επί το Ζ επίσης διότι η ΑΓ είναι ίση με την ΔΖ. Αλλά και το σημείο Β εφαρμόζει επί το Ε, ώστε η βάση ΒΓ εφαρμόζει επί την βάση ΕΖ. Διότι εάν το Β εφαρμόσει επί το Ε και το Γ επί το Ζ, και η βάση ΒΓ δεν εφαρμοστεί επί την

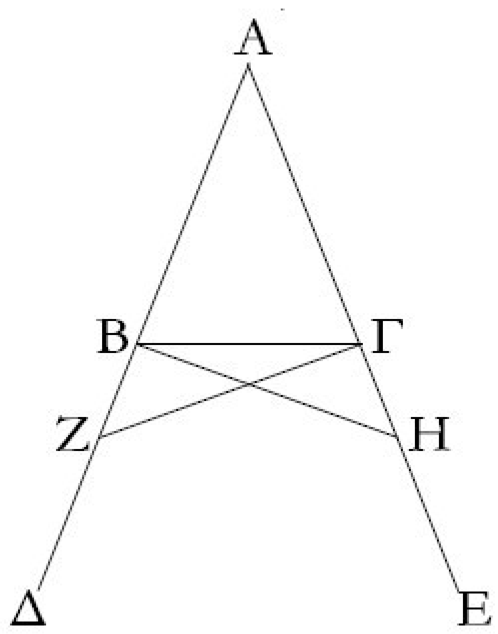
ΕΖ, τότε δύο ευθείες γραμμές θα περιέχουν εμβαδόν, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, η βάση ΒΓ θα εφαρμόσει επί την ΕΖ και θα είναι ίση με αυτήν. Ώστε και όλο το ΑΒΓ τρίγωνο θα εφαρμόσει επί όλο το ΔΕΖ τρίγωνο και θα είναι ίσο με αυτό, κα οι λοιπές γωνίες θα εφαρμόσουν επί τις λοιπές γωνίες και θα είναι ίσες με αυτές, δηλαδή η ΑΒΓ θα είναι ίση με την ΔΕΖ και η ΑΓΒ με την ΔΖΕ.

Εάν άρα δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές και τις περιεχόμενες υπό των ίσων πλευρών γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις βάσεις ίσες και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες. Ο. Ε. Δ.[2]

Πρόταση 5

Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες των ισοσκελών τριγώνων είναι ίσες μεταξύ τους και αν οι ίσες πλευρές προεκταθούν τότε οι γωνίες κάτω από την βάση θα είναι ίσες μεταξύ τους.

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ίση την πλευρά ΑΒ με την πλευρά ΑΓ και παράγονται από τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ. Λέγω ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την ΑΓΒ και η ΓΒΔ με την ΒΓΕ.



2 ὅπερ ἔδει δεῖξαι

Λαμβάνεται τυχαίο σημείο Ζ επί της ΒΔ και αφαιρείται από την μεγαλύτερη ΑΕ η μικρότερη ΑΖ ίση με την ΑΗ και ενώνονται οι ευθείες ΖΓ, ΗΒ.

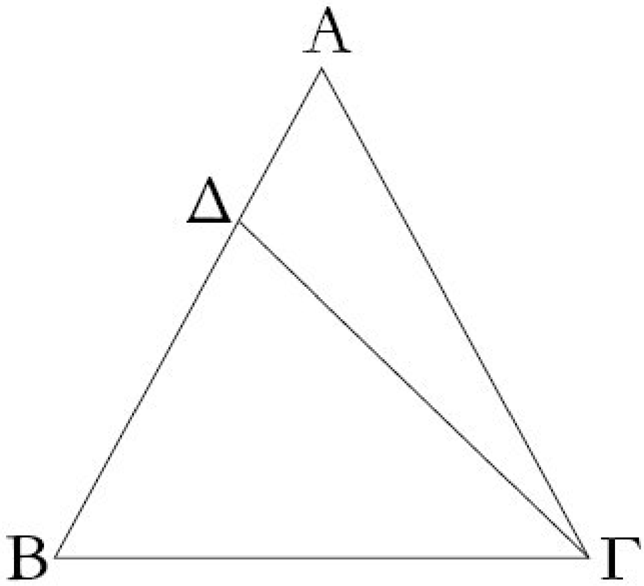
Επειδή η ΑΖ είναι ίση με την ΑΗ και η ΑΒ με την ΑΓ, οι δύο ΖΑ, ΑΓ είναι ίσες με τις δύο ΗΑ, ΑΒ αντίστοιχα, και περιέχουν κοινή γωνία την ΖΑΗ. Άρα η βάση ΖΓ είναι ίση με την βάση ΗΒ και το τρίγωνο ΑΖΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΗΒ και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι ίσες με τις λοιπές γωνίες μία προς μία, δηλαδή η ΑΓΖ είναι ίση με την ΑΒΗ και η ΑΖΓ με την ΑΗΒ. Και επειδή όλη η ΑΖ είναι ίση με όλη την ΑΗ μεταξύ των οποίων η ΑΒ είναι ίση με την ΑΓ, άρα η λοιπή ΒΖ είναι ίση με την λοιπή ΓΗ, και αποδείχτηκε και η ΖΓ ίση με την ΗΒ. Άρα οι δύο λοιπόν ΒΖ, ΖΓ είναι ίσες με τι δύο ΓΗ, ΗΒ αντίστοιχα και η γωνία ΒΖΓ είναι ίση με την ΓΗΒ και κοινή βάση αυτών η ΒΓ. Και άρα το ΒΖΓ τρίγωνο είναι ίσο με το τρίγωνο ΓΗΒ και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται θα είναι ίσες με τις λοιπές γωνίες αντίστοιχα, άρα είναι ίση η ΖΒΓ με την ΗΓΒ και η ΒΓΖ με την ΓΒΗ. Επειδή αποδείχθηκε ίση ολόκληρη η γωνία ΑΒΗ με ολόκληρη τη γωνία ΑΓΖ μεταξύ των οποίων η ΓΒΗ ίση με την ΒΓΖ, άρα η λοιπή ΑΒΓ είναι τελικά ίση με την λοιπή ΑΓΒ, και βρίσκονται ως προς την βάση του τριγώνου ΑΒΓ. Και αποδείχθηκε η ΖΒΓ ίση με την ΗΓΒ, και βρίσκονται κάτω από την βάση.

Άρα οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελών τριγώνων είναι ίσες μεταξύ τους και αν οι ίσες πλευρές προεκταθούν τότε οι γωνίες κάτω από την βάση θα είναι ίσες μεταξύ τους. Ο.Ε. Δ.

Πρόταση 6

Αν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους τότε και οι πλευρές που υποτείνονται από τις ίσες γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους.

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο από το οποίο έχει την γωνία ΑΒΓ ίση με την ΑΓΒ. Λέγω ότι και η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την πλευρά ΑΓ.



Αν οι ΑΒ, ΑΓ είναι άνισες τότε μία από τις δύο είναι μεγαλύτερη. Έστω ΑΒ η μεγαλύτερη. Και έστω ΔΒ ίση με την μικρότερη ΑΓ που έχει αφαιρεθεί από την μεγαλύτερη ΑΒ και ενώνεται η ΔΓ.

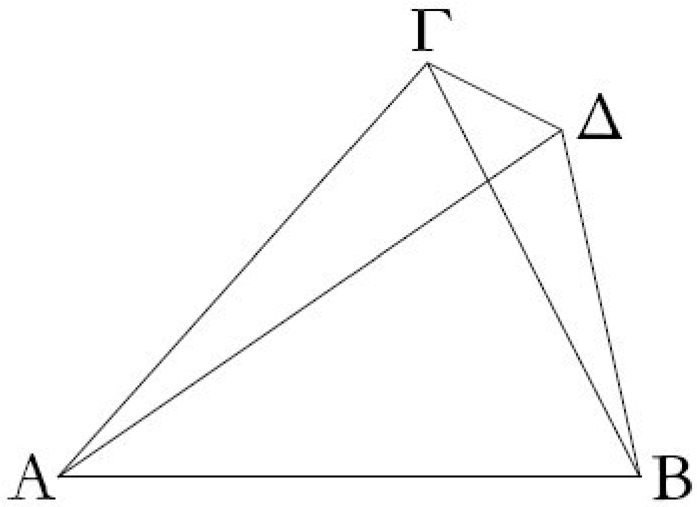
Επειδή η ΔΒ είναι ίση με την ΑΓ και η ΒΓ είναι κοινή, οι δύο λοιπόν ΔΒ, ΒΓ είναι ίσες με δύο ΑΓ, ΓΒ αντίστοιχα και η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με την γωνία ΑΓΒ. Άρα η βάση ΔΓ είναι ίση με την βάση ΑΒ και το τρίγωνο ΔΒΓ θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΓΒ το μικρότερο με το μεγαλύτερο, άτοπο. Άρα οι ΑΒ, ΑΓ δεν είναι άνισες. Άρα είναι ίσες.

Άρα αν οι δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε και οι πλευρές που υποτείνονται από τις ίσες γωνίες είναι επίσης ίσες μεταξύ τους. Ο. Ε. Δ.

Πρόταση 7

Επί της ίδιας ευθείας και με πέρατα αυτά της ευθείας, δεν μπορούν να κατασκευαστούν δύο ευθείες αντίστοιχα ίσες με δύο άλλες ευθείες που έχουν τα ίδια πέρατα, έτσι ώστε να συναντώνται σε διαφορετικό σημείο στο ίδιο μέρος της ευθείας.

Γιατί αν είναι δυνατόν στην ίδια ευθεία ΑΒ, δύο άλλες ευθείες η ΑΔ, ΔΒ ίσες αντίστοιχα με τις ίδιες (δοσμένες) ευθείες ΑΓ, ΓΒ να συναντώνται σε διαφορετικά *σημεία το Γ, Δ επί τα αυτά μέρη έχοντας τα ίδια πέρατα. Ώστε να είναι ίση η ΓΑ με τη ΔΑ έχοντας το ίδιο πέρας Α με αυτήν και η ΓΒ είναι ίση με την ΔΒ έχοντας το ίδιο πέρας Β με αυτήν. Και έχει σχεδιαστεί η ΓΔ.*



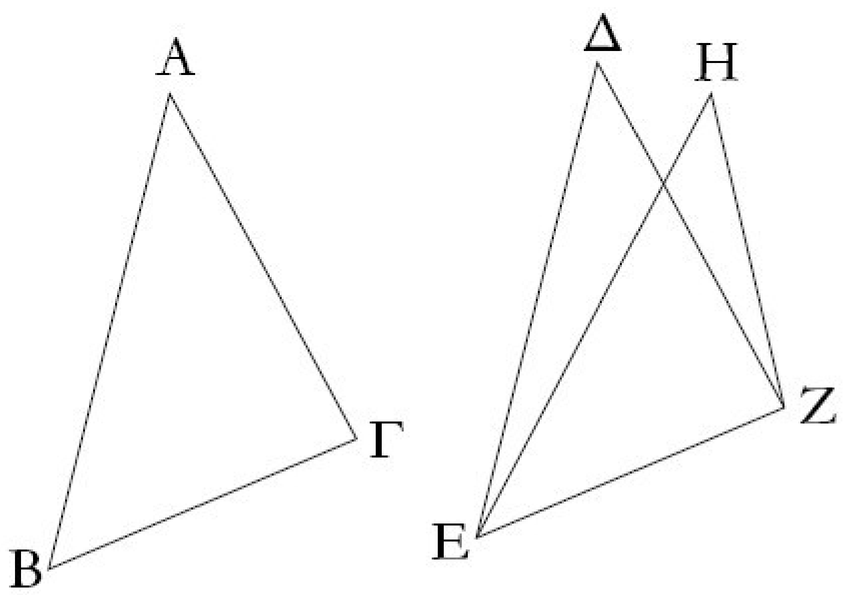
Επειδή είναι ίση η ΑΓ με την ΑΔ, ίση είναι και η γωνία ΑΓΔ με την ΑΔΓ. Άρα η ΑΔΓ μεγαλύτερη από την ΔΓΒ. Άρα πολύ μεγαλύτερη είναι η ΓΔΒ από την ΔΓΒ. Πάλι αφού είναι ίση η ΓΒ με την ΔΒ είναι ίση και η γωνία ΓΔΒ με την γωνία ΔΓΒ και αποδείχτηκε μεγαλύτερη από αυτήν.

Άρα επί της ίδιας ευθείας, δεν μπορούν να κατασκευαστούν σε διαφορετικό σημείο επί τα αυτά μέρη δύο άλλες ευθείες ίσες αντίστοιχα με δύο δοθείσες ευθείες που συναντιούνται αλλά έχοντας τα ίδια πέρατα όπως οι αρχικές ευθείες. Ο. Ε. Δ

Πρόταση 8

Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές ίσες αντίστοιχα και έχουν ίσες τις βάσεις, τότε θα έχουν ίσες και τις γωνίες που περιέχονται από τις ίσες ευθείες.

Έστω δύο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν ίσες τις δύο πλευρές ΑΒ, ΑΓ με τις δύο πλευρές ΔΕ, ΔΖ αντίστοιχα, την ΑΒ με την ΔΕ και την ΑΓ με την ΔΖ. Και τη βάση ΒΓ ίση με την βάση ΕΖ. Λέγω ότι και η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την γωνία ΕΔΖ.



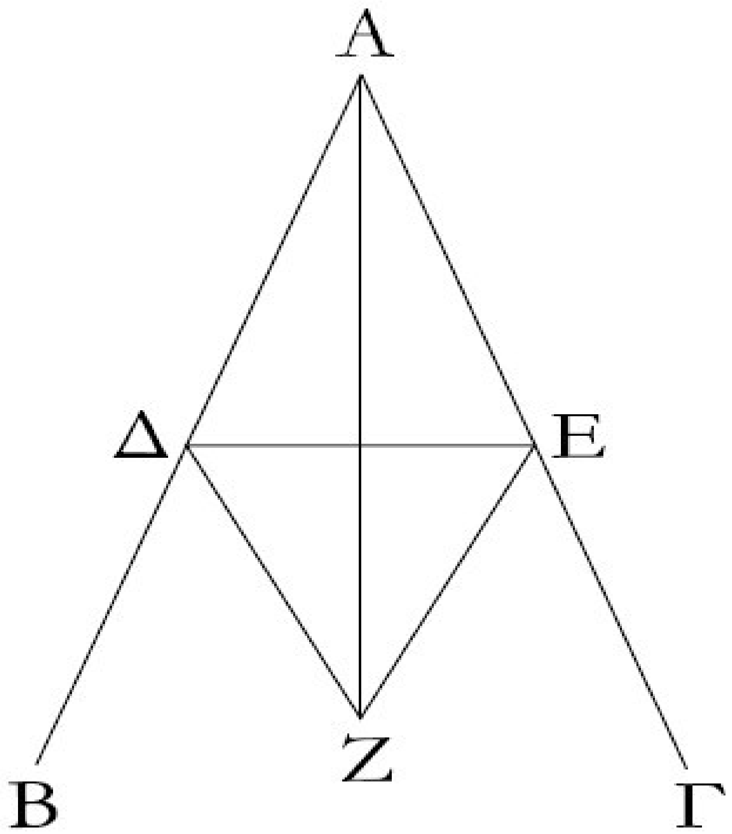
Γιατί αν εφαρμοστεί το τρίγωνο ΑΒΓ στο τρίγωνο ΔΕΖ και θα τοποθετηθεί το σημείο Β στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΓ επί την ΕΖ. Τότε το σημείο Γ θα εφαρμόσει επί το Ζ, επειδή η ΒΓ είναι ίση με την ΕΖ. Επειδή λοιπόν εφαρμόζει η ΒΓ επί την ΕΖ θα εφαρμόζουν και οι ΒΑ, ΓΑ στις ΕΔ και ΔΖ. Έστω ότι η βάση ΒΓ εφαρμόζει επί την βάση ΕΖ και οι πλευρές ΒΑ, ΑΓ δεν εφαρμόσουν επί των ΕΔ, ΔΖ αλλά διαφέρουν όπως οι ΕΗ, ΗΖ. Τότε θα έχουν δημιουργηθεί στην ίδια ευθεία δύο άλλες ευθείες ίσες με τις δοθείσες ευθείες αντίστοιχα σε διαφορετικό σημείο (να συναντιούνται) επί τα αυτά μέρη αλλά έχοντας ίδια πέρατα. ʽΌμως δεν μπορούν να κατασκευαστούν. Άρα αν δεν εφαρμόζει η βάση ΒΓ επί την βάση ΕΖ δεν θα εφαρμόζουν και οι πλευρές ΒΑ, ΑΓ στις ΕΔ, ΔΖ. Όμως θα εφαρμόσουν. Άρα και η γωνία ΒΑΓ θα εφαρμόσει με την ΕΔΖ και θα είναι ίση με αυτήν.

Άρα εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές ίσες με δύο πλευρές αντίστοιχα και τη βάση με τη βάση ίση και τη γωνία θα έχουν ίση με την γωνία που περιέχεται από τις ίσες ευθείες. Ο. Ε. Δ.

Πρόταση 9

Να διχοτομηθεί δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.

Έστω η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία ΒΑΓ, τότε πρέπει να διχοτομηθεί.



Λαμβάνεται επί της ΑΒ τυχαίο σημείο το Δ και αφαιρείται από την ΑΓ η ΕΔ ίση με την ΑΔ. Και ενώνεται η ΔΕ και κατασκευάζεται επί την ΔΕ το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ. Και ενώνεται η ΑΖ. Λέγω ότι η ΒΑΓ γωνία θα διχοτομηθεί από την ευθεία ΑΖ.

Επειδή είναι ίση η ΑΔ με την ΑΕ και είναι κοινή η ΑΖ, οι δύο ΔΑ, ΑΖ είναι ίσες με τις ΕΑ, ΑΖ αντίστοιχα και η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΕΖ. Άρα η γωνία ΔΑΖ είναι ίση με την γωνία ΕΑΖ.

