ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΒΙΒΛΙΟ Β'

Επιμέλεια μετάφρασης:

- **Αθανασάκης Γιάννης ΑΜ 3416**
- **Βιτωράκης Νεκτάριος ΑΜ 3333**
- **Γαϊτάνη Μαρία ΑΜ 3255**
- **Καμπάκος Γιάννης-Μάριος ΑΜ 3344**

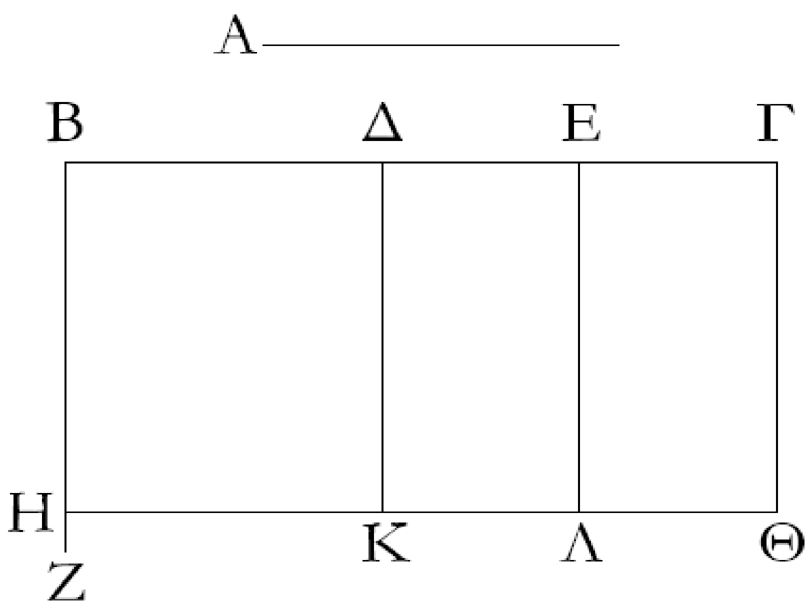
Ορισμοί :

1. Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται ότι αποτελείται, από δύο ευθείες γραμμές που περιέχουν μια ορθή.

2. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οποιοδήποτε από τα παραλληλόγραμμα γύρω από τη διάμετρο του, μαζί με τα δύο παραπληρώματα, καλείται γνώμων.

Πρόταση 1

Εάν υπάρχουν δύο ευθείες και μία από αυτές τμηθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το περιεχόμενο από τις δύο ευθείες ορθογώνιο είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων ορθογωνίων από την άτμητη ευθεία και καθένα από τα τμήματα της ευθείας.



Έστω Α και ΒΓ δύο ευθείες και έστω ΒΓ τυχαία τεμνόμενη στα σημεία Δ και Ε. Λέγω ότι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις Α και ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχόμενων ορθογώνιων από τις Α και ΒΔ και από τις Α και ΔΕ και από τις Α και ΕΓ.

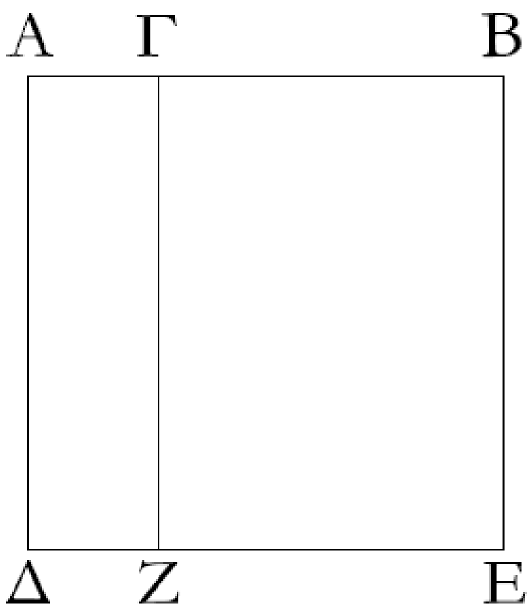
Διότι έστω ότι έχει αχθεί η ΒΖ από το σημείο Β, κάθετη στην ΒΓ και έστω η ΒΗ ίση με την Α και έστω η ΗΘ που έχει αχθεί από το σημείο Η, παράλληλη στην ΒΓ. Ας έχουν αχθεί από τα σημεία Δ, Ε και Γ αντίστοιχα οι ΔΚ, ΕΛ και ΓΘ παράλληλες με την ΒΓ.

Έτσι, το ορθογώνιο ΒΘ είναι ίσο με το άθροισμα των ορθογωνίων ΒΚ, ΔΛ και ΕΘ. Το ΒΘ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις Α και ΒΓ, αντίστοιχα περιέχεται και από τις ΗΒ, ΒΓ, όπου ΒΗ είναι ίση με την Α. Το ΒΚ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις Α, ΒΔ και από τις ΗΒ, ΒΔ αντίστοιχα, όπου η ΒΗ είναι ίση με την Α. Το ΔΛ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις Α, ΔΕ. Διότι η ΔΚ, δηλαδή η ΒΗ, είναι ίση με το Α και ομοίως το ΕΘ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις Α, ΕΓ και άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις Α, ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχόμενων ορθογωνίων από τις Α, ΒΔ και Α, ΔΕ και Α, ΕΓ.

Άρα, εάν υπάρχουν δύο ευθείες και μία από αυτές τμηθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το περιεχόμενο από τις δύο ευθεές ορθογώνιο είναι ίσο με το άθροισμα των περιεχομένων ορθογωνίων από την άτμητη ευθεία και καθένα από τα τμήματα της ευθείας. Ό.Ε.Δ

Πρόταση 2

Εάν μια ευθεία τμηθεί τυχαία, τότε το άθροισμα των περιεχόμενων ορθογωνίων από ολόκληρη την ευθείας και από καθένα από τα τμήματα είναι ίσο με το τετράγωνο ολόκληρης της ευθείας.



Ας έχει τμηθεί τυχαία η ευθεία ΑΒ στο Γ. Λέγω ότι το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις *ΑΒ, ΒΓ και το περιεχόμενο ορθογώνιο* από τις *ΒΑ, ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΒ.*

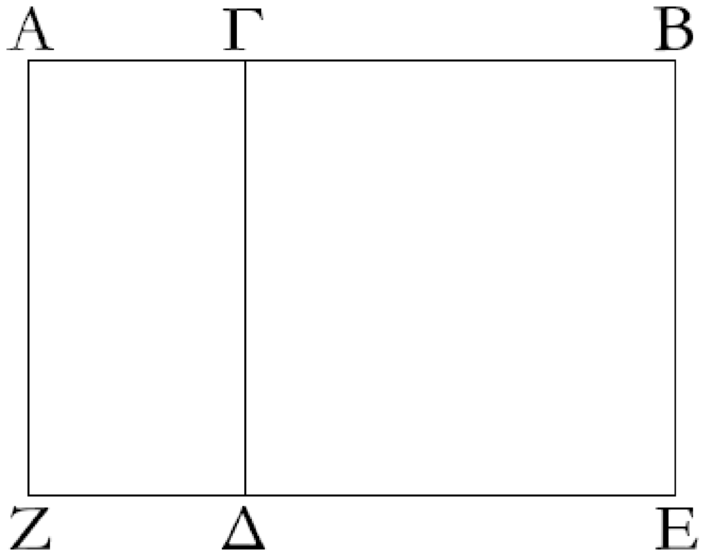
Διότι ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΑΔΕΒ από την ΑΒ και ας έχει αχθεί από το σημείο Γ η ΓΖ παράλληλη στην ΑΔ ή στην ΒΕ.

