<u>Μ207-ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-Χειμερινό εξάμηνο 2009-10</u>

ΕΥΚΛΕΙΔΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ γ'

Αλεξόπουλος Γιώργος	**3466**
Γέροντα Βασιλική	**3290**
Θεοδωρής Ευθύμιος	**3122**
Καλή Ειρήνη	**3335**
Κωνσταντινίδου Φωτεινή	**3334**
Λαζάρου Δημήτρης	**3202**
Παπαδιώτη Σπυριδούλα	**2839**
Παππάς Ιωάννης	**3388**

Ορισμοί

1. Ίσοι κύκλοι είναι αυτοί των οποίων οι διάμετροι είναι ίσες ή οι αποστάσεις από τα κέντρα τους είναι ίσες.

2. Μία ευθεία λέγεται ότι εφάπτεται σ' ένα κύκλο, αν όταν τον συναντά και προεκτείνεται δεν τον τέμνει.

3. Εφαπτόμενοι κύκλοι λέγονται αυτοί οι οποίοι συναντούν ο ένας τον άλλον χωρίς να τέμνονται.

4. Σε έναν κύκλο, οι ευθείες λέγονται ότι ισαπέχουν από το κέντρο, όταν οι ευθείες που άγονται κάθετα σε αυτές είναι ίσες.

5. Και μια ευθεία λέγεται ότι απέχει περισσότερο όταν πέφτει επάνω της η μεγαλύτερη κάθετος.

6. Τμήμα κύκλου είναι το περιεχόμενο σχήμα από μια ευθεία και την περιφέρεια του κύκλου.

7. Γωνία τμήματος, είναι η περιεχόμενη από κάποια ευθεία και την περιφέρεια του κύκλου.

8. Γωνία σε τμήμα είναι η περιεχόμενη γωνία ανάμεσα στις ευθείες που άγονται από σημείο της περιφέρειας μέχρι τα άκρα της ευθείας η οποία είναι βάση του τμήματος.

9. Όταν,οι ευθείες που περιέχουν τη γωνία τέμνουν την περιφέρεια, λέγεται ότι η γωνία βαίνει σε αυτήν την περιφέρεια.

10. Τομέας κύκλου είναι, το περιεχόμενο σχήμα από την περιφέρεια και τις ευθείες που σχηματίζουν την γωνία από το κέντρο.

11. Όμοια τμήματα κύκλων είναι αυτά που επιδέχονται ίσες γωνίες ή σε αυτά οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

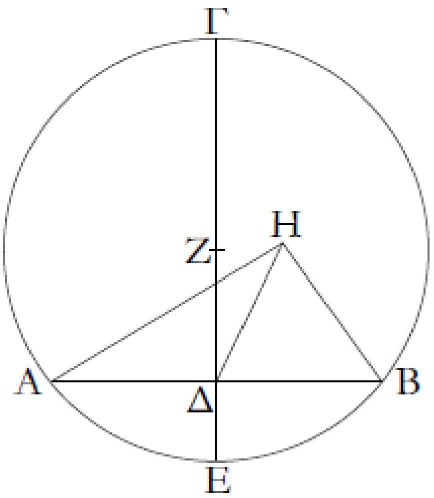
Πρόταση 1

Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ. Ζητείται να βρεθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Ας έχει αχθεί μέσα σε αυτόν τυχαία η ευθεία ΑΒ. Και και ας έχει διχοτομηθεί στο σημείο Δ. Και από το Δ ας έχει αχθεί κάθετη η ΔΓ στην ΑΒ.
Προεκτείνεται η ΔΓ μέχρι το Ε , και η ΓΕ διχοτομείται στο Ζ. Λέγω ότι το Ζ είναι το κέντρο του ΑΒΓ [κύκλου].