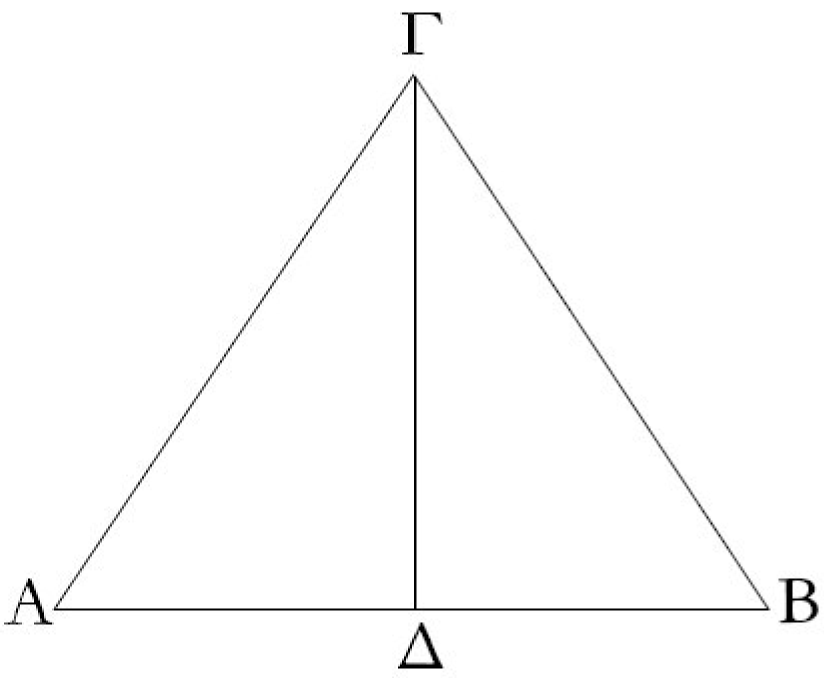
Άρα η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία ΒΑΓ έχει διχοτομηθεί από την ευθεία ΑΖ.

Ο. Ε Π.

Πρόταση 10

Να διχοτομηθεί δοθείσα πεπερασμένη ευθεία.

Έστω ΑΒ η δοθείσα πεπερασμένη ευθεία. Πρέπει να διχοτομηθεί η πεπερασμένη ευθεία ΑΒ.



Έχει κατασκευαστεί σε αυτήν το ισόπλευρο τμήμα ΑΒΓ και η γωνία ΑΓΒ έχει διχοτομηθεί από την ευθεία ΓΔ. Λέω ότι η ευθεία ΑΒ διχοτομείται στο σημείο Δ.

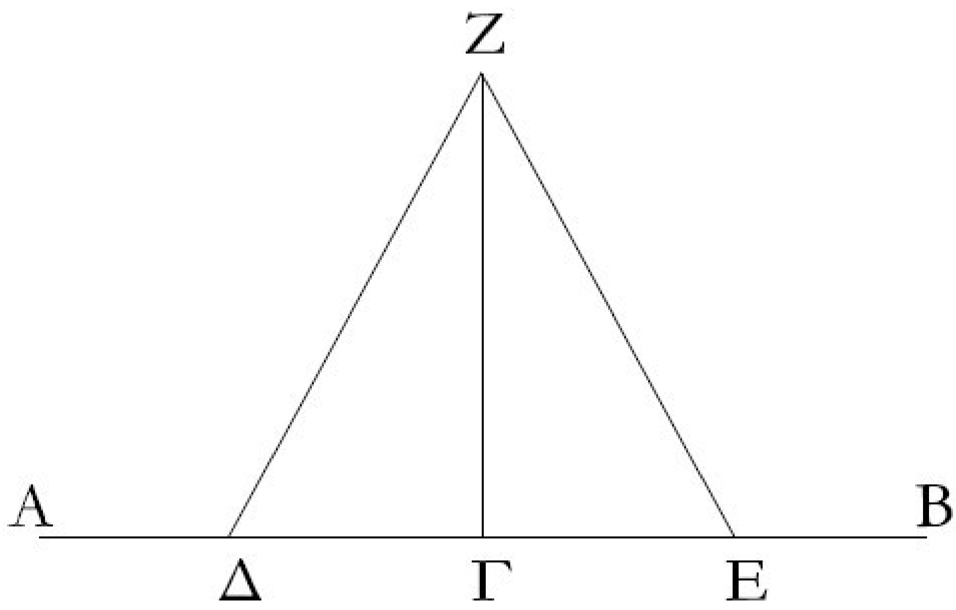
Επειδή η ΑΓ είναι ίση με την ΓΒ και είναι κοινή η ΓΔ, οι δύο ΑΓ, ΓΔ είναι ίσες με τις δύο ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Και η γωνία ΑΓΔ είναι ίση με την ΒΓΔ, άρα η βάση ΑΔ είναι ίση με την βάση ΒΔ.

Άρα η δοθείσα πεπερασμένη ευθεία ΑΒ διχοτομείται στο Δ. Ο. Ε. Π.

Πρόταση 11

Να αχθεί από δοθέν σημείο, μια ευθεία σε ορθή γωνία προς δοθείσα ευθεία.

Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία και Γ το δοθέν σημείο σε αυτήν. Πρέπει από το Γ σημείο να φέρουμε σε ορθή γωνία ευθεία με την ευθεία ΑΒ.



Λαμβάνεται επί την ΑΓ τυχαίο σημείο Δ και ας είναι η ΓΕ ίση με την ΓΔ και κατασκευάζεται επί της ΔΕ τρίγωνο ισόπλευρο το ΖΔΕ και ενώνεται η ΖΓ. Λέγω ότι η ευθεία γραμμή ΖΓ είναι σε ορθή γωνία με την δοθείσα ευθεία ΑΒ στο δοθέν σημείο Γ.

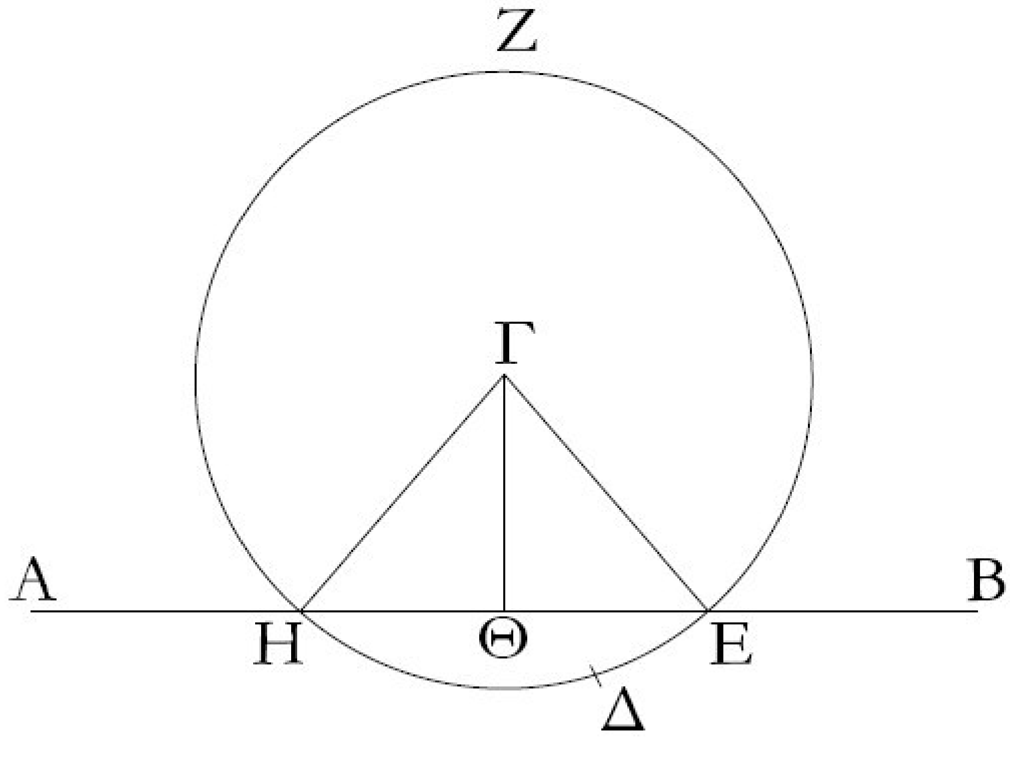
Επειδή είναι ίση η ΔΓ με την ΓΕ και κοινή η ΓΖ πρέπει οι ΔΓ, ΓΖ να είναι ίσες με τις ΕΓ, ΓΖ αντίστοιχα, και η βάση ΔΖ να είναι ίση με την βάση ΖΕ. Άρα η γωνία ΔΖΓ είναι ίση με την γωνία ΕΓΖ και είναι παρακείμενες. Και όταν μια ευθεία τοποθετείται έτσι ώστε εφεξής γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, καθεμία από τις ίσες γωνίες είναι ορθή. Άρα ορθή είναι καθεμία από τις ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Άρα στη δοθείσα ευθεία ΑΒ από το δοθέν σημείο Γ προς αυτήν άχθηκε η ΓΖ. Ο. Ε. Π.

Πρόταση 12

Να σχεδιαστεί κάθετη ευθεία επί δοθείσα άπειρη ευθεία, από δοθέν σημείο το οποίο δεν είναι πάνω σε αυτήν.

Έστω ΑΒ η άπειρη δοθείσα ευθεία και Γ το δοθέν σημείο το οποίο δεν είναι πάνω σε αυτήν. Πρέπει επί τη άπειρη δοθείσα ευθεία ΑΒ από το δοθέν σημείο Γ το οποίο δεν βρίσκεται σε αυτήν, να φέρουμε κάθετη ευθεία γραμμή.



Λαμβάνεται επί την άλλη πλευρά της ΑΒ ευθείας τυχαίο σημείο το Δ και κέντρο το Γ και διάστημα το ΓΔ. Γράφεται ο κύκλος ΕΖΗ. Και η ευθεία ΕΗ διχοτομείται στο Θ και συνδέονται οι ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ ευθείες. Λέγω ότι επί τη δοθείσα άπειρη ευθεία ΑΒ από ο δοθέν σημείο Γ το οποίο δεν βρίσκεται πάνω σε αυτήν, είναι κάθετη η ΓΘ.

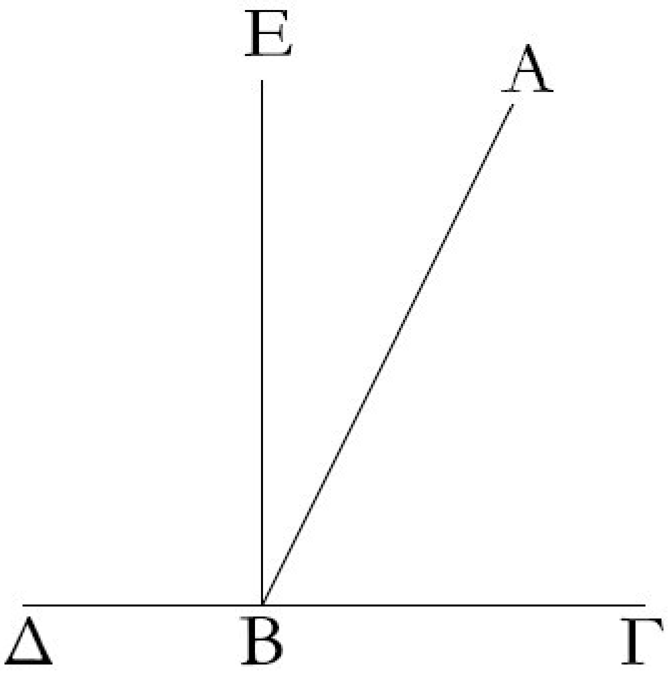
Επειδή η ΗΘ είναι ίση με την ΘΕ και είναι κοινή η ΘΓ, οι δύο ΗΘ, ΘΓ είναι ίσες με τις δύο ΕΘ, ΘΓ αντίστοιχα. Και η βάση ΓΗ είναι ίση με την βάση ΓΕ άρα η γωνία ΓΘΗ είναι ίση με την γωνία ΕΘΓ και είναι εφεξής. Και όταν ευθεία που τοποθετείται σε ευθεία δημιουργεί τις εφεξής γωνίες ίσες μεταξύ τους, καθεμία από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η ευθεία που τοποθετείται πάνω καλείται κάθετος σε αυτή που τοποθετείται.

Άρα επί τη δοθείσα άπειρη ευθεία ΑΒ από του δοθέντος σημείου Γ το οποίο δεν βρίσκεται πάνω σε αυτήν, άχθηκε η κάθετος ΓΘ. Ο. Ε. Π.

Πρόταση 13

Αν μια ευθεία τοποθετείται σε ευθεία και δημιουργεί γωνίες, τότε είτε οι γωνίες είναι ορθές ή το άθροισμα τους ίσο με δύο ορθές.

Διότι αν η ευθεία ΑΒ τοποθετηθεί στην ευθεία ΓΔ δημιουργεί τις ΓΒΑ, ΑΒΔ. Λέγω ότι οι γωνίες ΓΒΑ, ΑΒΔ είναι ορθές ή το άθροισμα τους είναι ίσο με δύο ορθές.



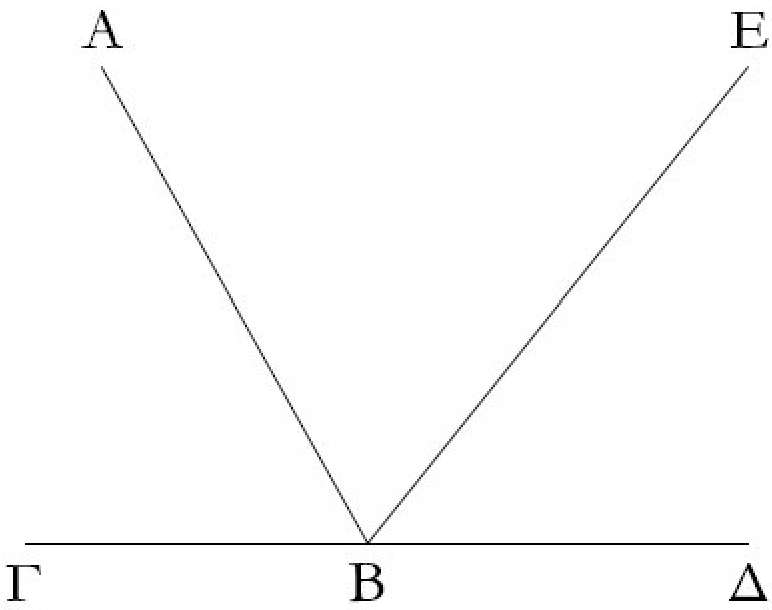
Αν η ΓΒΑ είναι ίση με την ΑΒΔ, τότε το άθροισμα τους είναι ίσο με δύο ορθές. Αν δεν είναι, άγεται από το σημείο Β σε ορθή γωνία με την ευθεία ΓΔ η ευθεία ΒΕ. Άρα το άθροισμα των ΓΒΕ, ΕΒΔ είναι δύο ορθές και εφόσον η ΓΒΕ είναι ίση με το άθροισμα των ΓΒΑ, ΑΒΕ προσθέτοντας την ΕΒΔ προκύπτει ότι το άθροισμα των ΓΒΕ, ΕΒΔ είναι ίσο με το άθροισμα των ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. Πάλι εφόσον η ΔΒΑ είναι ίση με το άθροισμα των ΔΒΕ, ΕΒΑ προσθέτοντας την ΑΒΓ. Άρα το άθροισμα των ΔΒΑ, ΑΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ και αποδείχτηκαν ίσες οι ΓΒΕ,ΕΒΔ με τις τρεις αυτές ίσες. Τα ίσα με αυτά είναι ίσα και μεταξύ τους και άρα η ΓΒΕ, ΕΒΔ είναι ίσες με τις ΔΒΑ, ΑΒΓ αλλά το άθροισμα των ΓΒΕ, ΕΒΔ είναι δύο ορθές και άρα το άθροισμα των ΔΒΑ, ΑΒΓ είναι ίσο με δύο ορθές.

Άρα αν λοιπόν μια ευθεία τοποθετείται σε μία ευθεία δημιουργεί γωνίες οι οποίες είναι είτε η καθεμία ορθή ή το άθροισμα τους ίσο με δύο ορθές. Ο. Ε. Δ.

Πρόταση 14

Εάν δύο ευθείες που δεν κείνται επί τα αυτά μέρη, προς κάποια ευθεία και σε κάποιο σημείο της κάνουν το άθροισμα των εφεξής γωνιών ίσο με δύο ορθές, τότε οι ευθείες βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Έστω ότι προς κάποια ευθεία ΑΒ και προς το σημείο της Β σε δύο ευθείες ΒΓ, ΒΔ που δεν κείνται επί τα αυτά μέρη κάνουν το άθροισμα των εφεξής γωνιών ΑΒΓ, ΑΒΔ ίσο με δύο ορθές.



Διότι αν η ΒΔ δεν ήταν στην ίδια ευθεία με την ΒΓ, έστω ότι η ΒΕ είναι στην ίδια ευθεία με την ΓΒ.

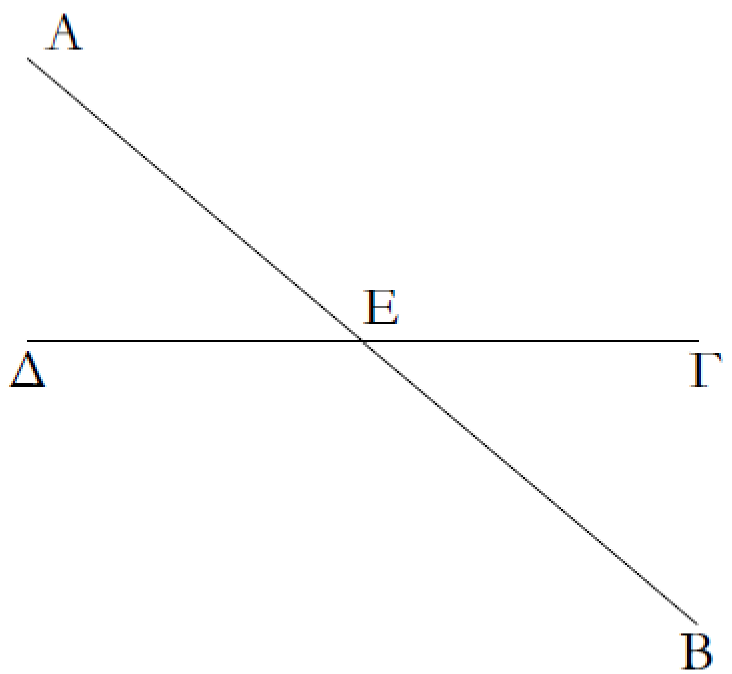
Επειδή η ευθεία ΑΒ βρίσκεται στην ευθεία ΓΒΕ, το άθροισμα των γωνιών ΑΒΓ και ΑΒΕ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα και το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα το άθροισμα των ΓΒΑ και ΑΒΕ είναι ίσο με το άθροισμα των ΓΒΑ και ΑΒΔ. Η κοινή ΓΒ αφαιρείται. Άρα η λοιπή ΑΒΕ είναι ίση με τη λοιπή ΑΒΔ, δηλαδή η μικρότερη με τη μεγαλύτερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Συνεπώς η ΒΕ δεν είναι στην ίδια ευθεία με την ΓΒ. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι καμία άλλη δεν υπάρχει εκτός της ΒΔ. Άρα η ΓΒ είναι σε ευθεία με την ΒΔ.