Το τετράγωνο ΑΕ είναι ίσο με το άθροισμα των ορθογωνίων ΑΖ και ΓΕ. Το ΑΕ είναι το τετράγωνο της ΑΒ, το ΑΖ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΒΑ, ΑΓ το οποίο επίσης περιέχεται στις ΔΑ, ΑΓ με την ΔΑ ίση με ΑΒ. Το ΓΕ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ, ΒΓ με ΒΕ ίση με ΑΒ. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΒΑ, ΑΓ και το περιεχόμενο ορθογώνιο υπό των ΑΒ, ΒΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΒ.

Άρα, εάν μια ευθεία τμηθεί τυχαία, τότε το άθροισμα των περιεχόμενων ορθογωνίων από ολόκληρη την ευθείας και από καθένα από τα τμήματα είναι ίσο με το τετράγωνο ολόκληρης της ευθείας. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 3

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία, τότε το περιεχόμενο ορθογώνιο από την ευθεία αυτής και ένα από τα τμήματα είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο των τμημάτων και του τετραγώνου του προαναφερθέντος τμήματος.



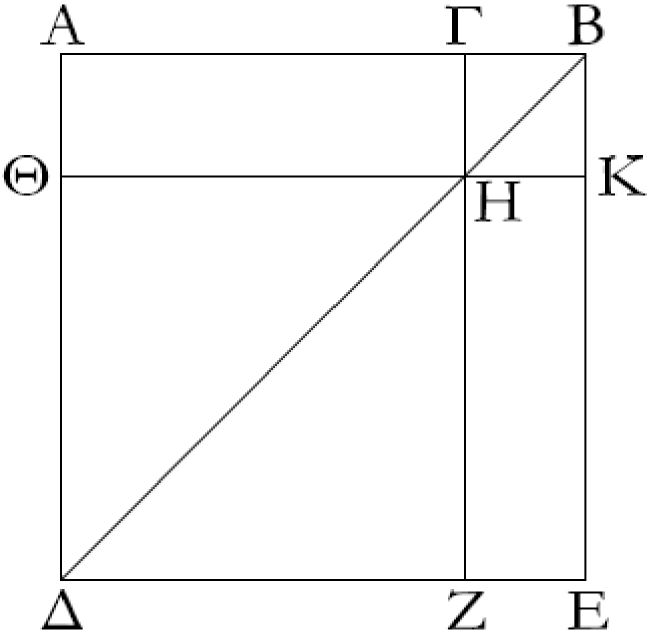
Ας έχει τμηθεί η ευθεία ΑΒ τυχαία στο σημείο Γ. Λέγω ότι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ και ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΓ και ΓΒ και του τετραγώνου της ΒΓ.

Ας έχει αχθεί το τετράγωνο ΓΔΕΒ από την ΓΒ και έστω ΕΔ διερχόμενη από το Ζ και έστω ΑΖ διερχόμενη από το Α, παράλληλη είτε στη ΒΕ είτε στη ΓΔ. Το ορθογώνιο ΑΕ είναι ίσο με το ΑΔ και το τετράγωνο ΓΕ. Το ΑΕ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ και ΒΓ. Διότι, περιέχεται επίσης από τις ΑΒ, ΒΕ όπου η ΒΕ είναι ίση με την ΒΓ. Το ΑΔ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΓ και ΓΒ όπου η ΔΓ είναι ίση με την ΓΒ. Το ΔΒ είναι το τετράγωνο της ΓΒ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ, ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΓ, ΒΓ και του τετράγωνο της ΒΓ.

Άρα, εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία, τότε το περιεχόμενο ορθογώνιο από την ευθεία αυτή και από ένα από τα τμήματα είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο των τμημάτων και του τετραγώνου του προαναφερθέντος τμήματος. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 4

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία, τότε το τετράγωνο της ευθείας αυτής είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των τμημάτων της ευθείας και δύο φορές του περιεχόμενου ορθογώνιου από τα τμήματα.



Ας έχει τμηθεί η ευθεία γραμμή ΑΒ τυχαία στο σημείο Γ. Λέγω ότι το τετράγωνο της ΑΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΒ, και δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΓ και ΓΒ.

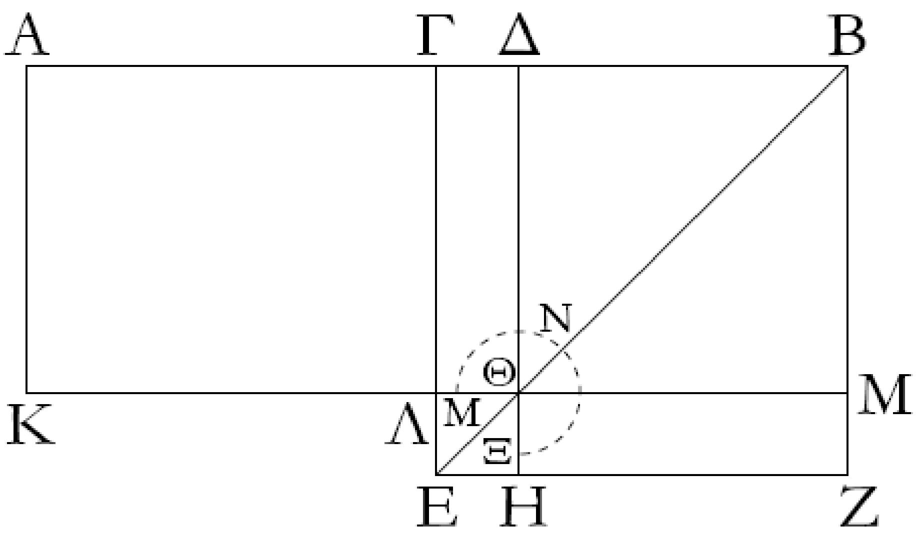
Διότι ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΑΔΕΒ από την ΑΒ και ας έχει συνδεθεί η ΒΔ και ας έχει αχθεί από το σημείο Γ η ΓΖ που είναι παράλληλη είτε στην ΑΔ είτε στην ΕΒ. Άγεται η ΘΚ διερχόμενη από το Η και είναι παράλληλη είτε στην ΑΒ είτε στην ΔΕ. Επειδή η ΓΖ είναι παράλληλη με την ΑΔ και αυτές τέμνονται από την ΒΔ, η εξωτερική γωνία ΓΗΒ είναι ίση με την εσωτερική και την απέναντι γωνία ΑΔΒ. Αλλά, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΔ, επειδή και η πλευρά ΒΑ είναι επίσης ίση με την ΑΔ. Άρα, η γωνία ΓΗΒ είναι ίση με την ΗΒΓ ώστε και η πλευρά ΒΓ είναι ίση με την ΓΗ, αλλά η ΓΒ είναι ίση με την ΗΚ και η ΓΗ είναι ίση με την ΚΒ. Άρα, η ΗΚ είναι ίση με την ΚΒ. Άρα, το ΓΗΚΒ είναι ισόπλευρο. Λέγω ότι είναι επίσης ορθογώνιο. Επειδή, η ΓΗ είναι παράλληλη στην ΒΚ και από αυτές τέμνονται από την ευθεία ΓΒ, οι γωνίες ΚΒΓ και ΗΓΒ είναι ίσες με δύο ορθές. Αλλά, η γωνία ΚΒΓ είναι ορθή άρα και η γωνία ΒΓΗ. Άρα, οι απέναντι γωνίες ΓΗΚ και ΗΚΒ είναι επίσης ορθές. Άρα, το ΓΗΚΒ είναι ορθογώνιο, όμως έχει ήδη δειχθεί ότι είναι ισόπλευρο, άρα είναι το τετράγωνο της ΓΒ. Για τον ίδιο λόγο, το ΘΖ είναι το τετράγωνο της ΘΗ, άρα και της ΑΓ. Άρα, τα τετράγωνα ΘΖ, ΚΓ είναι αντίστοιχα τα τετράγωνα των ΑΓ, ΓΒ. Και επειδή το ορθογώνιο ΑΗ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΗΕ και είναι το ΑΗ το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΓ και ΓΒ, διότι η ΗΓ είναι ίση με την ΓΒ. Το ΗΕ είναι επίσης ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΓ, ΓΒ. Όμως, τα ορθογώνια ΑΗ και ΗΕ είναι ίσα με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΑΓ και ΓΒ. Τα ΘΖ και ΓΚ είναι τα τετράγωνα αντίστοιχα των ΑΓ και ΓΒ.