Διότι εάν όχι, εάν αυτό είναι δυνατόν, έστω ότι είναι το Η, και ας έχουν αχθεί οι ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Και επειδή η ΑΔ είναι ίση με την ΔΒ, και είναι κοινή η ΔΗ, οι ΑΔ, ΔΗ είναι ίσες με τις ΒΔ, ΔΗ αντίστοιχα. Και η βάση ΗΑ είναι ίση με τη βάση ΗΒ, καθώς και οι δύο άγονται από το κέντρο. 'Άρα, η γωνία ΑΔΗ είναι ίση με την γωνία ΗΔΒ.

Όταν μια ευθεία τέμνει μια άλλη έτσι ώστε εφεξής γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή. Άρα, η γωνία ΗΔΒ είναι ορθή. Και η γωνία ΖΔΒ είναι επίσης ορθή. Άρα, η γωνία η ΖΔΒ είναι ίση με την ΗΔΒ, η μεγαλύτερη με τη μικρότερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, το σημείο Η δεν είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ. Όμοια δείχνεται ότι κανένα άλλο δεν είναι, εκτός του Ζ.



Άρα το σημείο Ζ είναι το κέντρο του [κύκλου] ΑΒΓ.

Πόρισμα

Από αυτό είναι φανερό ότι αν σε ένα κύκλο μια ευθεία γραμμή διχοτομεί μια άλλη γραμμή σε ορθές γωνίες, τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στην τομή. Ο.Ε.Π.

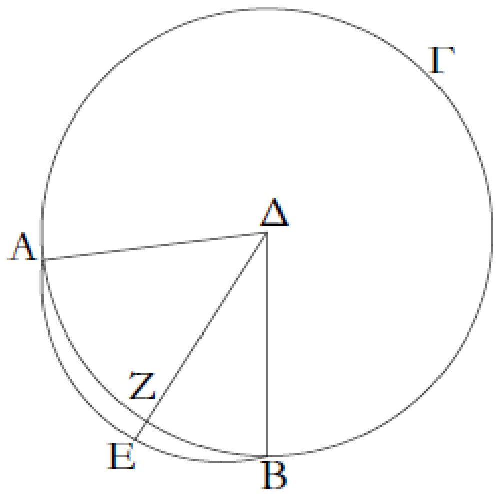
Πρόταση 2

Ας έχουν ληφθεί δυο τυχαία σημεία της περιφέρειας του κύκλου,τότε η ευθεία που ενώνει αυτά τα δυο σημεία προσπίπτει μέσα στον κύκλο.

Έστω κύκλος ΑΒΓ, και ας έχουν ληφθεί δυο τυχαία σημεία της περιφέρειάς του, τα Α,Β. Λέγω ότι η ευθεία που ενώνει το Α με το Β προσπίπτει μέσα στον κύκλο.

Διότι εάν όχι, εάν αυτό είναι δυνατόν, έστω ότι προσπίπτει έξω από τον κύκλο, όπως η ΑΕΒ. Και ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ και έστω ότι είναι το Δ. Ας έχουν αχθεί οι ΔΑ και ΔΒ και η ευθεία ΔΖΕ.

Άρα, επειδή η ΔΑ είναι ίση με τη ΔΒ, η γωνία ΔΑΕ είναι ίση με την ΔΒΕ. Και επειδή στο τρίγωνο ΔΑΕ έχει αχθεί η πλευρά ΑΕΒ, η γωνία ΔΕΒ είναι μεγαλύτερη της ΔΑΕ. Η ΔΑΕ είναι ίση με την ΔΒΕ. Η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά. Άρα, η ΔΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΕ. Η ΔΒ είναι ίση με τη ΔΖ. Άρα η ΔΖ είναι μεγαλύτερη της ΔΕ, η μικρότερη με τη μεγαλύτερη, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, η ευθεία που ενώνει τα Α,Β δεν θα πέσει εκτός του κύκλου. Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν θα πέσει ούτε επάνω στην περιφέρεια. Άρα, θα βρίσκεται μέσα στην περιφέρεια.



Άρα, αν στον κύκλο ληφθούν δυο τυχαία σημεία, τότε η ευθεία που τα ενώνει προσπίπτει μέσα στον κύκλο. Ο.Ε.Π.