Άρα εάν δύο ευθείες δεν κείνται επί τα αυτά μέρη, προς κάποια ευθεία και σε κάποιο σημείο της κάνουν το άθροισμα των εφεξής γωνιών ίσο με δύο ορθές, τότε οι ευθείες βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Ο. Ε. Δ.

Πρόταση 15

Αν δύο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους, οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Έστω ότι οι δύο ευθείες ΑΒ, ΓΔ τέμνονται μεταξύ τους στο σημείο Ε. Ισχυρίζομαι ότι η γωνία ΑΕΓ είναι ίση με τη (γωνία) ΔΕΒ και η (γωνία) ΓΕΒ με την ΑΕΔ.



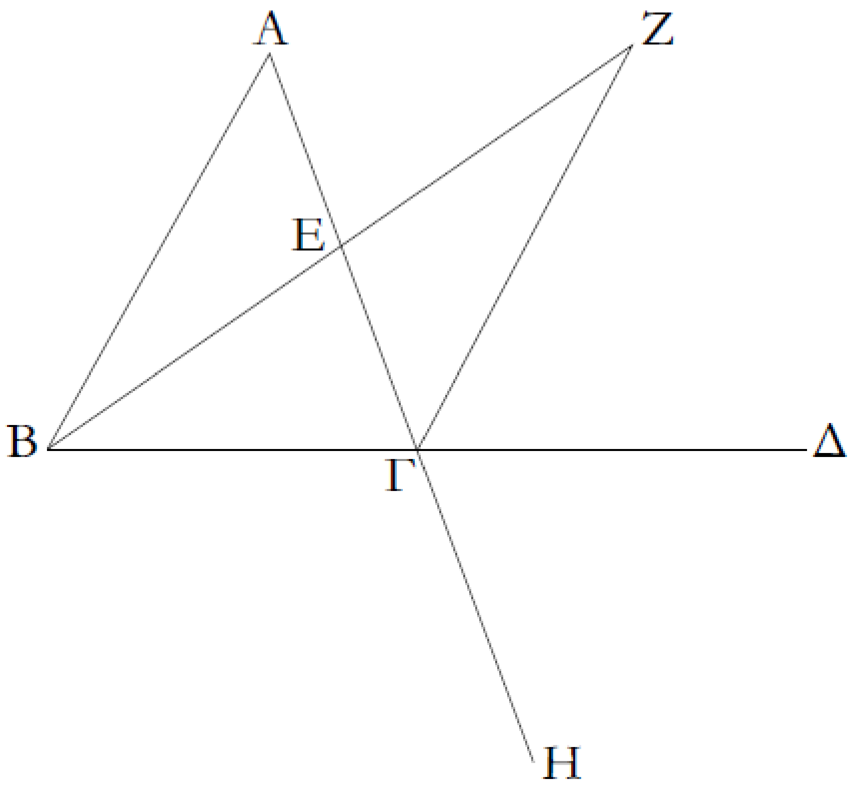
Επειδή η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΓΔ, δημιουργώντας τις γωνίες ΓΕΔ, ΑΕΔ, οι γωνίες ΓΕΔ ΑΕΔ (το άθροισμα) είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Ξανά, καθώς η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΑΒ δημιουργώντας τις γωνίες ΑΕΔ και ΔΕΒ, οι γωνίες ΑΕΔ και ΔΕΒ (το άθροισμα) είναι ίσες με δύο ορθές γωνίες. Αλλά, οι ΓΕΑ και ΑΕΔ γωνίες (άθροισμα) εδείχθησαν ίσες με δύο ορθές γωνίες . Κατ' αυτόν τον τρόπο, το άθροισμα ΓΕΑ και ΑΕΔ γωνιών είναι ίσο με το άθροισμα των ΑΕΔ και ΔΕΒ γωνιών. Έστω ότι η ΑΕΔ έχει αφαιρεθεί και από τις δύο. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το υπόλοιπο ΓΕΑ είναι ίσο με το υπόλοιπο ΒΕΔ. Ομοίως, μπορεί να δειχθεί ότι ΓΕΒ και ΔΕΑ είναι επίσης ίσες.

Άρα, εάν δύο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους, τότε δημιουργούν κατακορυφήν γωνίες ίσες μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 16

Σε κάθε τρίγωνο, όταν μια πλευρά παράγεται, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε εσωτερική και απέναντι γωνίες.

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, και έστω μια από τις πλευρές του, η ΒΓ, προεκταμένη στο Δ. Ισχυρίζομαι ότι η εξωτερική γωνία ΑΓΔ είναι μεγαλύτερη από την κάθε εσωτερική και απέναντι γωνίες ΓΒΑ και ΒΑΓ.



Έστω ότι η ΑΓ διχοτομείται στο Ε και συνδέεται η ΒΕ και προεκτείνεται η ευθεία στο Ζ. Και έστω η ΕΖ ίση με ΒΕ και συνδέεται η ΖΓ , και προεκτείνεται η ΑΓ στο Η.

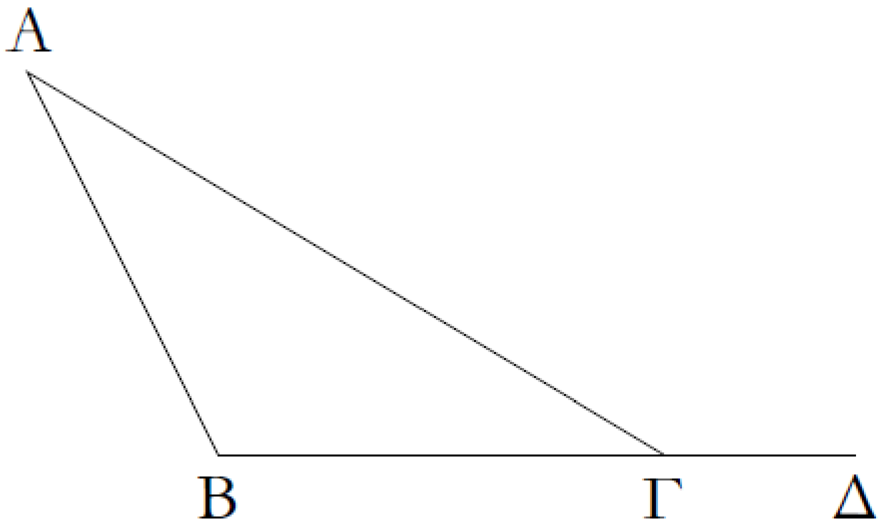
Γι’ αυτό, εφόσον η ΑΕ είναι ίση με ΕΓ και η ΒΕ με την ΕΒ, οι δύο (ευθείες) ΑΕ, ΕΒ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΓΕ, ΕΖ, αντίστοιχα. Επίσης, η γωνία ΑΕΒ είναι ίση με τη γωνία ΖΕΓ, ως κατακορυφήν. Άρα, η βάση ΑΒ είναι ίση με τη βάση ΖΓ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΖΕΓ και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες υποτείνονται οι ίσες πλευρές είναι ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες. Κατά συνέπεια, η ΒΑΕ είναι ίση με την ΕΓΖ. Αλλά η ΕΓΔ είναι μεγαλύτερη από την ΕΓΖ. Άρα η ΑΓΔ είναι μεγαλύτερη από την ΒΑΕ. Ομοίως, διχοτομώντας την ΒΓ, μπορεί να δειχθεί ότι η ΒΓΗ, ή αλλιώς η ΑΓΔ, είναι επίσης μεγαλύτερη από την ΑΒΓ.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο όταν μια πλευρά προεκτείνεται, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε εσωτερική και απέναντι γωνίες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 17

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα του συνδυασμού δυο οποιονδήποτε γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ. Λέγω ότι το άθροισμα του συνδυασμού δυο οποιονδήποτε γωνιών του ΑΒΓ είναι μικρότερο των δύο ορθών.



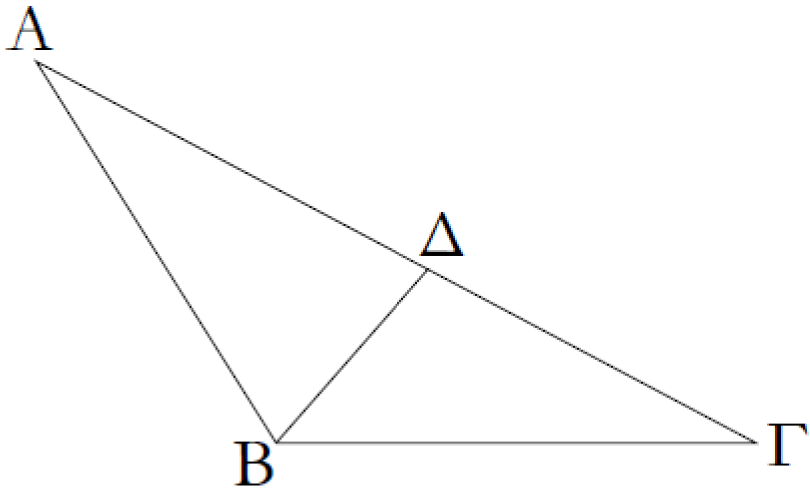
Έστω ότι η ΒΓ προεκτείνεται στο Δ. Και εφόσον η γωνία ΑΓΔ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΓ, είναι μεγαλύτερη από την εσωτερική και την απέναντι γωνία ΑΒΓ. Έστω ΑΓΒ έχει προστεθεί και στις δύο. Άρα το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι μεγαλύτερο του ΑΒΓ και ΒΓΑ. Αλλά, το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με δυο ορθές. Άλλα, το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΓΒ είναι μικρότερο των δύο ορθών. Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι το άθροισμα των ΒΑΓ και ΑΓΒ είναι επίσης μικρότερο των δύο ορθών. Παρόμοια για το άθροισμα των ΓΑΒ και ΑΒΓ.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο, *το άθροισμα του συνδυασμού δυο οποιονδήποτε γωνιών* είναι μικρότερο των δύο ορθών. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 18

Σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά υποτείνει στην μεγαλύτερη γωνία.

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο, έχοντας την πλευρά ΑΓ μεγαλύτερη από την ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι η γωνία ΑΒΓ είναι επίσης μεγαλύτερη από την ΒΓΑ.



Έστω ΑΓ μεγαλύτερη από ΑΒ και ΑΔ ίση με ΑΒ και συνδέεται η ΒΔ.

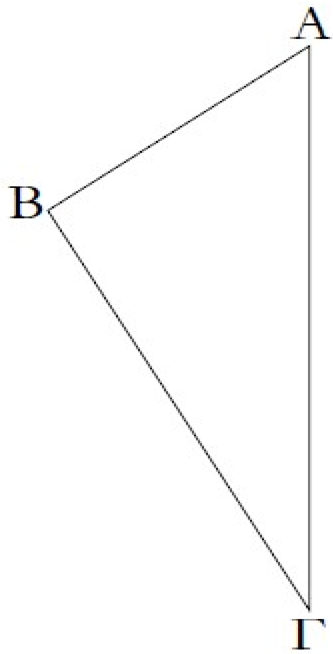
Εφόσον η γωνία ΑΔΒ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, είναι μεγαλύτερη από την εσωτερική και απέναντι γωνία ΔΓΒ. Αλλά ΑΔΒ είναι ίση με την ΑΒΔ, αφού η ΑΒ είναι επίσης ίση με την ΑΔ. Άρα ΑΒΔ είναι επίσης μεγαλύτερη από την ΑΓΒ. Ακόμη ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από την ΑΓΒ.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά υποτείνεται στην μεγαλύτερη γωνία. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 19

Σε κάθε τρίγωνο, από τη μεγαλύτερη γωνία, υποτείνει η μεγαλύτερη πλευρά.

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο έχοντας την γωνία ΑΒΓ μεγαλύτερη από την ΒΓΑ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ΑΓ είναι επίσης μεγαλύτερη από την πλευρά ΑΒ.



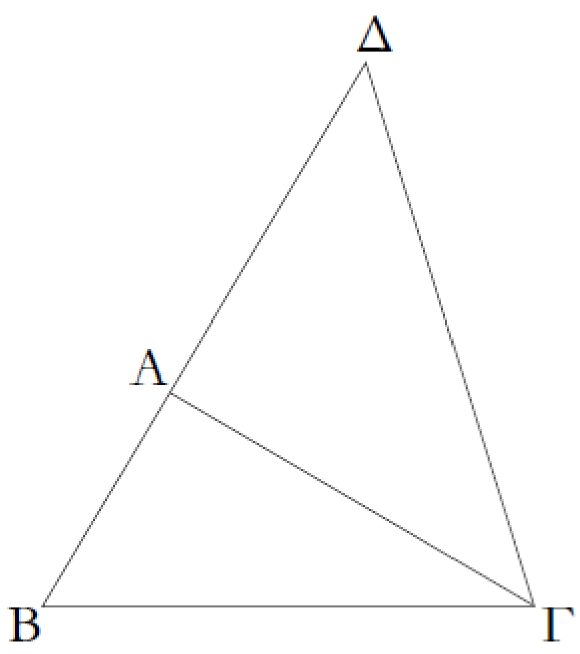
Αν δεν είναι, η ΑΓ είναι είτε ίση, είτε μεγαλύτερη της ΑΒ. Πράγματι, η ΑΓ δεν είναι ίση με την ΑΒ. Γιατί τότε η γωνία ΑΒΓ θα ήταν ίση της ΑΓΒ. Αλλά δεν είναι. Γι' αυτό η ΑΓ δεν είναι ίση της ΑΒ. Ούτε, είναι η ΑΓ μικρότερη της ΑΒ. Αλλά δείχτηκε ότι ούτε η ΑΓ είναι ίση με την ΑΒ. Άρα η ΑΓ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο από τη μεγαλύτερη γωνία υποτείνει η μεγαλύτερη πλευρά. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 20

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δυο οποιονδήποτε πλευρών είναι μεγαλύτερο από την λοιπή πλευρά.

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο. Λέγω ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα δύο πλευρών είναι μεγαλύτερο από την λοιπή πλευρά. Οπότε το άθροισμα ΒΑ και ΑΓ είναι μεγαλύτερο της ΒΓ, το άθροισμα των ΑΒ και ΒΓ είναι μεγαλύτερο της ΑΓ, το άθροισμα των ΒΓ και ΓΑ είναι μεγαλύτερο της ΑΒ.



Έστω ότι ΒΑ προεκτείνεται στο Δ, η ΑΔ είναι ίση της ΓΑ και συνδέεται η ΔΓ.

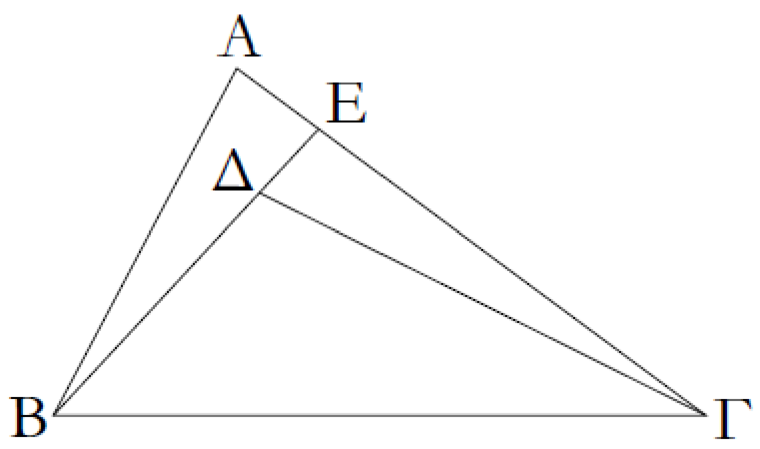
Άρα, αφού η ΔΑ είναι ίση της ΑΓ η γωνία ΑΔΓ είναι ίση της ΑΓΔ. Άρα, η ΒΓΔ είναι μεγαλύτερη της ΑΔΓ. Εφόσον το ΔΓΒ είναι ένα τρίγωνο που έχει την γωνία ΒΓΔ μεγαλύτερη της ΒΔΓ και αφού η μεγαλύτερη γωνία υποτείνεται στην μεγαλύτερη πλευρά, άρα η ΒΔ είναι μεγαλύτερη της ΒΓ. Αλλά ΔΑ είναι ίση της ΑΓ. Άρα, το άθροισμα ΒΑ και ΑΓ είναι μεγαλύτερο της ΒΓ. Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι ΑΒ και ΒΓ είναι μεγαλύτερο της ΓΑ, και ΒΓ και ΓΑ της ΑΒ.

Οπότε, σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δύο οποιονδήποτε πλευρών είναι μεγαλύτερο της λοιπής πλευράς. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 21

Εάν σε τρίγωνο δύο εσωτερικές ευθείες είναι κατασκευασμένες σε μια πλευρά του τριγώνου, από τα άκρα της, οι ευθείες είναι μικρότερες από τις δυο λοιπές πλευρές του τριγώνου, αλλά περικλείουν μεγαλύτερη γωνία.

Έστω οι δύο εσωτερικές ευθείες ΒΔ και ΔΓ κατασκευασμένες στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, από τα άκρα Β και Γ αντίστοιχα. Λέγω ότι το άθροισμα των ΒΔ και ΔΓ είναι μικρότερο από το άθροισμα των δυο λοιπών πλευρών του τριγώνου ΒΑ και ΑΓ, αλλά περικλείουν γωνία ΒΔΓ μεγαλύτερη από την ΒΑΓ.