Άρα, τα τέσσερα σχήματα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ είναι ίσα με το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΑΓ και ΒΓ και δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΓ και ΓΒ. Αλλά, τα σχήματα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ είναι ολόκληρο το ΑΔΕΒ, το οποίο είναι το τετράγωνο της ΑΒ. Άρα, το τετράγωνο της ΑΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΒ και δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΓ και ΓΒ.

Άρα, εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία, τότε το τετράγωνο της ευθείας αυτής είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των τμημάτων της ευθείας και δύο φορές του περιεχόμενου ορθογώνιου από τα τμήματα. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 5

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα, τότε το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τα άνισα τμήματα της γραμμής και του τετραγώνου της διαφοράς μεταξύ των ίσων και των άνισων τμημάτων είναι ίσο με το μισό τετράγωνο της ευθείας.



Ας έχει τμηθεί η ευθεία ΑΒ ίσα στο Γ και άνισα στο Δ. Λέγω ότι το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου υπό των ΑΔ και ΔΒ και το τετράγωνο από την ΓΔ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΒ.

Διότι ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΓΕΖΒ από την ΓΒ και συνδέεται η ΒΕ. Ας έχει αχθεί η ΔΗ, διερχόμενη από το Δ, παράλληλη είτε ως προς την ΓΕ είτε ως προς την ΒΖ. Ας έχει αχθεί επίσης η ΚΜ διερχόμενη από το Θ, παράλληλη είτε ως προς την ΑΒ είτε ως προς την ΕΖ. Ας έχει αχθεί η ΑΚ διερχόμενη από το Α και είναι παράλληλη είτε ως προς την ΓΛ, είτε ως προς την ΒΜ. Επειδή, το παραπλήρωμα ΓΘ είναι ίσο με το παραπλήρωμα ΘΖ, ας προστεθεί το τετράγωνο ΔΜ και στα δύο.

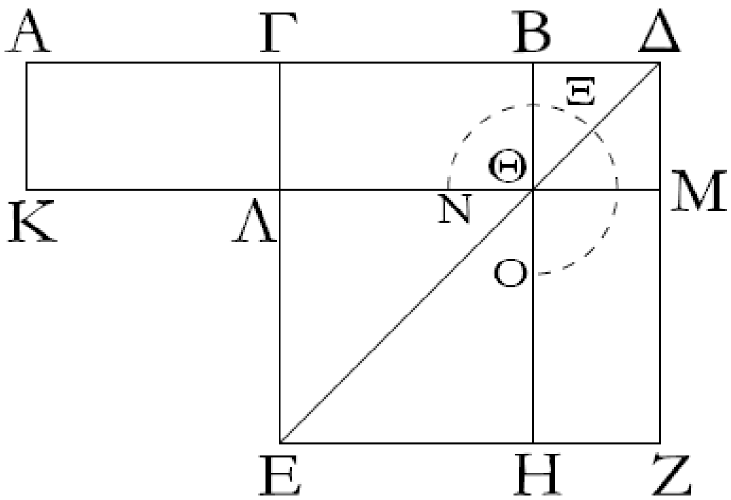
Άρα, ολόκληρο το ορθογώνιο ΓΜ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΔΖ, αλλά το ορθογώνιο ΓΜ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΑΛ, επειδή η ΑΓ είναι επίσης ίση με την ΓΒ. Άρα, το ορθογώνιο ΑΛ είναι επίσης ίσο με το ορθογώνιο ΔΖ. Ας προστεθεί και στα δύο το ορθογώνιο ΓΘ. Άρα, ολόκληρο το ορθογώνιο ΑΘ είναι ίσο με το γνώμονα ΜΝΞ†, αλλά το ΑΘ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ και ΔΒ. Γιατί η ΔΘ είναι ίση με τη ΔΒ, άρα ο γνώμονας ΜΝΞ είναι επίσης ίσος με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ και ΔΒ. Έστω η ΛΗ, ίση με το τετράγωνο της ΓΔ, που προστίθεται και στα δύο. Άρα, ο γνώμονας ΜΝΞ και το τετράγωνο ΛΗ είναι ίσα με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ και ΔΒ και του τετραγώνου της ΓΔ. Αλλά, το άθροισμα του γνώμονα ΜΝΞ και ολόκληρου το τετραγώνου ΛΗ είναι ίσο με το τετράγωνο ΓΕΖΒ της ΓΒ. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΔ και ΔΒ και το τετράγωνο της ΓΔ είναι ίσα με το τετράγωνο της ΓΒ.

Άρα, εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα, τότε το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τα άνισα τμήματα της γραμμής και του τετραγώνου της διαφοράς μεταξύ των ίσων και των άνισων τμημάτων είναι ίσο με το μισό τετράγωνο της ευθείας. Ο.Ε.Δ

†Σημειώστε την μάλλον λανθασμένη διπλή χρήση του συμβόλου Μ.

Πρόταση 6

Εάν διχοτομηθεί μία ευθεία γραμμή και κάποια ευθεία προστεθεί ως προέκταση της, τότε το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου όλης της ευθείας και της ευθείας που έχει προστεθεί, του τετραγώνου της ευθείας που έχει προστεθεί, και του τετραγώνου της μισής αρχικής ευθείας είναι ίσο με το άθροισμα του τετράγωνου της μισής ευθείας και της ευθείας που έχει προστεθεί.



Διότι ας έχει διχοτομηθεί η ευθεία ΑΒ στο σημείο Γ και έστω η ευθεία ΒΔ, η οποία έχει προστεθεί σε αυτήν. Λέγω ότι το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΔ και ΔΒ, και του τετραγώνου της ΓΒ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΔ.

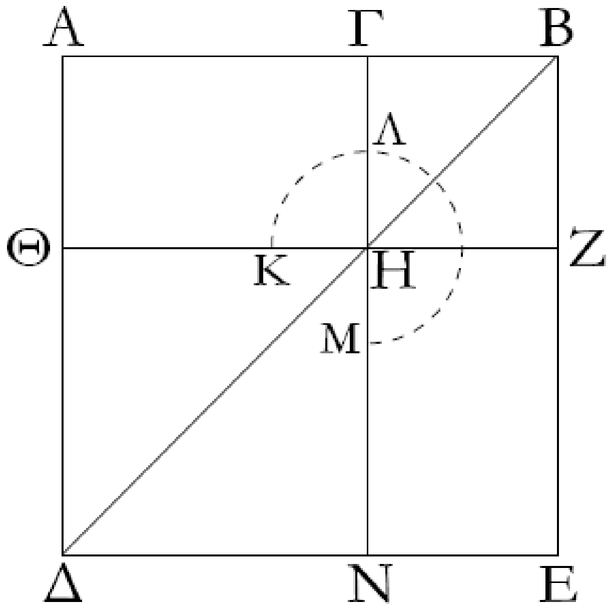
Διότι ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΓΕΖΔ υπό την ΓΔ, και ας έχει ενωθεί η ΔΕ, και ας έχει αχθεί η ΒΗ από το σημείο Β παράλληλη είτε στην ΕΓ είτε στην ΔΖ, και ας έχει αχθεί ΚΜ διερχόμενη από το Θ παράλληλη είτε στην ΑΒ είτε στην ΕΖ και ας έχει αχθεί η ΑΚ διερχόμενη από το Α, παράλληλη είτε στην ΓΛ είτε στην ΔΜ.