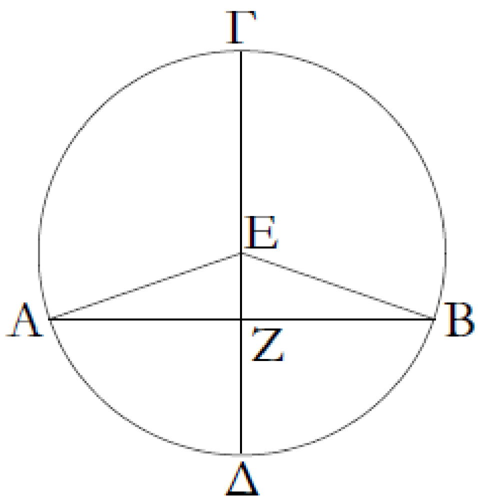
Πρόταση 3 .

Σε έναν κύκλο εάν μια ευθεία που περνάει από το κέντρο του διχοτομεί μια άλλη που δεν περνάει από το κέντρο, τότε την τέμνει σε ορθές γωνίες. Και αν την τέμνει σε ορθές γωνίες τότε την διχοτομεί.

Έστω κύκλος ΑΒΓ και εντός του κύκλου ευθεία ΓΔ που περνά από το κέντρο και τέμνει την ευθεία ΑΒ που δεν περνά από το κέντρο στο μέσο της, στο σημείο Ζ. Λέγω ότι την τέμνει και σε ορθές γωνίες.

Ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ, έστω ότι είναι το Ε, και ας έχουν αχθεί οι ΕΑ και ΕΒ.

Και επειδή η ΑΖ ισούται με τη ΖΒ και η ΖΕ είναι κοινή, και η βάση ΕΑ είναι ίση με την βάση ΕΒ. Η γωνία ΑΖΕ ισούται με την γωνία ΒΖΕ. Όταν μια ευθεία τέμνει μια άλλη έτσι ώστε οι εφεξής γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή. Άρα, κάθε μια από τις ΑΖΕ και ΒΖΕ είναι ορθή. Άρα η ΓΔ που περνάει από το κέντρο του κύκλου τέμνει την ΑΒ η οποία δεν περνάει από το κέντρο στο μέσο σε ορθές γωνίες.



Έστω ότι η ΓΔ τέμνει την ΑΒ σε ορθές γωνίες. Λέγω ότι και τη διχοτομεί, το όποιο σημαίνει ότι η ΑΖ ισούται με τη ΖΒ.

Από κατασκευή, επειδή η ΕΑ είναι ίση με την ΕΒ, είναικαι η γωνία ΕΑΖ ίση με την ΕΒΖ. Και η ορθή γωνία ΑΖΕ ισούται με την ορθή γωνία ΒΖΕ. Άρα τα ΕΑΖ και ΕΖΒ είναι δυο τρίγωνα που έχουν δυο γωνίες ίσες και μια πλευρά ίση, την κοινή ΕΖ, η οποία είναι υποτείνουσα σε μια από τις ίσες γωνίες. Άρα θα έχουν τις υπόλοιπες πλευρές αντίστοιχα ίσες. Άρα η ΑΖ είναι ίση με την ΖΒ.

Άρα, σε έναν κύκλο εάν μια ευθεία που περνάει από το κέντρο του διχοτομεί μια άλλη που δεν περνάει από το κέντρο, τότε την τέμνει σε ορθές γωνίες. Και αν την τέμνει σε ορθές γωνίες τότε την διχοτομεί. Ο.Ε.Δ.

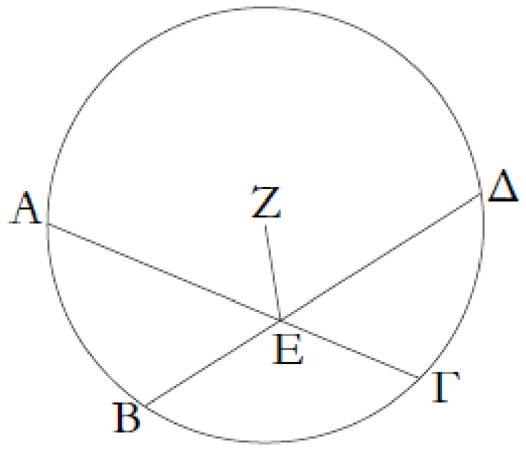
Πρόταση 4

Σε έναν κύκλο αν δυο ευθείες τέμνουν η μια την άλλη χωρις να διέρχονται από το κέντρο, τότε δε διχοτομούνται.