Έστω ότι η ΒΔ προεκτείνεται στο Ε. Εφόσον σε ένα τρίγωνο το άθροισμα δυο πλευρών είναι μεγαλύτερο από την υπολειπόμενη, στο τρίγωνο ΑΒΕ το άθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΕ είναι μεγαλύτερο της ΒΕ. Έστω ότι προστίθεται ΕΓ και στις δυο. Άρα το άθροισμα ΒΑ και ΑΓ είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των ΒΕ και ΕΓ. Πάλι ,στο τρίγωνο ΓΕΔ το άθροισμα των πλευρών ΓΕ και ΕΔ είναι μεγαλύτερο της ΓΔ, έχοντας προσθέσει την ΔΒ και στις δύο. Οπότε το άθροισμα ΓΕ και ΕΒ είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των ΓΔ και ΔΒ. Αλλά, το άθροισμα των ΒΑ και ΑΓ δείχτηκε μεγαλύτερο του αθροίσματος των ΒΕ και ΕΓ. Άρα το άθροισμα ΒΑ και ΑΓ είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των ΒΔ και ΔΓ.

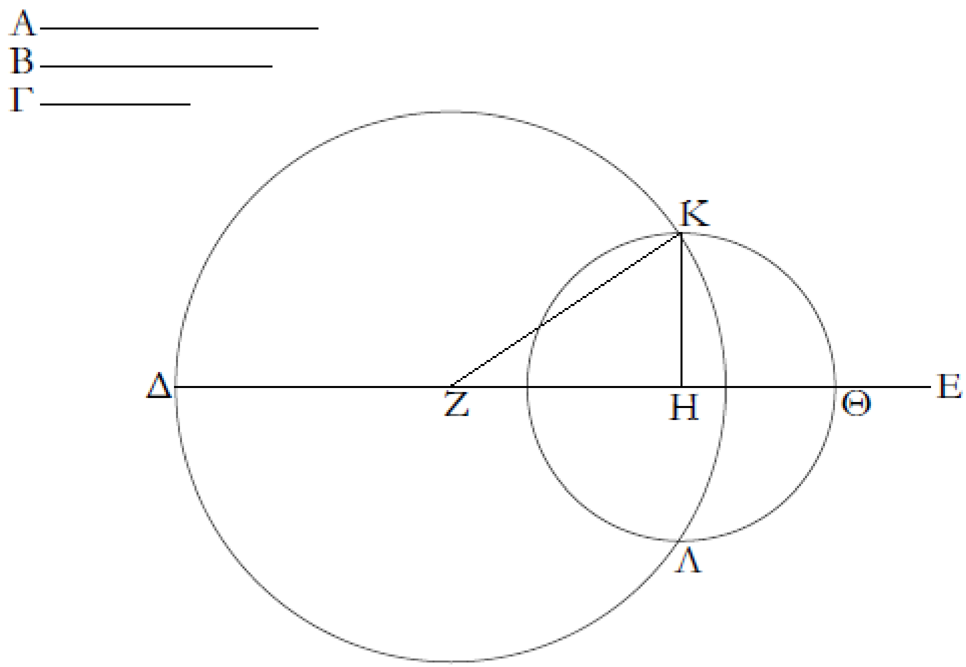
Πάλι, εφόσον σε ένα τρίγωνο η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από τις εσωτερικές και απέναντι γωνίες, στο τρίγωνο ΓΔΕ η εξωτερική γωνία ΒΔΓ είναι επομένως μεγαλύτερη της ΓΕΔ. Εξίσου, για τον ίδιο λόγο, η εξωτερική γωνία ΓΕΒ του τριγώνου ΑΒΕ είναι επίσης μεγαλύτερη της ΒΑΓ. Αλλά, η ΒΔΓ δείχτηκε μεγαλύτερη της ΓΕΒ. Κατά συνέπεια, ΒΔΓ είναι πολύ μεγαλύτερη της ΒΑΓ.

Οπότε, εάν δύο εσωτερικές ευθείες είναι κατασκευασμένες σε μια πλευρά ενός τριγώνου, από τα άκρα της, οι ευθείες είναι μικρότερες από τις δύο λοιπές πλευρές του τριγώνου, αλλά περικλείουν μεγαλύτερη γωνία. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 22

Για να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο από τρείς δοθείσες ευθείες, πρέπει το άθροισμα των δύο οποιονδήποτε ευθειών να είναι μεγαλύτερο από την λοιπή πλευρά, [σύμφωνα με το ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δυο οποιονδήποτε πλευρών είναι μεγαλύτερο από την λοιπή πλευρά.].

Έστω Α,Β,Γ οι τρείς δοσμένες ευθείες από τις οποίες το άθροισμα των δυο οποιονδήποτε ευθειών είναι μεγαλύτερο της λοιπής. Άρα, το άθροισμα των Α και Β *είναι μεγαλύτερο της Γ, των Α και Γ της Β και επίσης των Β και Γ της Α. Οπότε ζητείται να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο από ευθείες ίσες των Α,Β και Γ.*



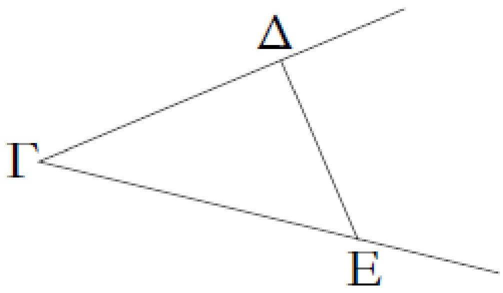
Έστω ορισμένη ευθεία ΔΕ, με άκρο το Δ και έστω ότι εκτείνεται στην κατεύθυνση του Ε απεριόριστα. Έστω ΔΖ ίση της Α, ΖΗ ίση της Β και ΗΘ ίση της Γ. Έστω ότι γράφεται κύκλος ΔΚΛ με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΔ. Ξανά, έστω ότι γράφεται κύκλος ΚΛΘ με κέντρο το Η και ακτίνα ΗΘ. Έστω ότι συνδέονται οι ΚΖ και ΚΗ. Λέγω ότι το τρίγωνο ΚΖΗ έχει κατασκευαστεί από τρείς ευθείες ίσες των Α, Β και Γ. Εφόσον το σημείο Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΔΚΛ, η ΖΔ είναι ίση της ΖΚ. Αλλά, ΖΔ είναι ίση της Άρα, ΚΖ είναι επίσης ίση της Α. Πάλι, εφόσον το σημείο Η είναι το κέντρο του κύκλου ΛΚΘ, η ΗΘ είναι ίση της ΗΚ. Αλλά, η ΗΘ είναι ίση της Γ. Οπότε ΚΗ είναι επίσης ίση της Γ και ΖΗ είναι επίσης ίση του Β. Άρα, οι τρείς ευθείες ΚΖ, ΖΗ και ΗΚ είναι ίσες των Α,Β,Γ αντίστοιχα.

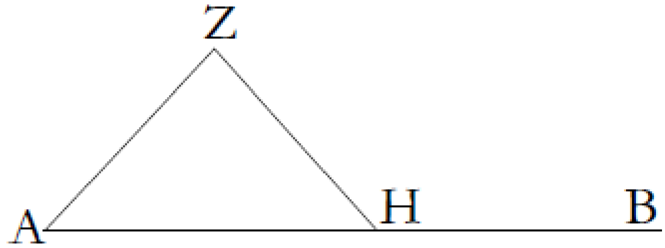
Άρα το τρίγωνο ΚΖΗ έχει κατασκευαστεί από τις τρείς ευθείες ΚΖ, ΖΗ και ΗΚ, που είναι ίσες των τριών δοσμένων ευθειών Α, Β, Γ αντίστοιχα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 23

Να κατασκευαστεί μια ευθύγραμμη γωνία ίση με μια δοσμένη ευθύγραμμη γωνία, σε ένα δεδομένο σημείο μιας δοθείσας ευθείας.

Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία, Α το δοθέν σημείο πάνω της και ΔΓΕ η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Οπότε ζητείται να κατασκευαστεί μια ευθύγραμμη γωνία ίση της ευθύγραμμης γωνίας ΔΓΕ στο δοθέν σημείο Α της δοθείσας ευθείας ΑΒ.





Έστω τα σημεία Δ και Ε τυχαία επάνω στις ευθείες ΓΔ και ΓΕ αντίστοιχα και έστω ότι συνδέεται η ΔΕ. Έστω το τρίγωνο ΑΖΗ κατασκευασμένο από τρείς ευθείες που είναι ίσες με τις ΓΔ, ΔΕ και ΓΕ, όντας έτσι ΓΔ είναι ίση της ΑΖ, ΓΕ της ΑΗ και συνεχίζοντας ΔΕ της ΖΗ.

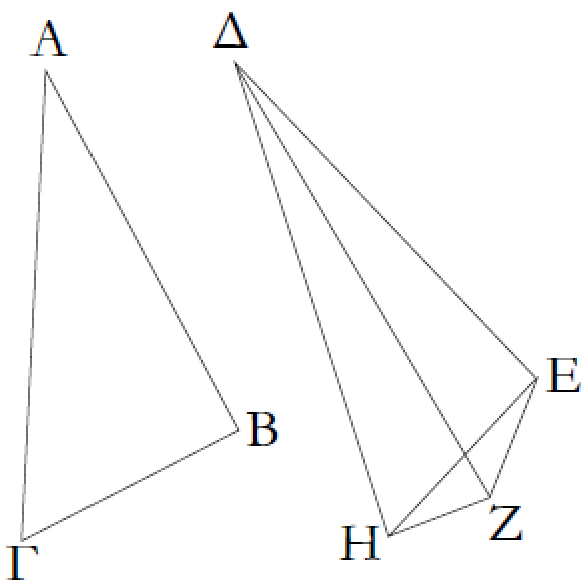
Άρα εφόσον οι δυο ευθείες ΔΓ, ΓΕ είναι ίσες με τις ευθείες ΖΑ , ΑΗ αντίστοιχα και η βάση ΔΕ είναι ίση με τη βάση ΖΗ, η γωνία ΔΓΕ είναι άρα ίση με τη γωνία ΖΑΗ.

Άρα, η ευθύγραμμη γωνία ΖΑΗ είναι ίση με την δοθείσα ευθύγραμμη γωνία ΔΓΕ, και έχει κατασκευαστεί στο δοθέν σημείο Α της δοθείσας ευθείας ΑΒ. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 24

Εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο ίσες πλευρές με δύο ίσες πλευρές αντίστοιχα, αλλά το ένα έχει την περιεχόμενη από τις ίσες ευθείες γωνία μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία του άλλου, τότε το πρώτο τρίγωνο θα έχει βάση μεγαλύτερη από τη βάση του άλλου.

Έστω ΑΒΓ και ΔΕΖ δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ΑΒ και ΑΓ ίσες με τις δύο πλευρές ΔΕ και ΔΖ αντίστοιχα. Δηλαδή η ΑΒ είναι ίση με την ΔΕ και η ΑΓ με την ΔΖ. Έστω επίσης να έχουν τη γωνία στο Α μεγαλύτερη από τη γωνία στο Δ. Λέγω ότι η βάση ΒΓ είναι επίσης μεγαλύτερη από τη βάση ΕΖ.



Δεδομένου ότι η γωνία ΒΑΓ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ΕΔΖ, έστω ότι η γωνία ΕΔΗ, που έχει κατασκευαστεί στο σημείο Δ της ευθείας ΔΕ, είναι ίση με τη γωνία ΒΑΓ. Έστω ότι η ΔΗ είναι ίση είτε με την ΑΓ είτε με την ΔΖ και συνδέονται οι ΕΗ και ΖΗ.

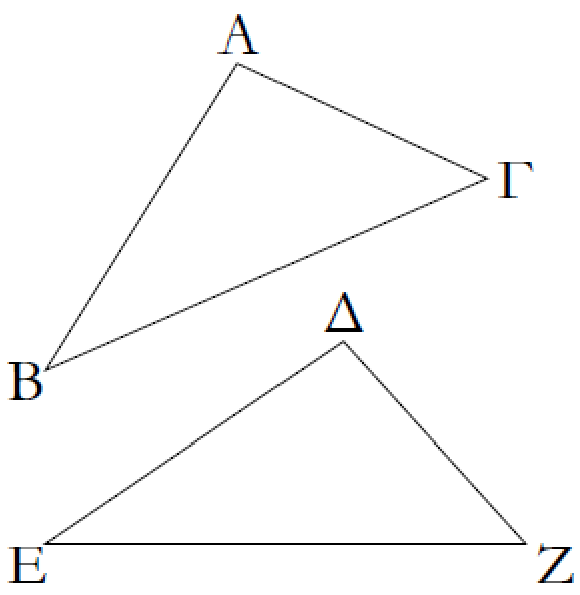
Άρα, εφόσον η ΑΒ είναι ίση με την ΔΕ και η ΑΓ με την ΔΗ, οι δύο ευθείες ΒΑ, ΑΓ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΕΔ, ΔΗ αντίστοιχα. Ακόμη η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΕΑΓ. Οπότε, η βάση ΒΓ είναι ίση με τη βάση ΕΗ. Πάλι εφόσον ΔΖ είναι ίση με ΔΗ, η γωνία ΔΗΖ είναι επίσης ίση με την γωνία ΔΖΗ. Άρα η ΔΗΖ είναι μεγαλύτερη από την ΕΗΖ. Επομένως, η ΕΖΗ είναι μεγαλύτερη από την ΕΗΖ. Και αφού το τρίγωνο ΕΖΗ έχει γωνία ΕΖΗ μεγαλύτερη από την ΕΗΖ, και η μεγαλύτερη γωνία υποτείνεται από την μεγαλύτερη πλευρά, η πλευρά ΕΗ είναι επίσης μεγαλύτερη από την ΕΗ. Αλλά ΕΗ είναι μεγαλύτερη της ΒΓ. Οπότε, ΒΓ είναι επίσης μεγαλύτερη από την ΕΖ.

Άρα εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες, αλλά στο ένα η γωνία που περιέχεται από τις ίσες ευθείες είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία του άλλου, τότε θα έχει επίσης βάση μεγαλύτερη από τη βάση του άλλου. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 25

Εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες, αλλά το ένα έχει βάση μεγαλύτερη από τη βάση του άλλου, τότε το πρώτο τρίγωνο επίσης θα έχει την γωνία που περιέχεται στις ίσες ευθείες μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία στου άλλου.

Έστω ΑΒΓ και ΔΕΖ δύο τρίγωνα που έχουν τις δύο πλευρές ΑΒ και ΑΓ ίσες με τις δύο πλευρές ΔΕ και ΔΖ, αντίστοιχα. Δηλαδή ΑΒ ίση με ΔΕ και ΑΓ με ΔΖ. Έστω η βάση ΒΓ μεγαλύτερη από τη βάση ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι η γωνία ΒΑΓ είναι επίσης μεγαλύτερη από την ΕΔΖ.



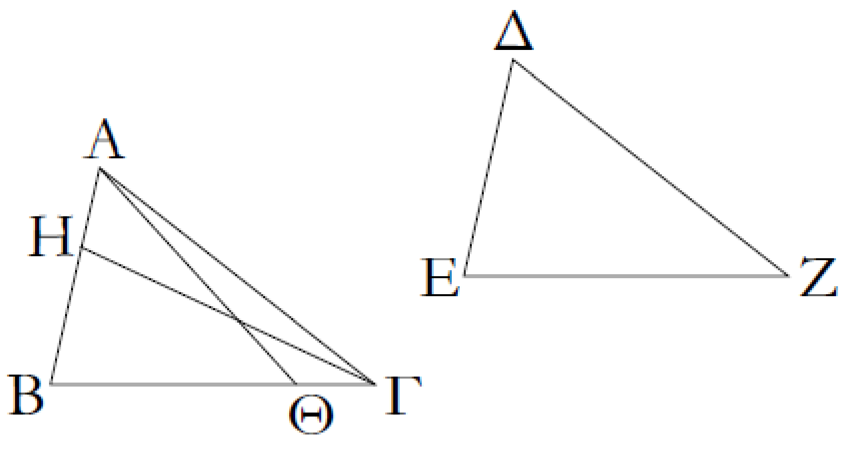
Εάν όχι, τότε η ΒΑΓ είναι σίγουρα είτε ίση είτε μικρότερη από την ΕΔΖ. Πράγματι, ΒΑΓ δεν είναι ίση με την ΕΔΖ. Διότι τότε η βάση ΒΓ θα ήταν επίσης ίση με τη βάση ΕΖ, αλλά δεν είναι. Άρα η γωνία ΒΑΓ δεν είναι ίση με την ΕΔΖ. Πράγματι, ούτε η ΒΑΓ είναι μικρότερη από την ΕΔΖ. Διότι τότε η βάση ΒΓ θα ήταν επίσης μικρότερη από τη βάση ΕΖ, αλλά δεν είναι. Οπότε η γωνία ΒΑΓ δεν είναι μικρότερη από την ΕΔΖ. Αλλά δείχτηκε ότι η ΒΑΓ δεν είναι ίση ούτε με την ΕΔΖ. Άρα η ΒΑΓ είναι μεγαλύτερη από την ΕΔΖ.

Άρα, εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές ίσες αντίστοιχα, αλλά το ένα έχει βάση μεγαλύτερη από τη βάση του άλλου, τότε το πρώτο τρίγωνο θα έχει την γωνία που περιέχεται από τις ίσες ευθείες μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία του άλλου. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 26

Εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες, και μια πλευρά αντίστοιχα ίση, (για την ακρίβεια, είτε αυτή που είναι ανάμεσα από τις ίσες γωνίες είτε αυτή που υποτείνεται από μια από τις ίσες γωνίες) τότε τα τρίγωνα θα έχουν επίσης τις λοιπές πλευρές αντίστοιχα ίσες, και τη λοιπή γωνία αντίστοιχα ίση.