Επειδή η ΑΓ είναι ίση με την ΓΒ, το ορθογώνιο ΑΛ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΓΘ, αλλά το ορθογώνιο ΓΘ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΘΖ. Άρα, το ορθογώνιο ΑΛ είναι επίσης ίσο με το ορθογώνιο ΘΖ. Έστω το ορθογώνιο ΓΜ το οποίο έχει προστεθεί και στα δύο. Άρα, όλο το ορθογώνιο ΑΜ είναι ίσο με το γνώμονα ΝΞΟ. Αλλά, το ΑΜ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο υπό των ΑΔ και ΔΒ. Γιατί η ΔΜ είναι ίση με τη ΔΒ. Άρα, και ο γνώμονας ΝΞΟ είναι ίσος με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ και ΔΒ. Έστω το ΛΗ, το οποίο είναι ίσο με το τετράγωνο της ΒΓ, που έχει προστεθεί και στα δύο. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΔ και ΔΒ και του τετραγώνου της ΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα του γνώμονα ΝΞΟ και του τετραγώνου ΛΗ. Αλλά, το άθροισμα του γνώμονα ΝΞΟ και το τετραγώνου ΛΗ είναι όλο το τετράγωνο ΓΕΖΔ, το οποίο είναι αυτό της ΓΔ. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΔ και ΔΒ και του τετραγώνου της ΓΒ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΔ.

Άρα, εάν διχοτομηθεί μία ευθεία γραμμή και κάποια ευθεία προστεθεί ως προέκταση της, τότε το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου όλης της ευθείας και της ευθείας που έχει προστεθεί, του τετραγώνου της ευθείας που έχει προστεθεί, και του τετραγώνου της μισής αρχικής ευθείας είναι ίσο με το άθροισμα του τετράγωνου της μισής ευθείας και της ευθείας που έχει προστεθεί. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 7

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία τότε το άθροισμα των τετραγώνων της ευθείας αυτής και ενός από τα τμήματα της είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου και του τμήματος και του τετραγώνου των υπόλοιπου τμήματος.



Ας έχει τμηθεί η *ευθεία ΑΒ τυχαία στο σημείο Γ. Λέγω ότι το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΑΒ και ΒΓ είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΑΒ και ΒΓ, και του τετραγώνου της ΓΑ.*

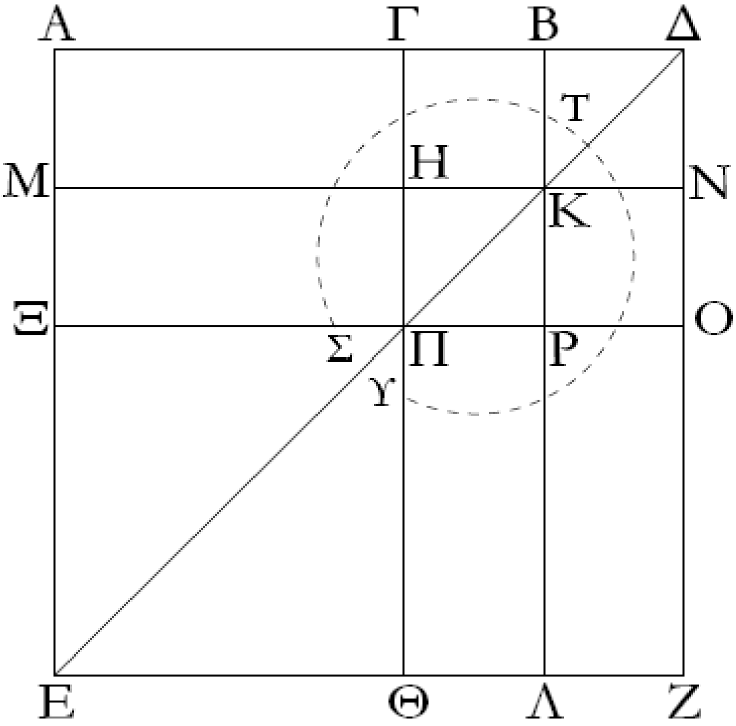
Διότι ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΑΔΕΒ από την ΑΒ και ας έχει γραφεί το λοιπό σχήμα.
Επειδή λοιπόν, το ορθογώνιο ΑΗ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΗΕ, ας προστεθεί και στα δύο το τετράγωνο ΓΖ . Άρα, το ορθογώνιο ΑΖ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΓΕ. Άρα, το άθροισμα του ορθογώνιου ΑΖ και του ορθογώνιου ΓΕ είναι διπλάσιο του ορθογωνίου ΑΖ. Αλλά, το άθροισμα του ορθογώνιου ΑΖ και του ορθογώνιου ΓΕ είναι το άθροισμα του γνώμονα ΚΛΜ και του τετραγώνου ΓΖ. Άρα, ο το άθροισμα του γνώμονα ΚΛΜ και του τετραγώνου ΓΖ είναι διπλάσιο του ΑΖ. Αλλά, το διπλάσιο του ορθογωνίου ΑΖ είναι επίσης δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ και ΒΓ γιατί, η ΒΖ είναι ίση με την ΒΓ.

Άρα, το άθροισμα του γνώμονα ΚΛΜ και του τετραγώνου ΓΖ, είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΑΒ και ΒΓ. Έστω ΔΗ, το οποίο είναι το τετράγωνο της ΑΓ που έχει προστεθεί και στα δύο. Άρα, το άθροισμα του γνώμονα ΚΛΜ και των τετραγώνων ΒΗ και ΗΔ είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΑΒ και ΒΓ και του τετραγώνου της ΑΓ. Αλλά, το άθροισμα του γνώμονα ΚΛΜ και των τετραγώνων ΒΗ και ΗΔ είναι το άθροισμα όλου του ΑΔΕΒ και του ΓΖ, τα οποία είναι τετράγωνα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΒ και ΒΓ είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΑΒ και ΒΓ και του τετραγώνου της ΑΓ.

'Αρα, εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία τότε το άθροισμα των τετραγώνων της ευθείας αυτής και ενός από τα τμήματα της είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου και του τμήματος και του τετραγώνου των υπόλοιπου τμήματος. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 8

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία τότε τέσσερις φορές το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από την ευθεία και ενός από τα τμήματα της ευθείας, και του τετράγωνου του λοιπού τμήματος, είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει γραφεί από την αρχική ευθεία και από το προαναφερθέν τμήμα λαμβανόμενα ως μία ευθεία.



Ας έχει τμηθεί η ευθεία ΑΒ τυχαία στο σημείο Γ. Λέγω ότι τέσσερις φορές το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου υπό των ΑΒ και ΒΓ, και του τετράγωνου της ΑΓ, είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει γραφεί από τις ΑΒ και ΒΓ, σαν μία ευθεία γραμμή.

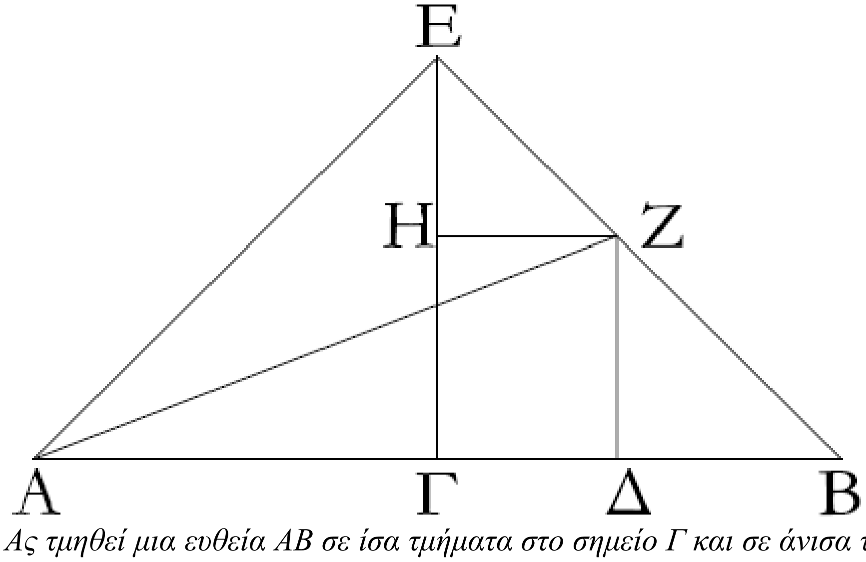
Ας προεκταθεί η ευθεία ΑΒ κατά ΒΔ και ας θεωρηθεί η ΓΒ ίση με την ΒΔ, και ας γραφεί το τετράγωνο ΑΕΖΔ από την ΑΔ, και το υπόλοιπο σχήμα ας έχει δημιουργηθεί διπλό.