Έστω κύκλος ΑΒΓΔ και εντός του κύκλου δυο ευθείες ΓΑ και ΒΔ οι οποίες τέμνουν η μια την άλλη στο Ε χωρίς να διέρχονται από το κέντρο του. Λέγω ότι δε διχοτομούνται.

Διότι, εαν αυτό είναι δυνατό, ας έχουν διχοτομηθεί μεταξύ τους   ώστε η ΑΕ να ισούται με την ΕΓ και η ΒΕ με την ΕΔ. Και ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ, έστω το Ζ και ας έχει αχθεί η ΖΕ.

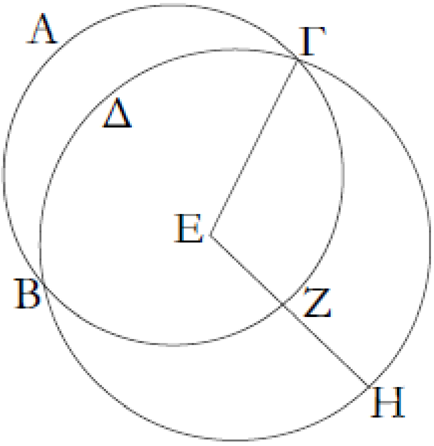
Επειδή λοιπόν η ΖΕ είναι μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο και διχοτομεί την ΑΓ που δε διέρχεται από το κέντρο και την τέμνει σε ορθές γωνίες, η ΖΕΑ είναι ορθή. Πάλι, επειδή η ευθεία ΖΕ διχοτομεί την ευθεία ΒΔ, την τέμνει σε ορθές γωνίες. Άρα η ΖΕΒ είναι ορθή γωνία. Δείχθηκε ότι και η ΖΕΑ είναι ορθή, άρα η ΖΕΑ είναι ίση με την ΖΕΒ, η μικρότερη με τη μεγαλύτερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η ΑΓ δε διχοτομεί τη ΒΔ.



Αρα σε έναν κύκλο αν δυο ευθείες τέμνουν η μια την άλλη χωρίς να διέρχονται από το κέντρο, τότε δε διχοτομούνται.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 5

Εάν δυο κύκλοι τέμνουν ο ένας το άλλον, τότε δεν έχουν το ίδιο κέντρο.



Έστω δυο κύκλοι ΑΒΓ και ΓΔΗ που τέμνουν ο ένας το άλλον στα σημεία Β και Γ. Λέγω ότι δεν θα έχουν το ίδιο κέντρο.

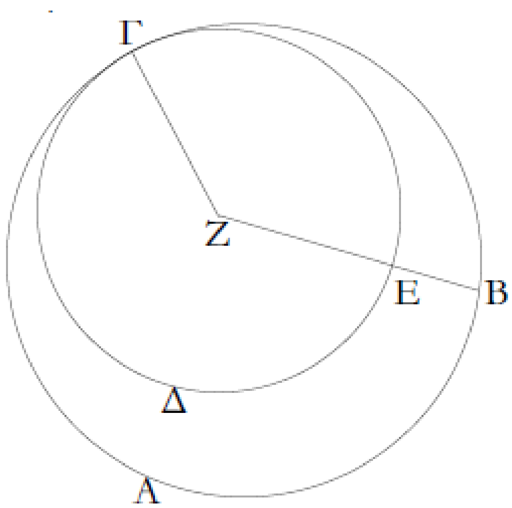
Διότι, εάν αυτό είναι δυνατό, έστω οτι είναι το Ε και ας έχουν αχθεί η ΕΓ και τυχαία η ΕΖΗ. Και επειδή το Ε είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ, η ΕΓ είναι ίση με την ΕΖ. Πάλι επειδή το Ε είναι το κέντρο του κύκλου ΓΔΗ, η ΕΓ θα είναι ίση με την ΕΗ. Δείχθηκε ότι η ΕΓ είναι ίση με την ΕΖ. Άρα, η ΕΖ είναι επίσης ίση με τη ΕΗ, η μικρότερη με τη μεγαλύτερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το σημείο Ε δεν είναι το κοινό κέντρο των κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΗ.