Έστω ΑΒΓ και ΔΕΖ δύο τρίγωνα που έχουν τις δύο γωνίες ΑΒΓ και ΔΓΑ ίσες με τις δύο γωνίες ΔΕΖ και ΕΖΔ, αντίστοιχα. Δηλαδή, ότι ΑΒΓ ίση με την ΔΕΖ και ΔΓΑ με ΕΖΔ. Έστω επίσης ότι έχουν μια πλευρά ίση με μια πλευρά. Ας είναι η πλευρά ανάμεσα στις ίσες γωνίες, δηλαδή η ΒΓ είναι ίση με την ΕΖ. Λέγω ότι θα έχουν τις λοιπές πλευρές ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές πλευρές. Δηλαδή, η ΑΒ είναι ίση με ΔΕ και η ΑΓ ίση με την ΔΖ. Και θα έχουν την λοιπή γωνία ίση με την λοιπή γωνία. Δηλαδή, τη ΒΑΓ ίση με την ΕΔΖ.



Εάν ΑΒ δεν είναι ίση με την ΔΕ τότε μια από αυτές είναι μεγαλύτερη. Έστω ΑΒ να είναι μεγαλύτερη και έστω ΒΓ να είναι ίση με την ΔΕ και συνδέεται η ΗΓ.

Άρα, εφόσον ΒΗ είναι ίση με την ΔΕ και ΔΓ με ΕΖ, οι δύο ευθείες ΗΒ, ΒΓ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΔΕ, ΕΖ αντίστοιχα. Και η γωνία ΗΒΓ είναι ίση με τη γωνία ΔΕΖ. Οπότε η βάση ΒΓ είναι ίση με τη βάση ΔΖ και το τρίγωνο ΗΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ και οι λοιπές γωνίες που υποτείνονται στις ίσες πλευρές θα είναι ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες. Άρα, ΗΓΒ είναι ίση με ΔΖΕ. Αλλά ΔΖΕ υποτίθεται ότι είναι ίση με την ΒΓΑ. Άρα ΒΓΗ είναι επίσης ίση με την ΒΓΑ, δηλαδή η μικρότερη με τη μεγαλύτερη, το οποίο είναι άτοπο. Άρα οι ΑΒ,ΔΕ δεν είναι άνισες, άρα είναι ίσες. Και η ΒΓ είναι επίσης ίση με την ΕΖ. Οπότε, οι δύο ευθείες ΑΒ, ΒΓ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΔΕ, ΕΖ, αντίστοιχα. Και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με τη γωνία ΔΕΖ. Άρα, η βάση ΑΓ είναι ίση με τη βάση ΔΖ και η λοιπή γωνία ΒΗΓ είναι ίση με την λοιπή γωνία ΕΔΖ.

Αλλά, πάλι, έστω ότι οι δύο πλευρές που υποτείνονται απ’ τις δύο ίσες γωνίες είναι ίσες: για παράδειγμα, έστω ΑΒ ίση με ΔΕ. Πάλι, λέγω ότι οι λοιπές πλευρές είναι ίσες με τις λοιπές πλευρές. Δηλαδή, η ΑΓ ίση με την ΔΖ και η ΒΓ με την ΕΖ. Συνεχίζοντας, η λοιπή γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την λοιπή γωνία ΕΔΖ.

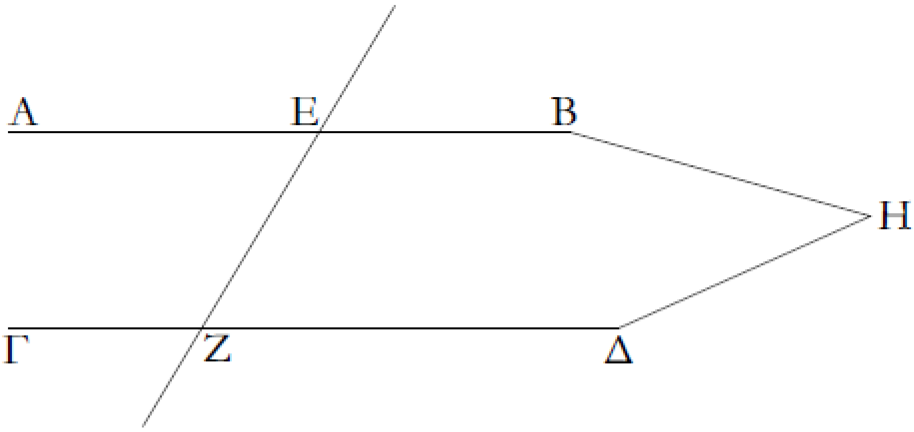
Εάν οι ΒΓ,ΕΖ είναι άνισες τότε μια από αυτές θα είναι μεγαλύτερη. Εάν γίνεται, έστω ΒΓ μεγαλύτερη. Η ΒΘ είναι ίση με την ΕΖ και συνδέεται η ΑΘ. Εφόσον η ΒΘ είναι ίση με ΕΖ και ΑΒ με ΔΕ, οι δύο ευθείες ΑΒ, ΒΘ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΔΕ, ΕΖ, αντίστοιχα, και οι γωνίες που περιέχουν είναι επίσης ίσες. Άρα η βάση ΑΘ είναι ίση με τη βάση ΔΖ και το τρίγωνο ΑΒΘ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ και οι λοιπές γωνίες που υποτείνουν στις ίσες πλευρές θα είναι ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες. Άρα η γωνία ΒΘΑ είναι ίση με την ΕΖΔ. Αλλά, η ΕΖΔ είναι ίση με την ΒΓΑ. Οπότε στο τρίγωνο ΑΘΓ η εξωτερική γωνία ΒΘΑ είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΒΓΑ, πράγμα που είναι αδύνατο. Άρα η ΒΓ,ΕΖ δεν είναι άνισες, κατά συνέπεια είναι ίσες. Και ΑΒ είναι επίσης ίση με ΔΕ. Οπότε οι δύο ευθείες ΑΒ, ΒΓ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΔΕ, ΕΖ, αντίστοιχα, και περιέχουν ίσες γωνίες. Άρα η βάση ΑΓ είναι ίση με τη βάση ΔΖ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ και η λοιπή γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την λοιπή γωνία ΕΔΖ.

Άρα, εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες, και μια αντίστοιχη πλευρά ίση, (για την ακρίβεια, είτε αυτή που είναι ανάμεσα από τις ίσες γωνίες είτε αυτή που υποτείνεται από μια από τις ίσες γωνίες) τότε τα τρίγωνα θα έχουν επίσης τις λοιπές πλευρές αντίστοιχα ίσες, και την λοιπή γωνία ίση με την λοιπή γωνία. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 27

Εάν μια ευθεία εμπίπτει σε δύο ευθείες έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Έστω ότι η ευθεία ΕΖ εμπίπτει στις ευθείες ΑΒ και ΓΔ και φτιάχνει εναλλάξ γωνίες ΑΕΖ και ΕΖΔ ίσες μεταξύ τους. Λέγω ότι οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.



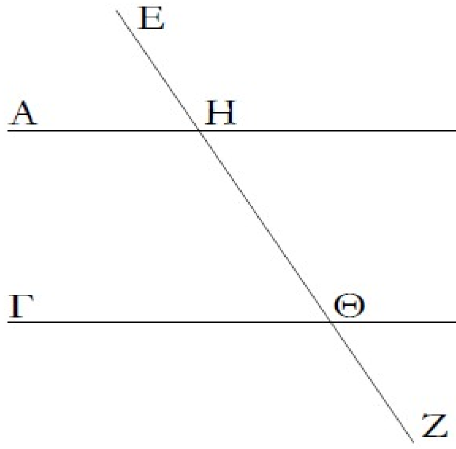
Εάν δεν είναι, καθώς προεκτείνονται οι ΑΒ και ΓΔ θα συναντηθούν : είτε στο μέρος των Β και Δ είτε στο μέρος των Α και Γ. Έστω ότι έχουν προεκταθεί και έχουν συναντηθεί στο μέρος των Β και Δ στο σημείο Η. Οπότε, στο τρίγωνο ΗΕΖ η εξωτερική γωνία ΑΕΖ είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι ΕΖΗ, πράγμα που είναι άτοπο. Άρα, προεκταμένες οι ΑΒ και ΓΔ δεν θα συναντηθούν στο μέρος των Β και Δ. Ομοίως μπορεί να δειχτεί ότι ούτε θα συναντηθούν στο μέρος των Α και Γ. Αλλά, ευθείες που δεν συναντώνται στο ίδιο μέρος είναι παράλληλες.

Άρα, εάν μια ευθεία που εμπίπτει σε δύο ευθείες έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες είναι όσες, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 28

Εάν μια ευθεία εμπίπτει σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες μεταξύ του, ή το άθροισμα των εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Έστω ότι η ΕΖ εμπίπτει στις δύο ευθείες ΑΒ και ΓΔ, ώστε η εξωτερική γωνία ΕΗΒ να είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΗΘΔ, ή έτσι ώστε το άθροισμα των *εσωτερικών γωνιών στο ίδιο μέρος, ΒΗΘ και ΗΘΔ, να είναι ίσο με δύο ορθές. Λέγω ότι η ΑΒ είναι παράλληλο με την ΓΔ.*



Εφόσον, (στην πρώτη περίπτωση) η ΕΗΒ είναι ίση με την ΗΘΔ, αλλά η ΕΗΒ είναι ίση με την ΑΗΘ, όπου ΑΗΘ είναι ίση της ΗΘΔ και είναι εναλλάξ γωνίες. Οπότε, η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.

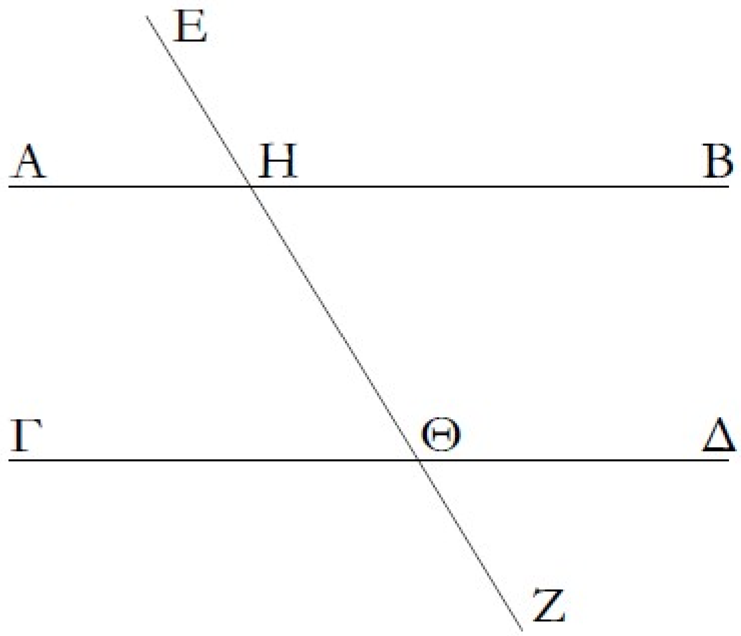
Πάλι, εφόσον (στην δεύτερη περίπτωση) το άθροισμα των ΒΗΘ και ΗΘΔ είναι ίσο με δύο ορθές και το άθροισμα των ΑΗΘ και ΒΗΘ είναι επίσης ίσο με δύο ορθές, το άθροισμα των ΑΗΘ και ΒΗΘ είναι άρα ίσο με το άθροισμα των ΒΗΘ και ΗΘΔ. Έστω η ΒΗΘ να έχει αφαιρεθεί και από τα δύο αθροίσματα, άρα το υπόλοιπο ΑΗΘ είναι ίσο με το υπόλοιπο ΗΘΔ και είναι εναλλάξ γωνίες. Άρα η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ.

Άρα, εάν μια ευθεία εμπίπτει σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες μεταξύ του, ή το άθροισμα των εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 29

Η ευθεία που εμπίπτει σε δύο παράλληλες ευθείες κάνει τις εναλλάξ γωνίες ίσες και τις εντός και την εκτός με την εντός και απέναντι ίσες και το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές.

Διότι έστω ότι η ευθεία ΕΖ εμπίπτει στις παράλληλες ευθείες ΑΒ,ΓΔ. Λέγω ότι κάνει τις εναλλάξ γωνίες ΑΗΘ,ΗΘΔ ίσες και την εκτός γωνία ΕΗΒ ίση με την εντός και απέναντι γωνία ΗΘΔ και το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δυο ορθές.



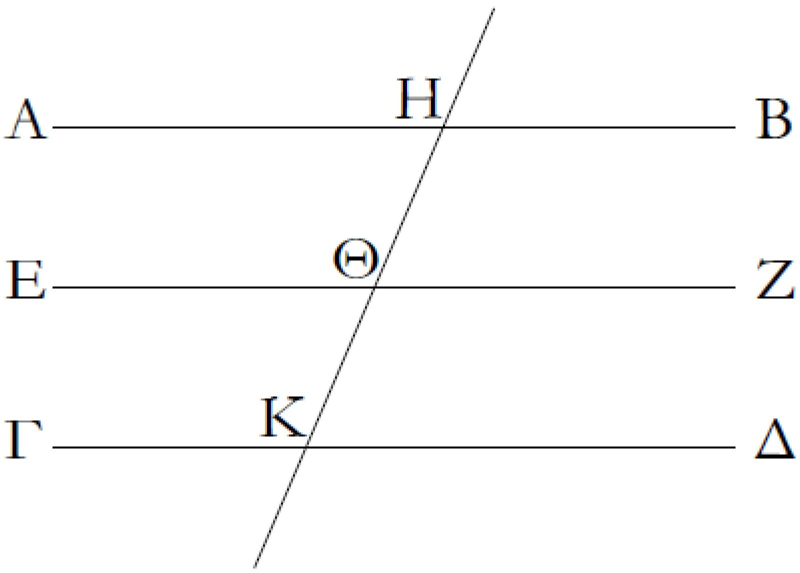
Εάν οι ΑΗΘ, ΗΘΔ είναι άνισες, τότε μια από αυτές είναι μεγαλύτερη. Έστω η ΑΗΘ μεγαλύτερη της ΗΘΔ. Έστω ότι η ΒΗΘ έχει προστεθεί και στις δύο. Κατά συνέπεια το άθροισμα των ΑΗΘ και ΒΗΘ είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος ΒΗΘ και ΗΘΔ. Αλλά, το άθροισμα των ΑΗΘ και ΒΗΘ είναι ίσο με δύο ορθές. Οπότε, το άθροισμα ΒΗΘ και ΗΘΔ είναι μικρότερο από δύο ορθές. Όμως, απείρως προεκτεινόμενες ευθείες όπου το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές, συναντώνται. Άρα οι ΑΒ και ΓΔ απείρως προεκτεινόμενες θα συναντηθούν. Αλλά, δεν θα συναντηθούν αφού πρωτύτερα έχουν θεωρηθεί παράλληλες. Οπότε οι ΑΗΘ, ΗΘΔ δεν είναι άνισες, άρα η ΕΗΒ είναι ίση με την ΗΘΔ. Έστω η ΒΗΘ προστιθέμενη και στις δύο. Άρα, το άθροισμα των ΕΗΒ και ΒΗΘ είναι ίσο άθροισμα των ΒΗΘ και ΗΘΔ. Αλλά το άθροισμα ΕΗΒ και ΒΗΘ είναι ίσο με δύο ορθές. Οπότε το άθροισμα ΒΗΘ και ΗΘΔ είναι επίσης ίσο με δύο ορθές.

Άρα, *η ευθεία που εμπίπτει σε δύο παράλληλες ευθείες κάνει τις εναλλάξ γωνίες ίσες και τις εντός και την εκτός με την εντός και απέναντι ίσες και το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές*. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 30

Ευθείες παράλληλες στην ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Έστω κάθε μια από τις ευθείες ΑΒ και ΓΔ να είναι παράλληλες με την ΕΖ. Λέγω ότι ΑΒ είναι επίσης παράλληλη με την ΓΔ.



Έστω ότι η ευθεία ΗΚ εμπίπτει στις ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ.

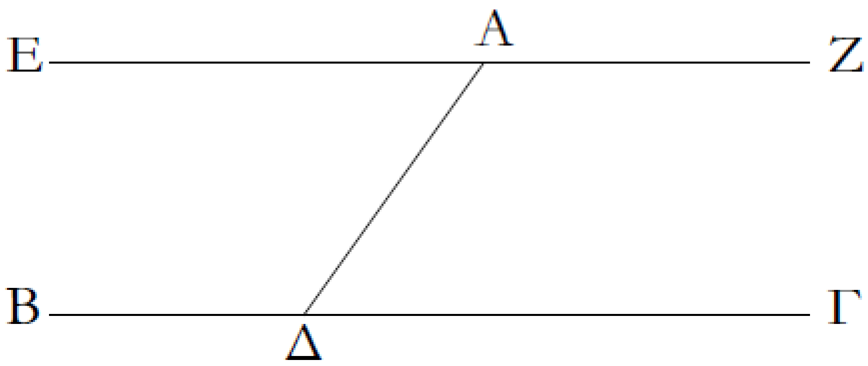
Εφόσον η ευθεία ΗΘ έχει εμπέσει στις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΕΖ, η γωνία ΑΗΚ είναι ίση με την ΗΘΖ. Πάλι, εφόσον η ευθεία ΗΚ έχει εμπέσει στις παράλληλες ΕΖ και ΓΔ, η γωνία ΗΘΖ είναι ίση με την ΗΚΔ. Αλλά, η ΑΗΚ δείχτηκε ίση με την ΗΘΖ και είναι εναλλάξ γωνίες. Άρα η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ.

Άρα ευθείες παράλληλες στην ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 31

Να αχθεί μια ευθεία παράλληλη σε δεδομένη ευθεία, από ένα δεδομένο σημείο.

Έστω Α το δοθέν σημείο και ΒΓ η δοθείσα ευθεία. Οπότε ζητείται να αχθεί μια ευθεία παράλληλη στην ευθεία ΒΓ, από το σημείο Α.