Επειδή, η ΓΒ είναι ίση με τη ΒΔ, αλλά η ΓΒ είναι ίση με την ΗΚ και η ΒΔ με την ΚΝ, άρα η ΗΚ είναι επίσης ίση με την ΚΝ. Άρα, για τους ίδιους λόγους, η ΠΡ είναι ίση με το ΡΟ. Επειδή, η ΒΓ είναι ίση με την ΒΔ και η ΗΚ με την ΚΝ, άρα το τετράγωνο ΓΚ είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο ΚΔ και το τετράγωνο ΗΡ με το ΡΝ. Αλλά, το τετράγωνο ΓΚ είναι ίσο με το τετράγωνο ΡΝ διότι είναι παραπληρώματα του παραλληλόγραμμου ΓΟ. Άρα, το τετράγωνο ΚΔ είναι ίσο με το ΗΡ. Άρα, τα τέσσερα τετράγωνα ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ και ΡΝ είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα, τα τέσσερα μαζί, είναι τετραπλάσια του ΓΚ. Πάλι, επειδή η ΓΒ είναι ίση με την ΒΔ, αλλά η ΒΔ είναι ίση με τη ΒΚ, άρα και με την ΓΗ, και η ΓΒ είναι ίση με την ΗΚ. Άρα, και με την ΗΠ, άρα η ΓΗ είναι ίση με την ΗΠ. Επειδή, η ΓΗ είναι ίση με την ΗΠ, και η ΠΡ με την ΡΟ, είναι ίσα και τα ορθογώνια ΑΗ με το ΜΠ και το ΠΛ με το ΡΖ. Αλλά το ορθογώνιο ΜΠ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΠΛ διότι είναι παραπληρώματα του παραλληλόγραμμου ΜΛ. Άρα, το ορθογώνιο ΑΗ είναι επίσης ίσο με το ΡΖ. Άρα, τα τέσσερα ορθογώνια ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ και ΡΖ είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα, τα τέσσερα ορθογώνια μαζί είναι τετραπλάσια του ΑΗ. Έχει δειχθεί ότι και τα τέσσερα ορθογώνια μαζί ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ και ΡΝ είναι τετραπλάσια του ΓΚ. Άρα, τα οκτώ σχήματα μαζί τα οποία περιέχουν τον γνώμονα ΣΤΥ είναι τετραπλάσια του ορθογωνίου ΑΚ. Και επειδή, το ΑΚ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο υπό των ΑΒ και ΒΔ γιατί ΒΚ είναι ίση με την ΒΔ. Άρα, τέσσερις φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο στις ΑΒ και ΒΔ είναι τετραπλάσιο του ορθογωνίου ΑΚ. Όμως έχει δειχθεί ότι ο γνώμονας ΣΤΥ είναι τετραπλάσιος του ορθογωνίου ΑΚ. Άρα, τέσσερις φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο υπό των ΑΒ και ΒΔ είναι ίσο με τον γνώμονα ΣΤΥ. Έστω ΞΘ ίση με το τετράγωνο της ΑΓ, το οποίο έχει προστεθεί και στα δύο. Άρα, τέσσερις φορές το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου υπό των ΑΒ και ΒΔ, και του τετραγώνου της ΑΓ είναι ίσο με τον γνώμονα ΣΤΥ και το τετράγωνο ΞΘ. Αλλά, ο γνώμονας ΣΤΥ και το τετράγωνο ΞΘ είναι όλο το τετράγωνο ΑΕΖΔ, το οποίο είναι αυτό της ΑΔ. Άρα, τέσσερις φορές το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΒ και ΒΔ και του τετραγώνου της ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΔ. Η ΒΔ είναι ίση με την ΒΓ. Άρα, τέσσερις φορές το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΑΒ και ΒΓ και του τετραγώνου της ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΔ, το οποίο είναι το τετράγωνο των ΑΒ και ΒΓ, λαμβανόμενης ως μίας ευθείας γραμμής.

Άρα, εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία τότε τέσσερις φορές το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από την ευθεία και ενός από τα τμήματα της ευθείας, και του τετράγωνου του λοιπού τμήματος, είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει γραφεί από την αρχική ευθεία και από το προαναφερθέν τμήμα λαμβανόμενα ως μία ευθεία. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 9

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα τότε το άθροισμα των τετραγώνων των άνισων τμημάτων της ευθείας είναι ίσο με το διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου της μισής ευθείας και του τετραγώνου της ευθείας που βρίσκεται μεταξύ των τομών.



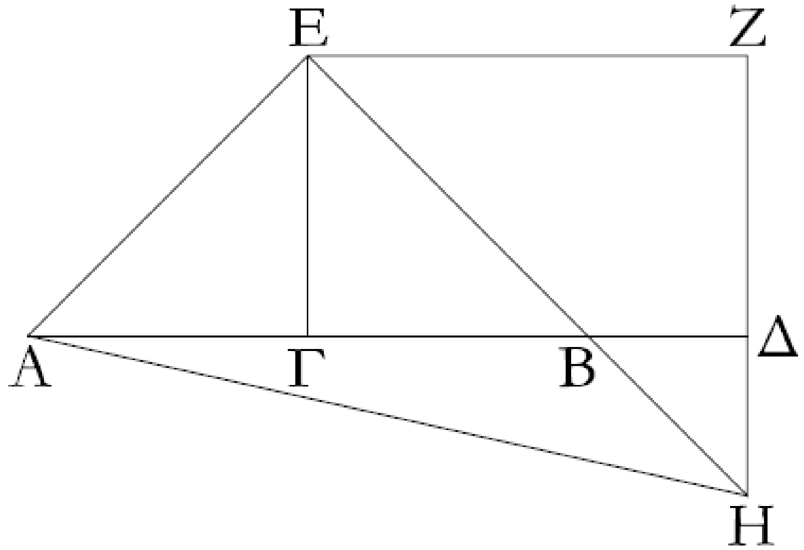
Ας τμηθεί μια ευθεία ΑΒ σε ίσα τμήματα στο σημείο Γ και σε άνισα τμήματα *στο σημείο Δ. Λέγω ότι το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΑΔ και ΔΒ είναι το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ.*

Διότι ας έχει αχθεί η ΓΕ από το σημείο Γ κάθετη στην ΑΒ ίση με καθεμία από τις ΑΓ και ΓΒ, και ας έχουν συνδεθεί η ΕΑ και η ΕΒ. Και ας έχει αχθεί η ΔΖ διερχόμενη από το σημείο Δ παράλληλη στην ΕΓ και ας έχει ενωθεί η ΖΗ διερχόμενη από το σημείο Ζ παράλληλη στην ΑΒ. Και ας έχει ενωθεί η ΑΖ. Και επειδή η ΑΓ είναι ίση με τη ΓΕ, η γωνία ΕΑΓ είναι επίσης ίση με την γωνία ΑΕΓ. Επειδή, η γωνία στο σημείο Γ είναι ορθή, το άθροισμα των υπόλοιπων γωνιών του τριγώνου ΑΕΓ, δηλαδή η γωνία ΕΑΓ και ΑΕΓ είναι ίσες με μία ορθή γωνία. Γι' αυτό το λόγο, οι γωνίες ΓΕΑ και ΓΑΕ είναι η καθεμία ίση με το μισό μιας ορθής. Έτσι, για τους ίδιους λόγους, οι γωνίες ΓΕΒ και ΕΒΓ είναι επίσης ίσες με το μισό μιας ορθής. Άρα, όλη η γωνία ΑΕΒ είναι ορθή γωνία και επειδή η ΗΕΖ είναι το μισό μιας ορθής και η ΕΗΖ είναι ορθή, γιατί είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΕΓΒ, άρα η λοιπή γωνία ΕΖΗ είναι ίση με το μισό μιας ορθής. Άρα, η γωνία ΗΕΖ είναι ίση με την ΕΖΗ. Άρα, η πλευρά ΕΗ είναι επίσης ίση με την πλευρά ΗΖ. Πάλι, επειδή η γωνία στο σημείο Β είναι το μισό μιας ορθής και η γωνία ΖΔΒ είναι μια ορθή, γιατί είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΕΓΒ. Άρα η λοιπή γωνία ΒΖΔ είναι το μισό της ορθής. Άρα, η γωνία στο σημείο Β είναι ίση με τη ΔΖΒ. Άρα, η πλευρά ΖΔ είναι επίσης ίση με την πλευρά ΔΒ. Επειδή η ΑΓ είναι ίση με τη ΓΕ, το τετράγωνο της ΑΓ είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο από την ΓΕ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΑΓ και ΓΕ είναι δύο φορές το τετράγωνο της ΑΓ. Το τετράγωνο της ΕΑ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΕ, γιατί η γωνία ΑΓΕ είναι ορθή. Άρα, το τετράγωνο της ΕΑ είναι δύο φορές το τετράγωνο της ΑΓ. Πάλι, επειδή η ΕΗ είναι ίση με την ΗΖ το τετράγωνο της ΕΗ είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο της ΗΖ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΗ και ΗΖ είναι δύο φορές το τετράγωνο της ΗΖ. Το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΕΗ και ΗΖ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΖ. Άρα, το τετράγωνο της ΕΖ είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της ΗΖ. Η ΗΖ είναι ίση με τη ΓΔ. Άρα, το τετράγωνο της ΕΖ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΓΔ. Το τετράγωνο της ΕΑ είναι επίσης δύο φορές το τετράγωνο της ΑΓ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΕ και ΕΖ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ. Το τετράγωνο της ΑΖ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΕ και ΕΖ γιατί η γωνία ΑΕΖ είναι ορθή. Άρα, το τετράγωνο της ΑΖ είναι δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ. Το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΖ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΖ. Η γωνία στο σημείο Δ είναι ορθή. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΖ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ. Η ΔΖ είναι ίση με τη ΔΒ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΒ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ.

Άρα, εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα τότε το άθροισμα των τετραγώνων των άνισων τμημάτων της ευθείας είναι ίσο με το διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου της μισής ευθείας και του τετραγώνου της ευθείας που βρίσκεται μεταξύ των τομών.

Πρόταση 10

Εάν διχοτομηθεί μια ευθεία γραμμή και κάποια ευθεία προστεθεί ως προέκταση της, τότε το άθροισμα του τετραγώνου όλης της ευθείας και της ευθείας που έχει προστεθεί, και του τετραγώνου της ευθείας που έχει προστεθεί είναι διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου της μισής ευθείας και του τετραγώνου που γράφεται από την μισή ευθεία και την ευθεία που έχει προστεθεί.



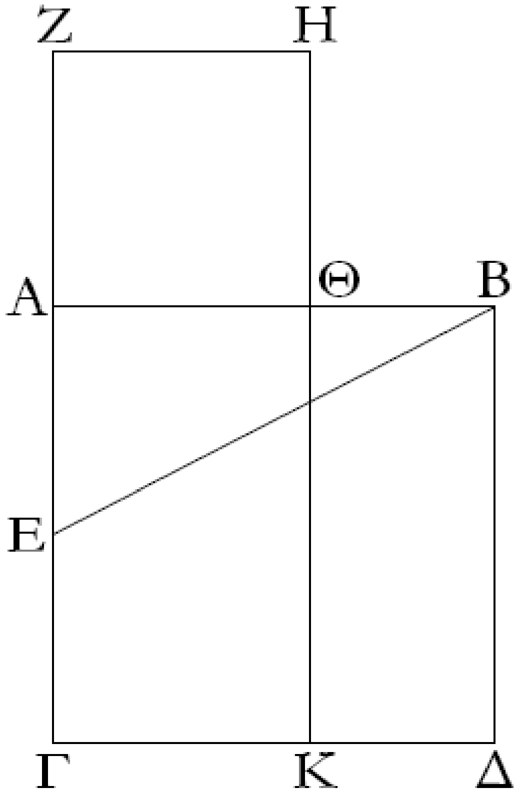
Ας έχει διχοτομηθεί μια ευθεία στο σημείο Γ και ας προεκταθεί η ευθεία αυτή κατά ΒΔ. Λέγω ότι το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΑΔ και ΔΒ είναι δύο φορές το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΑΓ και ΓΔ.

Διότι ας έχει αχθεί η ΓΕ από το σημείο Γ κάθετη στην ΑΒ ίση με κάθε μία από τις ΑΓ και ΓΒ. Ας έχουν ενωθεί η ΕΑ και η ΕΒ. Ας έχει αχθεί η ΕΖ διερχόμενη από το Ε, παράλληλη στην ΑΔ και ας έχει αχθεί η ΖΔ διερχόμενη από το Δ παράλληλη στην ΓΕ. Επειδή η ευθεία ΕΖ τέμνει τις παράλληλες ΕΓ, ΖΔ, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ΓΕΖ και ΕΖΔ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα, το άθροισμα των ΖΕΒ και ΕΖΔ είναι μικρότερο από δύο ορθές και οι ευθείες που έχουν παραχθεί από τις εσωτερικές γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι λιγότερο από δύο ορθές, τέμνονται στην προέκταση τους. Άρα, οι ευθείες ΕΒ, ΖΔ προεκτεταμένες από τα σημεία Β και Δ τέμνονται. Έστω ότι αυτές προεκτείνονται και τέμνονται στο σημείο Η και ας έχει ενωθεί η ΑΗ. Επειδή η ΑΓ είναι ίση με την ΓΕ, η γωνία ΕΑΓ είναι επίσης ίση με την γωνία ΑΕΓ και η γωνία στο σημείο Γ είναι ορθή. Άρα, κάθε μία από τις ΑΕΓ και ΕΑΓ είναι ίσες με μισή ορθή. Έτσι για τον ίδιο λόγο κάθε μία από τις ΓΕΒ και ΕΒΓ είναι επίσης ίσες με μισή ορθή. Άρα, η γωνία ΑΕΒ είναι ορθή και επειδή η ΕΒΓ είναι μισή ορθή, και η ΔΒΗ είναι επίσης μισή ορθή. Η ΒΔΗ είναι επίσης ορθή γι' αυτό το λόγο είναι ίση με την ΔΓΕ γιατί είναι εναλλάξ. Άρα, η λοιπή γωνία ΔΗΒ είναι μισή ορθή. Άρα, η ΔΗΒ είναι ίση με την ΔΒΗ. Άρα, η πλευρά ΒΔ είναι επίσης ίση με την ΗΔ. Πάλι, επειδή η ΕΗΖ είναι μισή ορθή και η γωνία στο σημείο Ζ είναι ορθή γιατί είναι ίση με την απέναντι γωνία στο Γ, άρα η γωνία ΖΕΗ που απομένει είναι μισή ορθή. Άρα, η γωνία ΕΗΖ είναι ίση με την γωνία ΖΕΗ. Άρα, η πλευρά ΗΖ είναι ίση με την ΕΖ. Επειδή, η ΕΓ είναι ίση με την ΓΑ, το τετράγωνο της ΕΓ είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο της ΓΑ. Άρα το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΓ και ΓΑ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΓΑ. Το τετράγωνο της ΕΑ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΓ και ΓΑ. Άρα, το τετράγωνο της ΕΑ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΑΓ. Πάλι, επειδή η ΖΗ είναι ίση με την ΕΖ, το τετράγωνο της ΖΗ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΖΕ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΗΖ και ΖΕ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΕΖ και του αθροίσματος των τετραγώνων των ΗΖ, ΖΕ. Άρα, το τετράγωνο της ΕΗ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΕΖ. Η ΕΖ είναι ίση με την ΓΔ. Άρα, το τετράγωνο της ΕΗ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΓΔ. Όμως, έχει ήδη δειχθεί ότι το τετράγωνο της ΕΑ είναι διπλάσιο του τετραγώνου της ΑΓ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΕ και ΕΗ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ. Το τετράγωνο της ΑΗ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΕ και ΕΗ. Άρα, το τετράγωνο της ΑΗ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ. Το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΗ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΗ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ, ΔΗ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ. Το ΔΗ είναι ίσο με το ΔΒ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΒ είναι διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΓ και ΓΔ.