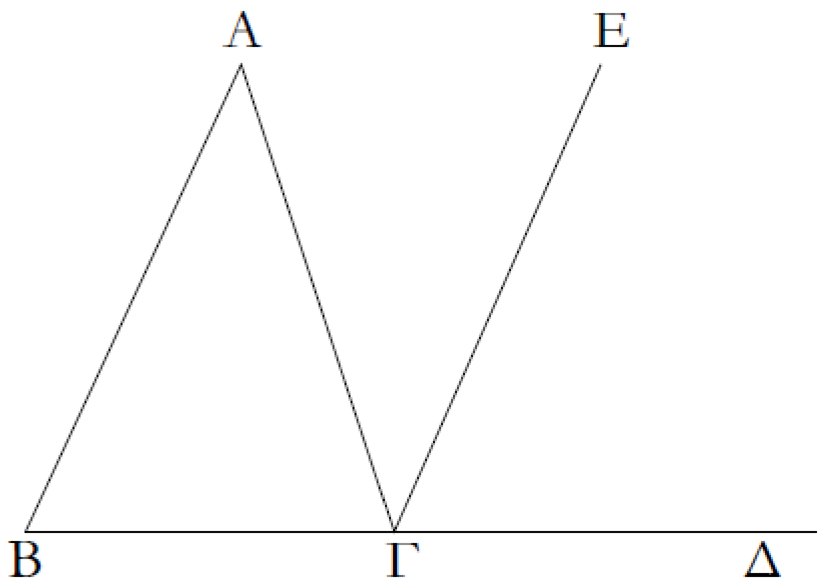
Έστω τυχαίο σημείο Δ του ΒΓ και συνδέεται το ΑΔ. Έστω ότι η γωνία ΔΑΕ, ίση της γωνίας ΑΔΓ, να έχει κατασκευαστεί πάνω στην ευθεία ΔΑ στο σημείο Α. Έστω η ευθεία ΑΖ να έχει ενωθεί με την ευθεία ΕΑ. Εφόσον η ευθεία ΑΔ εμπίπτει στις ευθείες ΒΓ και ΕΖ έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες ΕΑΔ και ΑΔΓ να είναι ίσες μεταξύ τους, η ΕΑΖ είναι άρα παράλληλη με την ΒΓ.

Άρα, η ευθεία ΕΑΖ φέρθηκε παράλληλη στην δεδομένη ευθεία ΒΓ, από το δεδομένο σημείο Α. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 32

Σε κάθε τρίγωνο εάν μια πλευρά προεκταθεί, τότε η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Έστω τρίγωνο το ΑΒΓ, και έστω ότι η μία πλευρά του ΒΓ προεκτείνεται επί το Δ. Λέγω ότι η εξωτερική γωνία ΑΓΔ είναι ίση με το άθροισμα των δυο εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΓΑΒ και ΑΒΓ, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ,ΒΓΑ και ΓΑΒ είναι ίσο με δύο ορθές.



Ας αχθεί από το σημείο Γ ευθεία ΓΕ παράλληλη στην ΑΒ.

Εφόσον η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΕ και η ΑΓ έχει εμπέσει σ’ αυτές, οι εναλλάξ γωνίες ΒΑΓ και ΑΓΕ είναι ίσες μεταξύ τους. Πάλι εφόσον η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΕ και η ευθεία ΒΔ έχει εμπέσει σε αυτές, η εξωτερική γωνία ΕΓΔ είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΑΒΓ. Αλλά η ΑΓΕ δείχτηκε ίση με την ΒΑΓ. Άρα, όλη η γωνία ΑΓΔ είναι ίση με το άθροισμα των δύο εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΒΑΓ και ΑΒΓ.

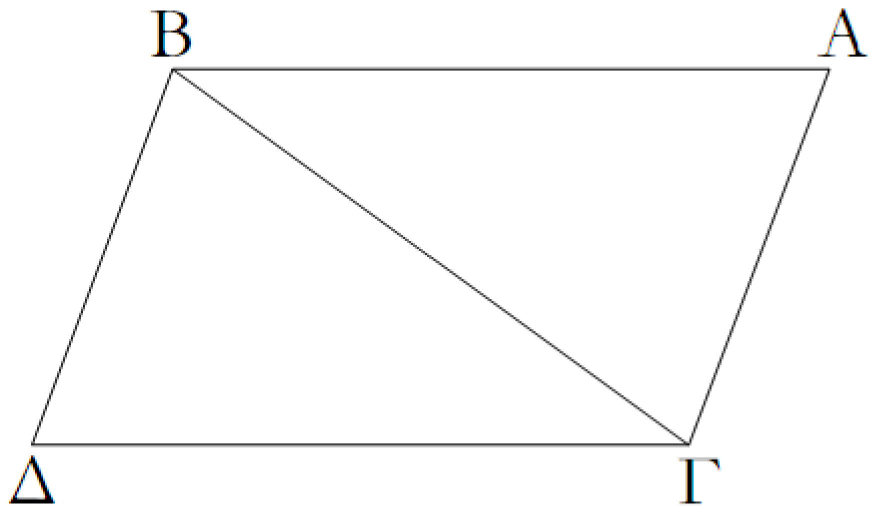
Έστω ότι η ΑΓΒ έχει προστεθεί και στις δύο. Άρα, το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τριών γωνιών ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Αλλά το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα το άθροισμα των ΑΓΒ, ΓΒΑ και ΓΑΒ είναι επίσης ίσο με δύο ορθές.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο εάν μια πλευρά προεκταθεί, τότε η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 33

Ευθείες που διέρχονται από ίσες και παράλληλες ευθείες επί τα αυτά μέρη είναι ίσες και παράλληλες μεταξύ τους.

Έστω ΑΒ και ΓΔ ίσες και παράλληλες ευθείες και έστω ότι οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τις συνδέουν. Λέγω ότι οι ΑΓ, ΒΔ είναι επίσης ίσες και παράλληλες.

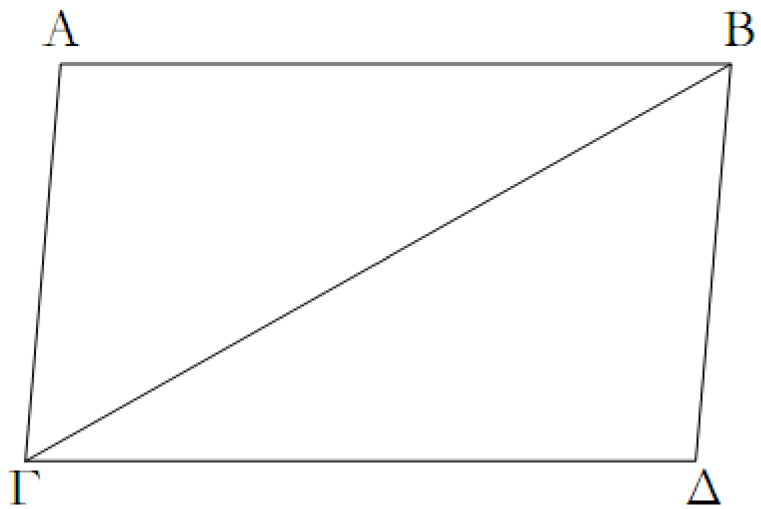


Συνδέεται η ΒΓ. Και επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη στη ΓΔ, και η ΒΓ εμπίπτει σε αυτές, οι εναλλάξ γωνίες ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Και επειδή η ΑΒ είναι ίση με την ΓΔ, και η ΒΓ είναι κοινή, οι δύο ευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΔΓ, ΓΒ. Και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την γωνία ΒΓΔ. Άρα, η βάση ΑΓ είναι ίση με την βάση ΒΔ, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΓΒ, και οι λοιπές γωνίες θα είναι ίσες μία προς μία με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες που πρόσκεινται στις ίσες πλευρές. Άρα, η γωνία ΑΓΒ είναι ίση με την ΓΒΔ. Επίσης, αφού η ευθεία ΒΓ, η οποία εμπίπτει με τις δύο ευθείες ΑΓ και ΒΔ, κάνει τις εναλλάξ γωνίες (ΑΓΒ και ΓΒΔ) μεταξύ τους ίσες, η ΑΓ είναι άρα παράλληλη με την ΒΔ. Και έχει δειχθεί ότι η ΑΓ είναι ίση με την ΒΔ. Άρα, οι ευθείες που συνδέονται με ίσες και παράλληλες ευθείες επί τα αυτά μέρη είναι μεταξύ τους ίσες και παράλληλες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 34

Στα παραλληλόγραμμα χωρία οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, και η διαγώνιος τα διχοτομεί.

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διάμετρος του ΒΓ. Λέγω ότι οι απέναντι πλευρές και γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες μεταξύ τους και η διαγώνιος ΒΓ το διχοτομεί.



Επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ και η ευθεία ΒΓ εμπίπτει σε αυτές, οι εναλλάξ γωνίες ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Ομοίως, αφού η ΑΓ είναι παράλληλη με την ΒΔ και η ΒΓ εμπίπτει σε αυτές, οι εναλλάξ γωνίες ΑΓΒ και ΓΒΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα, τα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι δύο τρίγωνα που έχουν τις δύο γωνίες ΑΒΓ και ΒΓΑ αντίστοιχα ίσες με τις ΒΓΔ και ΓΒΔ και έχουν κοινή πλευρά την ΒΓ. Άρα, θα έχουν και τις λοιπές πλευρές ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές, και την λοιπή γωνία ίση με την λοιπή γωνία. Άρα, η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την ΓΔ και η ΑΓ με την ΒΔ. Επιπροσθέτως, η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΓΔΒ. Και αφού η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την ΒΓΔ και η ΓΒΔ με την ΑΓΒ, άρα όλη η γωνία ΑΒΔ είναι ίση με όλη την ΑΓΔ. Και έχει δειχθεί ότι η ΒΑΓ είναι ίση με την ΓΔΒ.

Άρα, στα παραλληλόγραμμα χωρία οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

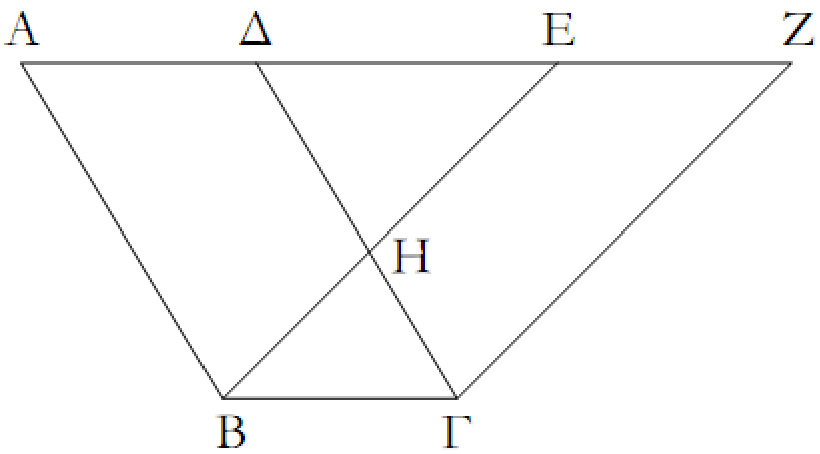
Επίσης, λέγω ότι η διάμετρος το διχοτομεί. Επειδή η ΑΒ είναι ίση με την ΓΔ και η ΒΓ είναι κοινή, οι δύο ευθείες ΑΒ, ΒΓ είναι ίσες μία προς μία με τις δύο ευθείες ΔΓ, ΓΒ. Και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την γωνία ΒΓΔ. Άρα, η βάση ΑΓ είναι επίσης ίση με την ΔΒ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΔ.

Άρα, η διαγώνιος ΒΓ διχοτομεί το παραλληλόγραμμο ΑΓΔΒ. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 35

Τα παραλληλόγραμμα τα οποία βρίσκονται στην ίδια βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω παραλληλόγραμμα τα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ πάνω στην ίδια βάση ΒΓ και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, των ΑΖ, ΒΓ. Λέγω ότι το ΑΒΓΔ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ.



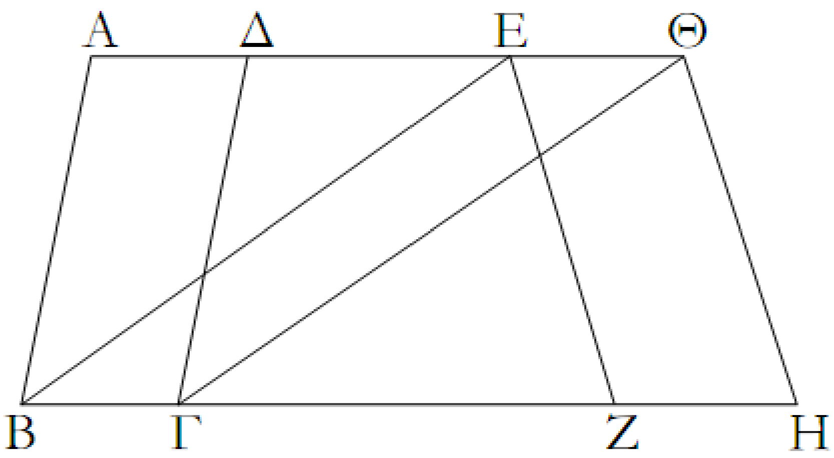
Διότι επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, η ΑΔ είναι ίση με την ΒΓ. Ομοίως η ΕΖ είναι ίση με τη ΒΓ. Ώστε και η ΑΔ είναι ίση με την ΕΖ και είναι κοινή η ΔΕ. Άρα, όλη η ΑΕ είναι ίση με όλη την ΔΖ και η ΑΒ είναι ίση με την ΔΓ. Άρα, οι ΕΑ, ΑΒ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΖΔ, ΔΓ. Η εντός γωνία ΖΔΓ είναι ίση με την εκτός γωνία ΕΑΒ. Άρα η βάση ΕΒ είναι ίση με την βάση ΖΓ και το τρίγωνο ΕΑΒ θα είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΖΓ. Αφαιρείται το κοινό ΔΗΕ. Άρα, το λοιπό τραπέζιο ΑΒΗΔ είναι ίσο με το λοιπό τραπέζιο ΕΗΓΖ και είναι κοινό το ΗΒΓ τρίγωνο. Άρα, όλο το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ίσο με όλο το παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ.

Άρα, τα παραλληλόγραμμα τα οποία βρίσκονται στην ίδια βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 36

Τα παραλληλόγραμμα τα οποία βρίσκονται σε ίσες βάσεις και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω ότι τα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν ίσες βάσεις τις ΒΓ και ΖΗ, και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΑΘ, ΒΗ. Λέγω ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ίσο με το ΕΖΗΘ.



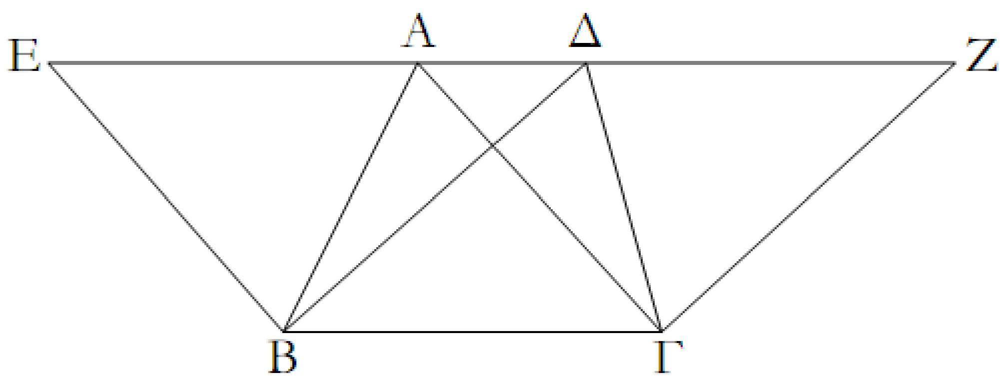
Έστω ότι οι ΒΕ και ΓΘ έχουν συνδεθεί. Και επειδή η ΒΓ είναι ίση με την ΖΗ, αλλά και η ΖΗ είναι ίση με την ΕΘ, είναι και η ΒΓ είναι ίση με την ΕΘ. Είναι επίσης παράλληλες και οι ΕΒ και ΘΓ τις συνδέει. Αλλά οι ευθείες που συνδέονται με ίσες και παράλληλες ευθείες είναι ίσες και παράλληλες. [Άρα οι ΕΒ και ΘΓ είναι ίσες και παράλληλες]. Άρα, το ΕΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο και είναι ίσο με το ΑΒΓΔ, επειδή έχει την ίδια βάση ΒΓ, όπως το ΑΒΓΔ, και βρίσκεται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΓ, ΑΘ όπως το ΑΒΓΔ. Ομοίως το ΕΖΗΘ είναι ίσο με το ΕΒΓΘ. Έτσι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι, επίσης, ίσα.

Άρα, τα παραλληλόγραμμα τα οποία βρίσκονται σε ίσες βάσεις και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 37

Τα τρίγωνα τα οποία έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν την ίδια βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ. Λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΒΓ.



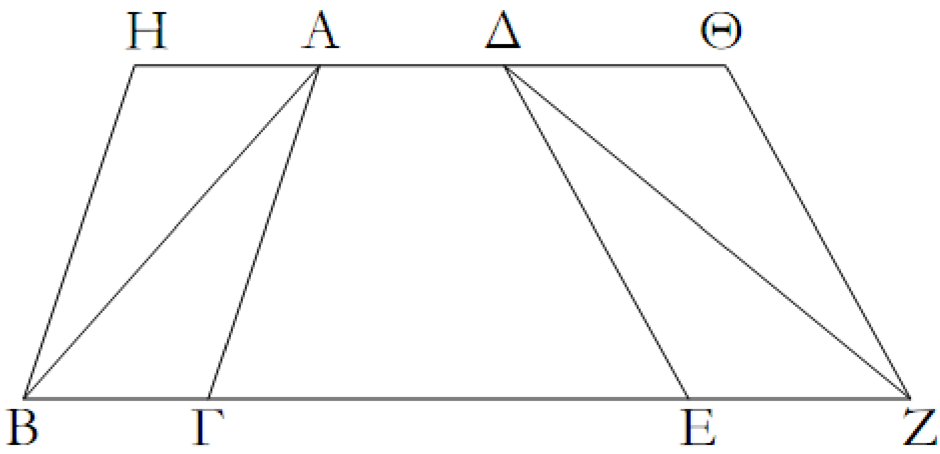
Έστω ότι η ΑΔ έχει προεκταθεί προς το μέρος του Ε και προς το μέρος του Ζ και έστω ότι η ευθεία ΒΕ που διέρχεται από το Β είναι παράλληλη με την ΓΑ, και έστω ότι η ευθεία ΓΖ που διέρχεται από το Γ είναι παράλληλη με την ΒΔ. Άρα, τα ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα και είναι ίσα, επειδή έχουν την ίδια βάση ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΓ και ΕΖ. Και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το μισό του παραλληλογράμμου ΕΒΓΑ, επειδή η διάμετρος το διχοτομεί. Και το τρίγωνο ΔΒΓ είναι το μισό του παραλληλογράμμου ΔΒΓΖ, επειδή η διάμετρος ΔΓ το διχοτομεί.[Και τα μισά των ίσων είναι ίσα μεταξύ τους]. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΒΓ.