Άρα, εάν διχοτομηθεί μια ευθεία γραμμή και κάποια ευθεία προστεθεί ως προέκταση της, τότε το άθροισμα του τετραγώνου όλης της ευθείας και της ευθείας που έχει προστεθεί, και του τετραγώνου της ευθείας που έχει προστεθεί είναι διπλάσιο του αθροίσματος του τετραγώνου της μισής ευθείας και του τετραγώνου που γράφεται από την μισή ευθεία και την ευθεία που έχει προστεθεί.

Πρόταση 11

Να τμηθεί μία δοθείσα ευθεία έτσι ώστε το περιεχόμενο ορθογώνιο ολόκληρης της ευθείας και ενός εκ των τμημάτων της ευθείας να είναι ίσο με το τετράγωνο του υπόλοιπου τμήματος.



Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ. Άρα, πρέπει η ΑΒ να τμηθεί ώστε το περιεχόμενο ορθογώνιο της ευθείας και ενός από τα τμήματα της να είναι ίσο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος.

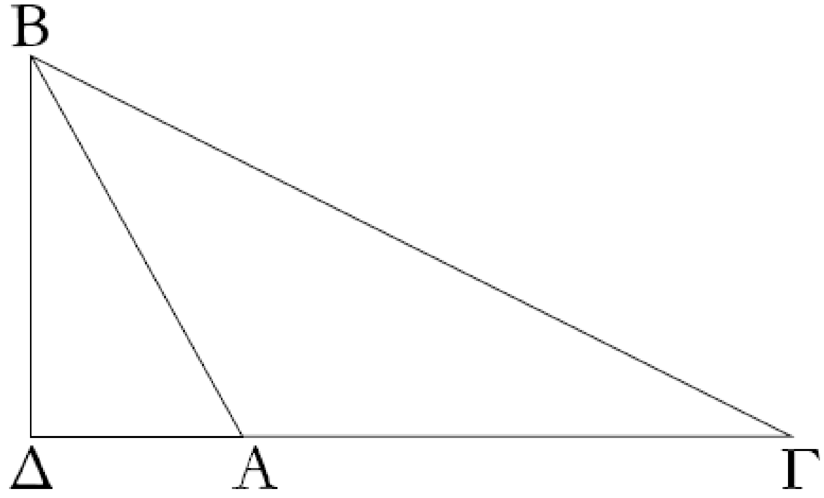
Διότι ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΑΒΔΓ από την ΑΒ και ας διχοτομηθεί η ΑΓ στο σημείο Ε και ας έχει ενωθεί η ΒΕ. Και ας έχει προεκταθεί η ΓΑ στο Ζ με την ΕΖ ίση με την ΒΕ. Ας έχει γραφεί το τετράγωνο ΖΘ από την ΑΖ και ας προεκταθεί η ΗΘ στο σημείο Κ. Λέγω ότι η ΑΒ έχει τμηθεί στο Θ έτσι ώστε να το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ, ΒΘ να είναι ίσο με το τετράγωνο από την ΑΘ.

Επειδή, η ευθεία γραμμή ΑΓ έχει διχοτομηθεί στο σημείο Ε και η ΖΑ έχει προστεθεί σ' αυτήν, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΓΖ και ΖΑ, και του τετράγωνου της ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΖ. Η ΕΖ είναι ίση με την ΕΒ. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΓΖ και ΖΑ και του τετραγώνου της ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΒ. Αλλά το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΒ, γιατί η γωνία στο σημείο Α είναι ορθή. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΓΖ και ΖΑ και του τετράγωνου της ΑΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΕ. Έστω ότι έχει αφαιρεθεί το τετράγωνο της ΑΕ και από τα δύο. Άρα, το λοιπό περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΖ και ΖΑ είναι ίσο με το τετράγωνο υπό την ΑΒ. Η ΖΚ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΖ και ΖΑ γιατί, η ΑΖ είναι ίση με την ΖΗ. Το ΑΔ είναι το τετράγωνο της ΑΒ. Άρα, το ορθογώνιο ΖΚ είναι ίσο με το τετράγωνο ΑΔ. Αφαιρείται το ορθογώνιο ΑΚ και από τα δύο. Άρα, το λοιπό ορθογώνιο ΖΘ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΘΔ. Το ΘΔ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ και ΒΘ. Γι' αυτό η ΑΒ είναι ίση με την ΒΔ. Το ΖΘ είναι το τετράγωνο της ΑΘ. Άρα, το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ και ΒΘ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΘΑ.

Άρα, η δοθείσα ευθεία ΑΒ έχει τμηθεί στο σημείο Β , έτσι ώστε το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΒ και ΒΘ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΘΑ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 12

Σε αμβλυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει της αμβλείας γωνίας είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των τετραγώνων των περιεχομένων πλευρών της αμβλείας γωνίας κατά το διπλάσιο ορθογώνιο που περιέχεται από τη μια από τις δύο πλευρές της αμβλείας γωνίας στην οποία πέφτει κάθετα μια ευθεία και από την ευθεία που τέμνεται εξωτερικά του τριγώνου από την κάθετη ευθεία προς την αμβλεία γωνία.



Έστω το αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με αμβλεία γωνία την ΒΑΓ. Ας αχθεί η ΒΔ από το σημείο Β κάθετη στην προέκταση της ΓΑ. Λέγω ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων από τις ΒΑ και Α κατά δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΑ και ΑΔ.

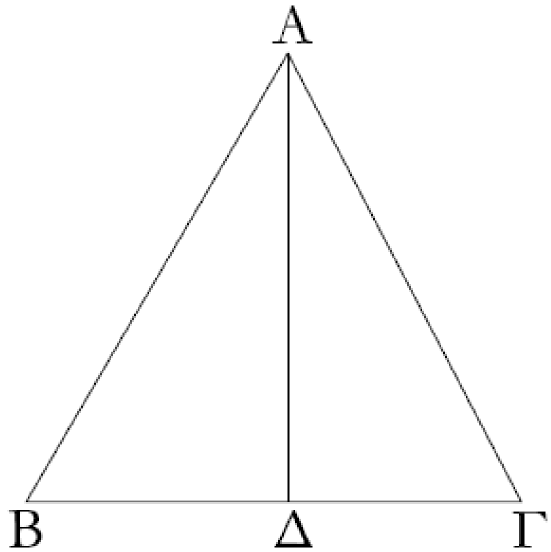
Επειδή η ΓΔ έχει τμηθεί τυχαία στο σημείο Α, το τετράγωνο της ΔΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΑ και ΑΔ και δύο φορές του περιεχόμενου ορθογώνιο από τις ΓΑ και ΑΔ. Προστίθεται το τετράγωνο της ΔΒ και στις δύο.

Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΔ και ΔΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΑ, ΑΔ και ΔΒ και δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΑ και ΑΔ. Αλλά, το τετράγωνο της ΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΔ και ΔΒ γιατί η γωνία Δ είναι ορθή. Το τετράγωνο της ΑΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΒ. Άρα, το τετράγωνο της ΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΑ, ΑΒ και δύο φορές του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΓΑ και ΑΔ. Άρα, το τετράγωνο της ΓΒ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΑ και ΑΒ κατά δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΑ και ΑΔ.

Άρα, σε αμβλυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει της αμβλείας γωνίας είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος των τετραγώνων των περιεχομένων πλευρών της αμβλείας γωνίας κατά το διπλάσιο ορθογώνιο που περιέχεται από τη μια από τις δύο πλευρές της αμβλείας γωνίας στην οποία πέφτει κάθετα μια ευθεία και από την ευθεία που τέμνεται εξωτερικά του τριγώνου από την κάθετη ευθεία προς την αμβλεία γωνία. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 13

Σε οξυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει στην οξεία γωνία είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχονται στην οξεία γωνία κατά δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τη μία των πλευρών της οξείας γωνίας στην οποία πέφτει κάθετα μία ευθεία η οποία έχει τμηθεί εσωτερικά του τριγώνου και από την κάθετη ευθεία γραμμή προς την οξεία γωνία.



Έστω ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο έχει την οξεία γωνία στο σημείο Β. Ας έχει αχθεί η ΑΔ από το σημείο Α, κάθετη στην ΒΓ. Λέγω ότι το τετράγωνο της ΑΓ είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΒ και ΒΑ κατά δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΒ και ΒΔ.

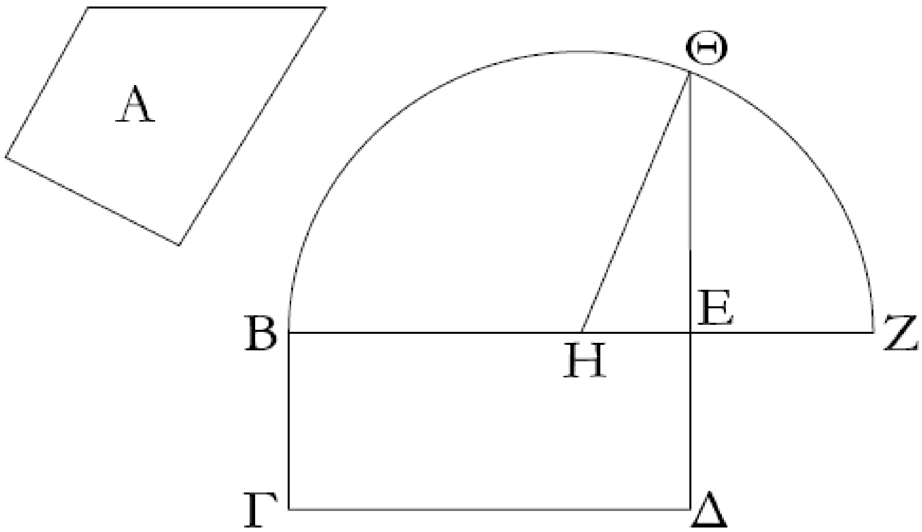
Διότι επειδή η ευθεία γραμμή ΓΒ έχει τμηθεί τυχαία στο σημείο Δ, τότε το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΒ και ΒΔ είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΓΒ και ΒΔ και του τετραγώνου της ΔΓ. Έστω ότι το τετράγωνο της ΔΑ έχει προστεθεί και στα δύο. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΒ, ΒΔ και ΔΑ είναι ίσο με το διπλάσιο του περιεχόμενου ορθογωνίου από τις ΓΒ και ΒΔ και του αθροίσματος των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΓ. Αλλά, το τετράγωνο της ΑΒ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΔ και ΔΑ γιατί η γωνία στο σημείο Δ είναι ορθή.

Το τετράγωνο της ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΔ και ΔΓ. Άρα, το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΒ και ΒΑ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΓ κατά δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΒ και ΒΔ. Έτσι όλο το τετράγωνο της ΑΓ είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΒ και ΒΑ κατά το διπλάσιο του περιεχομένου ορθογωνίου από τις ΓΒ και ΒΔ.

Άρα, εάν σε οξυγώνια τρίγωνα, τα τετράγωνα από τις πλευρές που υποτείνουν στην οξεία γωνία είναι μικρότερα από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχονται στην οξεία γωνία με δύο φορές το περιεχόμενο ορθογώνιο μίας εκ των πλευρών της οξείας γωνίας, στην οποία πίπτει κάθετα μία ευθεία η οποία έχει τμηθεί εσωτερικά του τριγώνου με την κάθετη ευθεία γραμμή προς την οξεία γωνία.

Πρόταση 14

Να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσο με δοθέν σχήμα.



Έστω Α το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Άρα, ζητείται να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο ίσο με το ευθύγραμμο σχήμα Α.

Κατασκευάζεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΒΔ, ίσο με το ευθύγραμμο σχήμα Α. Άρα, εάν η ΒΕ είναι ίση με την ΕΔ τότε αυτό που έχει ζητηθεί έχει επιτευχθεί. Το τετράγωνο ΒΔ έχει κατασκευαστεί, ίσο με το ευθύγραμμο σχήμα Α. Εάν όχι, τότε μια από τις ευθείες ΒΕ ή ΕΔ είναι μεγαλύτερη από την άλλη. Έστω η ΒΕ να είναι μεγαλύτερη και έστω ότι έχει προεκταθεί στο Ζ με την ΕΖ ίση με την ΕΔ. Ας διχοτομηθεί η ΒΖ στο σημείο Η. Με κέντρο το Η και ακτίνα μια από τις ευθείες ΗΒ ή ΗΖ ας έχει γραφεί το ημικύκλιο ΒΘΖ. Ας έχει προεκταθεί η ΔΕ στο Θ και ας ενωθεί με την ΗΘ.

Επειδή η ευθεία ΒΖ έχει τμηθεί σε ίσα τμήματα στο Η και σε άνισα στο Ε, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΒΕ και ΕΖ και το τετράγωνο της ΕΗ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΗΖ. Η ΗΖ είναι ίση με την ΗΘ. Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΒΕ και ΕΖ και το τετράγωνο της ΗΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΗΘ. Το άθροισμα των τετραγώνων των ΘΕ και ΕΗ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΗΘ.

Άρα, το άθροισμα του περιεχόμενου ορθογώνιου από τις ΒΕ και ΕΖ και το τετράγωνο της ΗΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΘΕ και ΕΗ. Έστω ότι το τετράγωνο της ΗΕ έχει αφαιρεθεί και από τα δύο. Άρα, το λοιπό περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΒΕ και ΕΖ , είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΘ. Όμως, το ΒΔ είναι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΒΕ και ΕΖ γιατί η ΕΖ είναι ίση με την ΕΔ.

Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΔ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΘΕ. Το ΒΔ είναι ίσο με το ευθύγραμμο σχήμα Α. Άρα το ευθύγραμμο σχήμα Α είναι επίσης ίσο με το τετράγωνο το οποίο κατασκευάζεται από την ΕΘ.

Άρα, ένα τετράγωνο, το οποίο κατασκευάζεται από την ΕΘ, έχει γραφεί ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Ο.Ε.Π.