Άρα, τα τρίγωνα τα οποία έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 38

Τα τρίγωνα τα οποία έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ίσες βάσεις τις ΒΓ και ΕΖ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΖ και ΑΔ. Λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ.



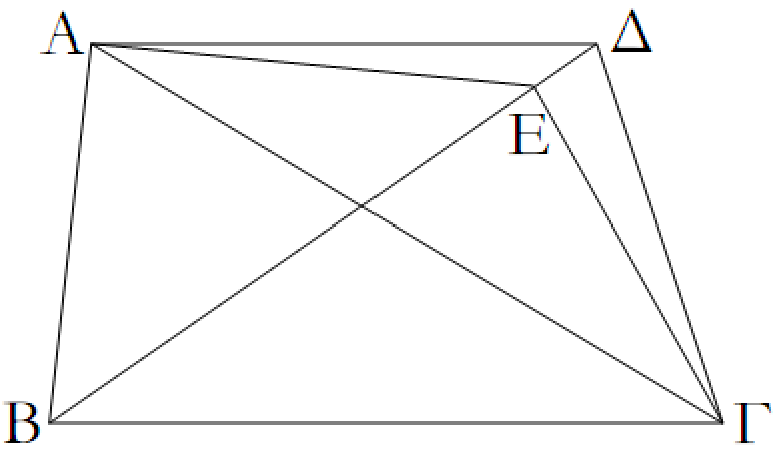
Έστω ότι η ΑΔ έχει προεκταθεί προς τα μέρη των Η και Θ και έστω ότι η ευθεία ΒΗ που διέρχεται από το Β είναι παράλληλη με την ΓΑ, και έστω ότι η ευθεία ΖΘ που διέρχεται από το Ζ είναι παράλληλη με την ΔΕ. Άρα, τα ΗΒΓΑ και ΔΕΖΘ είναι παραλληλόγραμμα και είναι ίσα, επειδή έχουν ίσες βάσεις τις ΒΓ και ΕΖ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΖ και ΗΘ. Και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το μισό του παραλληλογράμμου ΗΒΓΑ, επειδή η διαγώνιος ΑΒ το διχοτομεί. Και το τρίγωνο ΖΕΔ είναι το μισό του παραλληλογράμμου ΔΕΖΘ, επειδή η διαγώνιος ΔΖ το διχοτομεί.[Και τα μισά των ίσων είναι ίσα μεταξύ τους]. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Άρα, τρίγωνα τα οποία έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 39

Ίσα τρίγωνα τα οποία έχουν την ίδια βάση και είναι επί τα αυτά μέρη, βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.

Έστω ότι τα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ίσα τρίγωνα τα οποία έχουν κοινή βάση την ΒΓ και είναι επί τα αυτά μέρη αυτής. Λέγω ότι βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.



Έστω ότι η ΑΔ έχει συνδεθεί, λέγω ότι η ΑΔ και η ΒΓ είναι παράλληλες.

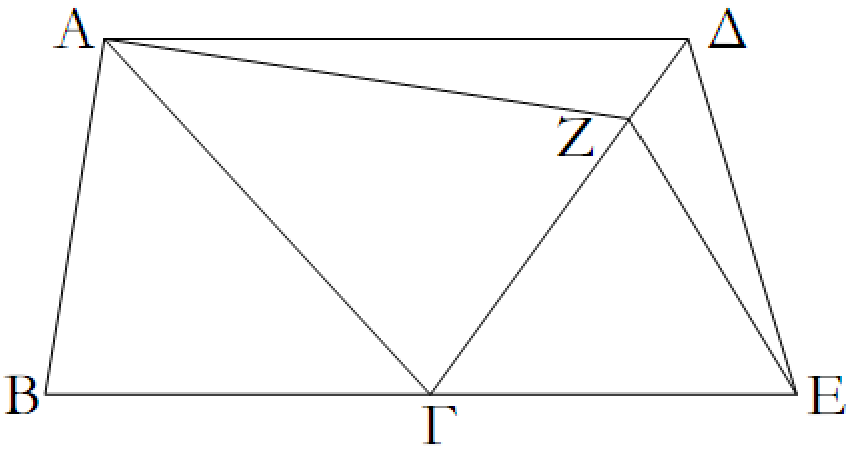
Διότι διαφορετικά, η ΑΕ διερχόμενη από το Α θα ήταν παράλληλη με την ευθεία ΒΓ και έστω ότι η ΕΓ έχει συνδεθεί. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΕΒΓ επειδή έχουν την ίδια βάση, την ΒΓ, και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Αλλά το ΑΒΓ είναι ίσο με το ΔΒΓ. Άρα, το ΔΒΓ είναι επίσης ίσο με το ΕΒΓ, δηλαδή το μεγαλύτερο με το μικρότερο, το οποίο είναι άτοπον. Άρα, η ΑΕ δεν είναι παράλληλη με την ΒΓ. Ομοίως, δείχνεται ότι καμία άλλη ευθεία δεν είναι παράλληλη εκτός της ΑΔ. Άρα, η ΑΔ είναι παράλληλη με την ΒΓ.

Άρα, ίσα τρίγωνα τα οποία έχουν την ίδια βάση και είναι επί τα αυτά μέρη, βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 40

Ίσα τρίγωνα τα οποία έχουν ίσες βάσεις και είναι επί τα αυτά μέρη, βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων .

Έστω ότι τα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα τρίγωνα επί ίσων βάσεων ΒΓ και ΓΕ αντίστοιχα, και είναι επί τα αυτά μέρη. Λέγω επίσης, ότι βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.



Έστω ότι η ΑΔ έχει συνδεθεί. Λέγω ότι η ΑΔ είναι παράλληλη με την ΒΕ.

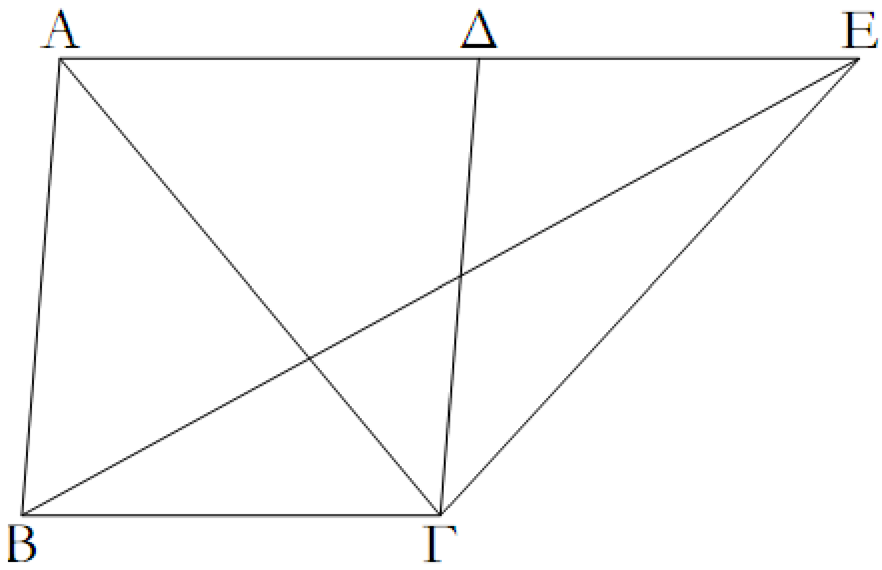
Διότι διαφορετικά, έστω ότι η ΑΖ που διέρχεται από το Α είναι παράλληλη με την ΒΕ και έστω ότι η ΖΕ έχει συνδεθεί. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΖΓΕ, επειδή βρίσκονται επί των ίσων βάσεων ΒΓ και ΓΕ, και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΕ και ΑΖ. Αλλά το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το ΔΓΕ. Επομένως, το ΔΓΕ είναι επίσης ίσο με το τρίγωνο ΖΓΕ, δηλαδή το μεγαλύτερο είναι ίσο με το μικρότερο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η ΑΖ δεν είναι παράλληλη με την ΒΕ. Ομοίως δείχνεται ότι καμία ευθεία δεν είναι παράλληλη εκτός της ΑΔ. Άρα, η ΑΔ είναι παράλληλη με την ΒΕ.

Άρα, ίσα τρίγωνα τα οποία βρίσκονται επί ίσων βάσεων και είναι επί τα αυτά μέρη, βρίσκονται επίσης μεταξύ των ίδιων παραλλήλων. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 41

Εάν ένα παραλληλόγραμμο έχει κοινή βάση με ένα τρίγωνο και είναι μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, τότε το παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο του τριγώνου.

Έστω ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κοινή βάση με το τρίγωνο ΕΒΓ, την ΒΓ, και έστω ότι βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, ΒΓ και ΑΕ. Λέγω ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΒΕΓ.



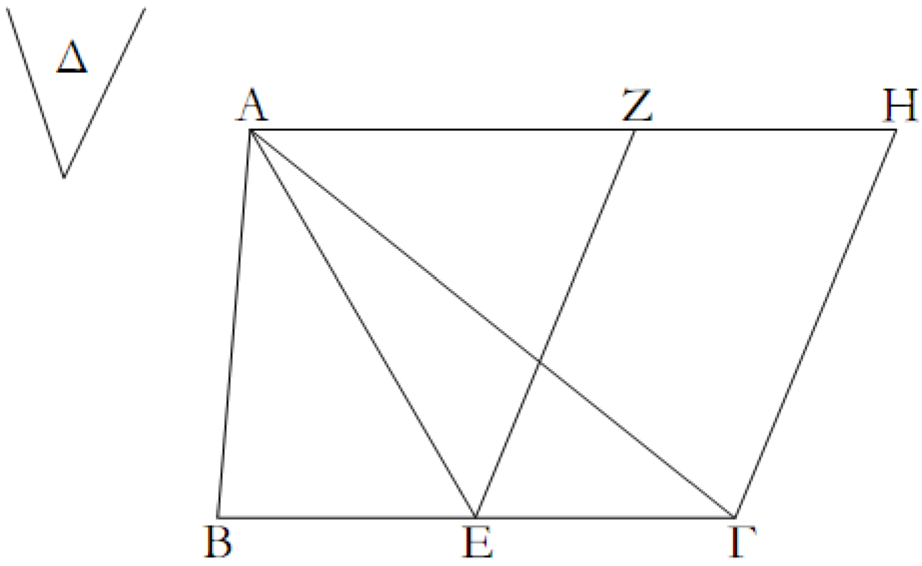
Έστω ότι η ΑΓ έχει συνδεθεί. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΕΒΓ, επειδή έχουν την ίδια βάση, την ΒΓ, και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΓ και ΑΕ. Αλλά, το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ, επειδή η διαγώνιος ΑΓ το διχοτομεί. Άρα, το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι επίσης διπλάσιο του τριγώνου ΕΒΓ.

Άρα, εάν ένα παραλληλόγραμμο έχει κοινή βάση με ένα τρίγωνο και βρίσκεται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, τότε το παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο του τριγώνου. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 42

Να κατασκευαστεί σε δοθείσα ευθύγραμμη γωνία, ένα παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν τρίγωνο.

Έστω ΑΒΓ δοθέν τρίγωνο και Δ η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Άρα, στην ευθύγραμμη γωνία Δ, απαιτείται η κατασκευή ενός παραλληλογράμμου ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ.



Έστω ότι η ΒΓ έχει διχοτομηθεί από το Ε και έστω ότι η ΑΕ έχει συνδεθεί. Και έστω η ΓΕΖ ίση με την γωνία Δ, έχει κατασκευαστεί στο σημείο Ε πάνω στην ευθεία ΕΓ. Και έστω ότι η ΑΗ που διέρχεται από το Α είναι παράλληλη με την ΕΓ και η ΓΗ που διέρχεται από το Γ είναι παράλληλη με την ΕΖ. Άρα, το ΖΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. Και αφού η ΒΕ είναι ίση με την ΕΓ, το τρίγωνο ΑΒΕ είναι επίσης ίσο με το τρίγωνο ΑΕΓ, επειδή έχουν ίσες βάσεις ΒΕ και ΕΓ, και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, ΒΓ και ΑΗ. Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΕΓ. Και το παραλληλόγραμμο ΖΕΓΗ είναι επίσης διπλάσιο του τριγώνου ΑΕΓ, επειδή έχει την ίδια βάση όπως το ΑΕΓ και βρίσκεται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων όπως το ΑΕΓ. Άρα, το παραλληλόγραμμο ΖΕΓΗ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ και έχει την γωνία ΓΕΖ ίση με την δοθείσα Δ.

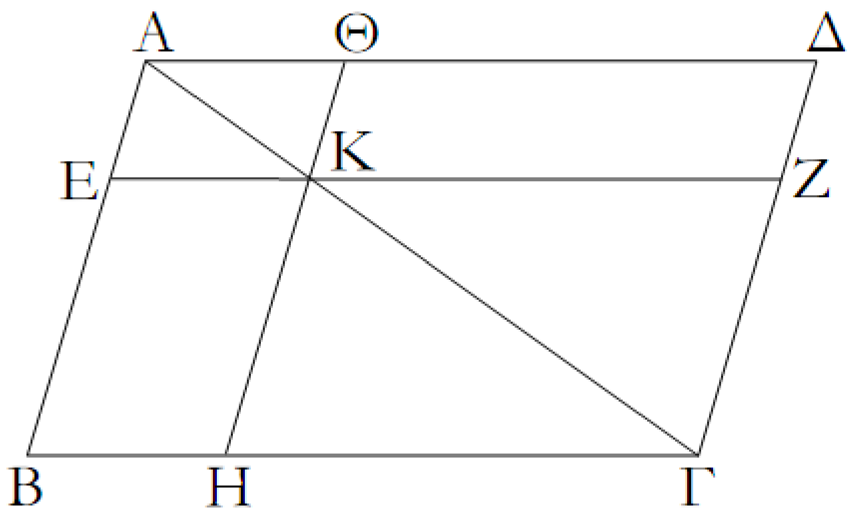
Άρα, το παραλληλόγραμμο ΖΕΓΗ, ίσο με το δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ, έχει κατασκευαστεί στην γωνία ΓΕΖ, η οποία είναι ίση με την Δ. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 43

Σε κάθε παραλληλόγραμμο τα παραπληρώματα των παραλληλογράμμων γύρω από τη διάμετρο είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΑΓ η διάμετρός του. Και έστω ΕΘ και ΖΗ [3] *τα παραλληλόγραμμα γύρω από την ΑΓ και ΒΚ, ΚΔ ονομάζονται παραπληρώματα. Λέγω ότι το παραπλήρωμα ΒΚ είναι ίσο με το παραπλήρωμα ΚΔ.*

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και η ΑΓ είναι η διάμετρός του, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ. Ομοίως, αφού το ΕΘ είναι παραλληλόγραμμο και η ΑΚ είναι η διάμετρός του, το τρίγωνο ΑΕΚ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΘΚ. Άρα, ομοίως, το τρίγωνο ΚΖΓ είναι επίσης ίσο με το τρίγωνο ΚΗΓ. Επίσης, αφού το τρίγωνο ΑΕΚ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΘΚ και το ΚΖΓ με το ΚΗΓ, το άθροισμα των τριγώνων ΑΕΚ και ΚΗΓ είναι ίσο με το άθροισμα των ΑΘΚ και ΚΖΓ, και όλο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με όλο το ΑΔΓ. Άρα, το λοιπό παραπλήρωμα ΒΚ είναι ίσο με το λοιπό παραπλήρωμα ΚΔ.



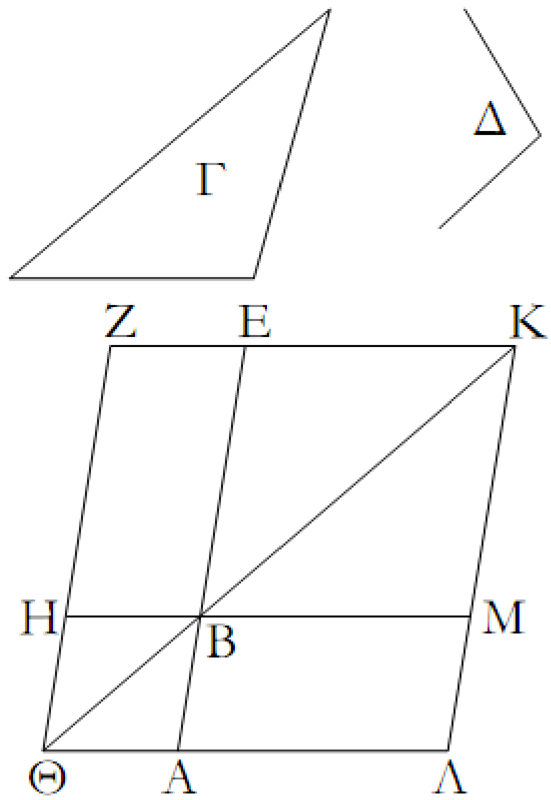
Άρα, σε κάθε παραλληλόγραμμο χωρίο τα παραπληρώματα των παραλληλογράμμων γύρω από την διαγώνιο είναι ίσα μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 44

Να εφαρμοστεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν τρίγωνο επάνω σε δοθείσα ευθεία με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.

Έστω ΑΒ δοθείσα ευθεία , Γ δοθέν τρίγωνο και Δ δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Άρα ζητείται να εφαρμοστεί ένα παραλληλόγραμμο ίσο με το δοθέν τρίγωνο Γ στην δοθείσα ευθεία ΑΒ σε μια γωνία ίση με την Δ.

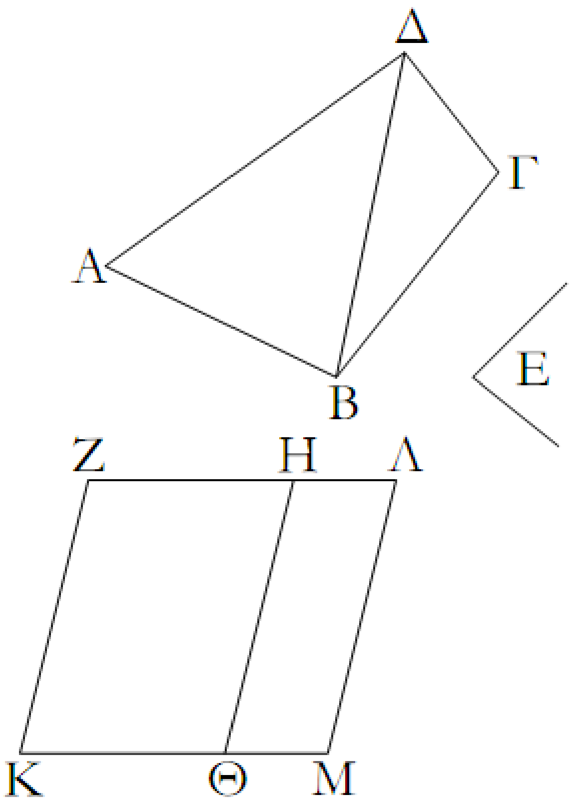
3 Τα παραλληλόγραμμα ορίζονται με την αναφορά των διαγωνίων τους.



Έστω ότι το παραλληλόγραμμο ΒΕΖΗ ίσο με το τρίγωνο Γ, έχει κατασκευασθεί στην γωνία ΕΒΗ, η οποία είναι ίση με την Δ και έστω ότι έχει τοποθετηθεί έτσι ώστε η ΒΕ να σχηματίζει ευθεία με την ΑΒ. Και έστω η ΖΗ διερχόμενη από το Θ και έστω ΑΘ διερχόμενη από το Α να είναι παράλληλη ή με την ΒΗ ή με την ΕΖ και έστω ότι συνδέεται η ΘΒ. Αφού η ευθεία ΘΖ εμπίπτει στις παράλληλες ΑΘ και ΕΖ, το άθροισμα των γωνιών ΑΘΖ, ΘΖΕ είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Άρα, το άθροισμα των ΒΘΗ, ΗΖΕ είναι λιγότερο από δύο ορθές γωνίες και οι ευθείες προεκτεινόμενες απείρως (από τις εσωτερικές γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι λιγότερο από δύο ορθές γωνίες) τέμνονται. Άρα, οι προεκτάσεις των ΘΒ, ΖΕ θα τέμνονται. Έστω ότι έχουν προεκταθεί και έστω ότι τέμνονται στο Κ. Έστω η ΚΛ διερχόμενη από το σημείο Κ είναι παράλληλη ή με την ΕΑ ή με την ΖΘ και έστω οι ΘΑ, ΗΒ έχουν προεκταθεί προς τα σημεία Λ και Μ, αντιστοίχως. Άρα, το ΘΛΚΖ είναι παραλληλόγραμμο και ΘΚ η διάμετρος του και ΑΗ, ΜΕ παραλληλόγραμμα και ΛΒ, ΒΖ τα παραπληρώματα γύρω από την ΘΚ. Άρα, το ΛΒ είναι ίσο με το ΒΖ. Αλλά το ΒΖ είναι ίσο με το τρίγωνο Γ. Άρα, το ΛΒ είναι ίσο με το Γ. Επίσης, επειδή η γωνία ΗΒΕ είναι ίση με την ΑΒΜ, αλλά η ΗΒΕ είναι ίση με την Δ, η ΑΒΜ είναι ίση με την γωνία Δ.

Άρα, το παραλληλόγραμμο ΛΒ, ίσο με το δοθέν τρίγωνο Γ, έχει εφαρμοσθεί στη δοθείσα ευθεία ΑΒ στην γωνία ΑΒΜ, η οποία είναι ίση με την Δ. Ο.Ε.Π**.**

Πρόταση 45



Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο χωρίο σε δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.

Έστω ΑΒΓ το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο και έστω Ε η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Άρα, απαιτείται να κατασκευαστεί ένα παραλληλόγραμμο ίσο με το ευθύγραμμο χωρίο ΑΒΓΔ στη δοθείσα Ε.

Έστω ότι συνδέεται η ΔΒ και έστω ότι το παραλληλόγραμμο ΖΘ, ίσο με το τρίγωνο ΑΒΔ, έχει κατασκευασθεί στην γωνία ΘΚΖ η οποία είναι ίση με την Ε. Και έστω το παραλληλόγραμμο ΗΜ ίσο με το τρίγωνο ΔΒΓ, έχει εφαρμοσθεί στην ευθεία ΗΘ στην γωνία ΗΘΜ, η οποία είναι ίση με την Ε. Και επειδή η γωνία Ε είναι ίση με κάθε μία από τις γωνίες ΘΚΖ, ΗΘΜ, η ΘΚΖ είναι ίση με την ΗΘΜ. Έστω ότι η ΚΘΗ έχει προστεθεί και στις δύο. Άρα, το άθροισμα των ΖΚΘ,ΚΘΗ είναι ίσο με το άθροισμα των ΚΘΗ, ΗΘΜ. Αλλά το άθροισμα των ΖΚΘ, ΚΘΗ είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Άρα, το άθροισμα των ΚΘΗ, ΗΘΜ είναι επίσης ίσο με δύο ορθές γωνίες. Άρα οι δύο ευθείες ΚΘ και ΘΜ που δεν είναι επί τα αυτά μέρη δημιουργούν διαδοχικές γωνίες με ένα τμήμα της ΗΘ, στο σημείο Θ, των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα, η ΚΘ σχηματίζει ευθεία με την ΘΜ και επειδή η ευθεία ΘΗ εμπίπτει στις παράλληλες ΚΜ, ΖΗ, οι εναλλάξ γωνίες ΜΘΗ, ΘΗΖ είναι ίσες μεταξύ τους. Έστω ότι η ΘΗΛ έχει προστεθεί και στις δύο. Άρα, το άθροισμα των ΜΘΗ, ΘΗΛ είναι ίσο με το άθροισμα των ΘΗΖ, ΘΗΛ. Αλλά το άθροισμα των ΜΘΗ, ΘΗΛ είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Άρα, το άθροισμα των ΘΗΖ, ΘΗΛ είναι επίσης ίσο με δύο ορθές γωνίες. Άρα, η ΖΗ σχηματίζει ευθεία με την ΗΛ και επειδή η ΖΚ είναι ίση και παράλληλη με την ΗΘ, αλλά η ΗΘ είναι επίσης με την ΛΜ, η ΚΖ είναι επίσης ίση και παράλληλη με την ΜΛ. Και οι ευθείες ΚΜ και ΖΛ τις συνδέουν**.** Άρα, οι ΚΜ, ΖΛ είναι ίσες και παράλληλες και το ΚΖΛΜ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΖΘ και το ΔΒΓ με το ΗΜ, όλο το ευθύγραμμο χωρίο ΑΒΓΔ είναι επίσης ίσο με όλο το παραλληλόγραμμο ΚΖΛΜ.

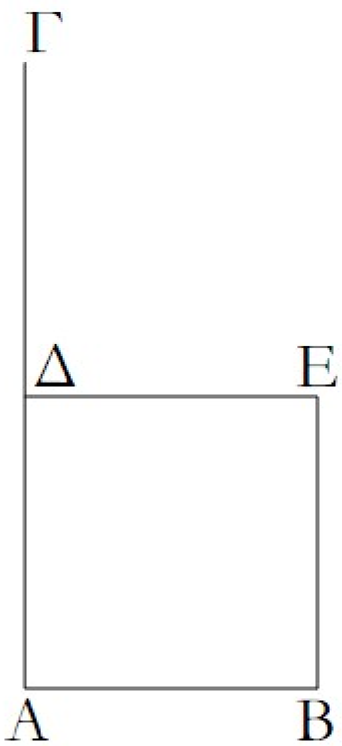
Άρα, το παραλληλόγραμμο ΚΖΛΜ, ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο χωρίο ΑΒΓΔ**,** έχει κατασκευασθεί στην γωνία ΖΚΜ, η οποία είναι ίση με τη δοθείσα Ε. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 46

Να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο σε δοθείσα ευθεία.

Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία. Άρα απαιτείται να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο στην ευθεία ΑΒ.

Έστω ότι η ΑΓ σχηματίζει ορθή γωνία με την ευθεία ΑΒ στο σημείο Α και έστω ότι η ΑΔ είναι ίση με την ΑΒ. Και έστω ότι η ΔΕ, διερχόμενη από το σημείο Δ, είναι παράλληλη με την ΑΒ και έστω ότι η ΒΕ, διερχόμενη από το σημείο Β, είναι παράλληλη στην ΑΔ. Άρα, το ΑΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης η ΑΒ είναι ίση με την ΔΕ και η ΑΔ με την ΒΕ. Αλλά η ΑΒ είναι ίση με την ΑΔ. Άρα, οι τέσσερις (πλευρές) ΒΑ,ΑΔ,ΔΕ και ΕΒ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα, το παραλληλόγραμμο ΑΔΕΒ είναι ισόπλευρο. Άρα λέγω ότι είναι επίσης ορθογώνιο. Επειδή η ευθεία ΑΔ εμπίπτει στις παράλληλες ΑΒ και ΔΕ, το άθροισμα των γωνιών ΒΑΔ, ΑΔΕ είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Αλλά η ΒΑΔ είναι ορθή γωνία. Άρα, η ΑΔΕ είναι επίσης ορθή. Και των παραλληλογράμμων χωρίων οι απέναντι πλευρές και γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα, κάθε μία από τις απέναντι γωνίες ΑΒΕ, ΒΕΔ είναι επίσης ορθές. Άρα, το ΑΔΕΒ είναι ορθογώνιο και έχει δειχθεί ότι είναι και ισόπλευρο.



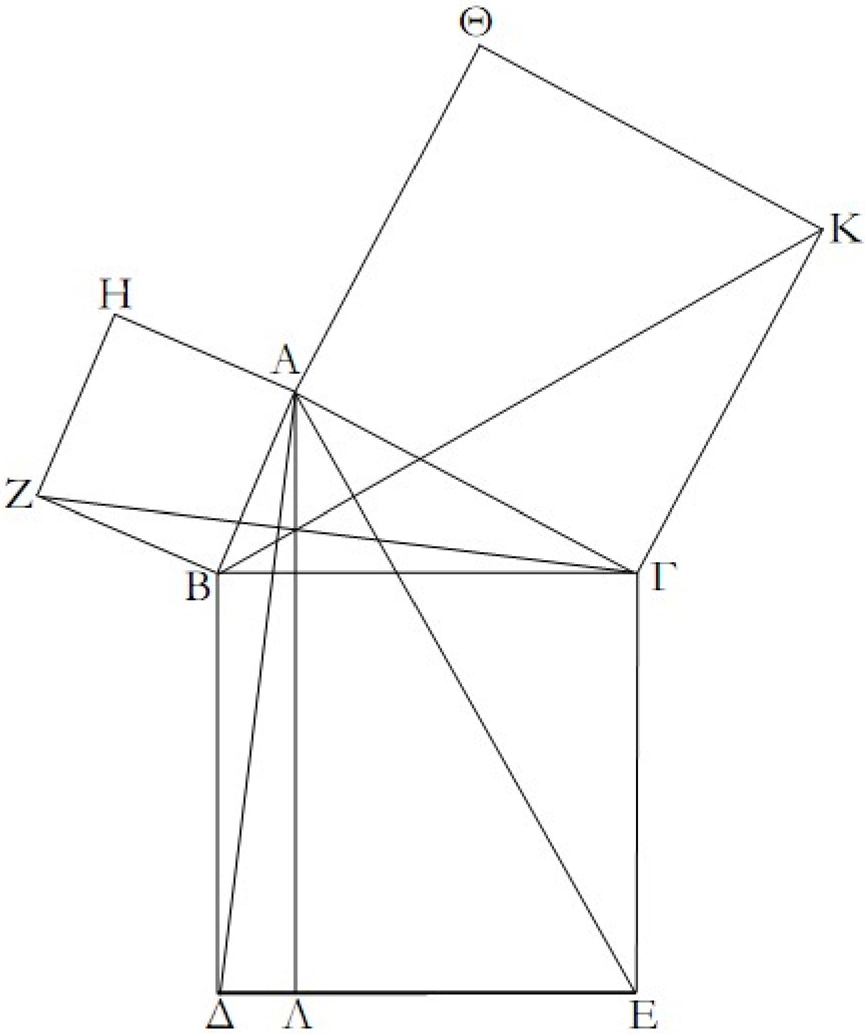
Άρα, είναι τετράγωνο, και έχει κατασκευαστεί από την ευθεία ΑΒ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 47

Στα ορθογώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της υποτείνουσας την ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ που έχει ορθή την γωνία ΒΑΓ. Λέγω ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΓ.

Διότι έστω ότι έχει γραφεί το τετράγωνο ΒΔΕΓ επάνω στην ΒΓ, και τα ΗΒ, ΘΓ επάνω στις ΒΑ, ΑΓ. Και έστω η ΑΛ που διέρχεται από το σημείο Α παράλληλη με κάθε μία από τις ΒΔ, ΓΕ και συνδέονται οι ΑΔ, ΖΓ. Αφού οι γωνίες ΒΑΓ και ΒΑΗ είναι η κάθε μία ορθή, τότε οι δύο ευθείες ΑΓ, ΑΒ που δεν βρίσκονται στο ίδιο μέρος, δημιουργούν τις εφεξής γωνίες με ένα τμήμα της ΑΒ στο σημείο Α, των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Άρα, η ΓΑ σχηματίζει ευθεία με την ΑΗ. Λοιπόν, ομοίως η ΒΑ σχηματίζει ευθεία με την ΑΘ και αφού η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με την ΖΒΑ, και οι δύο είναι ορθές. Έστω ότι η ΑΒΓ έχει προστεθεί και στις δύο. Άρα, όλη η ΔΒΑ είναι ίση με όλη την ΖΒΓ. Και αφού η ΔΒ είναι ίση με την ΒΓ και η ΖΒ με την ΒΑ, οι δύο ευθείες ΔΒ, ΒΑ είναι ίσες με τις ΓΒ, ΒΖ αντίστοιχα. Και η γωνία ΔΒΑ είναι ίση με την ΖΒΓ. Άρα, η βάση ΑΔ είναι ίση με την βάση ΖΓ και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ίσο με το τρίγωνο ΖΒΓ. Και το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΔ, διότι έχουν την ίδια βάση, την ΒΔ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΒΔ και ΑΛ. Και το τετράγωνο ΗΒ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΖΒΓ, διότι έχουν την ίδια βάση, την ΖΒ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ΖΒ και ΗΓ.[Τα διπλάσια ίσων πραγμάτων είναι ίσα μεταξύ τους]. Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΗΒ. Άρα, το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο ΘΓ. Άρα ομοίως, συνδέοντας τις ΑΕ και ΒΚ, το παραλληλόγραμμο ΓΛ μπορεί να δειχθεί ότι είναι ίσο με το τετράγωνο ΘΓ. Άρα, όλο το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι ίσο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων ΗΒ και ΘΓ. Και είναι μεν το τετράγωνο ΒΔΕΓ αυτό που γράφεται από την ΒΓ, και τα τετράγωνα ΗΒ και ΘΓ αυτά που γράφονται από τις ΒΑ, ΑΓ. Άρα, το τετράγωνο της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ και ΑΓ.

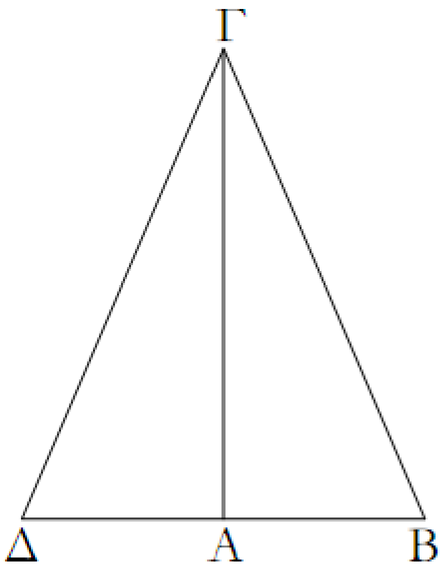


Άρα, στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της υποτείνουσας την ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 48

Εάν το τετράγωνο μίας από των πλευρών του τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η περιεχόμενη από τις λοιπές πλευρές γωνία είναι ορθή.

Διότι έστω ότι το τετράγωνο μίας από των πλευρών, της ΒΓ, του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ και ΑΓ. Λέγω ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ορθή.



Διότι έστω ότι άγεται η ΑΔ από το σημείο Α κάθετα στην ευθεία ΑΓ και έστω ότι η ΑΔ είναι ίση με την ΒΑ και συνδέεται η ΔΓ. Αφού η ΔΑ είναι ίση με την ΑΒ το τετράγωνο της ΔΑ είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο της ΑΒ. Έστω ότι το τετράγωνο της ΑΓ έχει προστεθεί και στις δύο. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ και ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΓ. Αλλά, το τετράγωνο της ΔΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ και ΑΓ, επειδή η γωνία ΔΑΓ είναι ορθή και το τετράγωνο της ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΓ, επειδή υποτέθηκε. Άρα, το τετράγωνο της ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΒΓ. Άρα, η πλευρά ΔΓ είναι επίσης ίση με την πλευρά ΒΓ. Και αφού η ΔΑ είναι ίση με την ΑΒ και η ΑΓ είναι κοινή, οι δύο ευθείες ΔΑ, ΑΓ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΒΑ, ΑΓ και η βάση ΔΓ είναι ίση με την βάση ΒΓ. Άρα, η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με την γωνία ΒΑΓ. Αλλά η ΔΑΓ είναι ορθή. Άρα, η ΒΑΓ είναι επίσης ορθή.

Άρα, αν το τετράγωνο μίας από των πλευρών του τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο λοιπών πλευρών του τριγώνου, τότε η περιεχόμενη από τις λοιπές πλευρές γωνία είναι ορθή. Ο.Ε.Δ.