Άρα, αν δυο κύκλοι τέμνουν ο ένας τον άλλον δεν θα έχουν το ίδιο κέντρο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 6

Αν δυο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους, δεν έχουν το ίδιο κέντρο.

Έστω ότι οι δυο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΕ που εφάπτονται μεταξύ τους στο σημείο Γ. Λέγω ότι αυτοί δεν έχουν το ίδιο κέντρο.



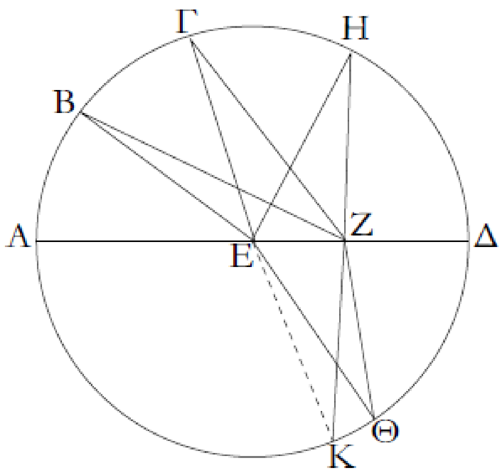
Διότι, εάν αυτό είναι δυνατό, έστω ότι είναι το Ζ, και ας έχουν αχθεί η ΖΓ και η ΖΕΒ τυχαία.

Επειδή το σημείο Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ, η ΖΓ είναι ίση με τη ΖΒ. Πάλι επειδή το σημείο Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΓΔΕ, η ΖΓ είναι ίση με τη ΖΕ. Δείχθηκε οτι η ΖΓ είναι ίση με τη ΖΒ. Άρα, η ΖΕ είναι ίση με τη ΖΒ, η μικρότερη με τη μεγαλύτερη, το όποιο είναι αδύνατο. Άρα το Ζ δεν είναι το κέντρο των κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΕ.

Άρα, αν δυο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους δεν έχουν το ίδιο κέντρο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 7

Εάν σε κύκλο ληφθεί επί της διαμέτρου ένα σημείο διαφορετικό από το κέντρο του και από αυτό προσπίπτουν ευθείες προς τον κύκλο, τότε η μέγιστη είναι αυτή στην οποία βρίσκεται το κέντρο και ελάχιστη η υπόλοιπη. Για τις άλλες, αυτές που είναι πλησιέστερα στο κέντρο είναι μεγαλύτερες από αυτές που είναι πιο μακριά. Μόνο δύο είναι ίσες απο το σημείο που προσπίπτουν στον κύκλο, κάθε μια εκατέρωθεν της ελάχιστης.



Έστω κύκλος ΑΒΓΔ με διάμετρο την ΑΔ και στην ΑΔ ας έχει ληφθεί σημείο Ζ, διαφορετικό από το κέντρο του κύκλου. Έστω Ε το κέντρο του κύκλου. Και από το Ζ προς τον κύκλο προσπίπτουν οι ευθείες ΖΒ , ΖΓ, ΖΗ. Λέγω ότι η ΖΑ είναι η μέγιστη και η ΖΔ είναι η ελάχιστη. Και για τις υπόλοιπες, η ΖΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΖΓ και η ΖΓ είναι μεγαλύτερη από την ΖΗ.

Ας έχουν αχθεί οι ΒΕ, ΓΕ , ΗΕ. Επειδή για κάθε τρίγωνο το άθροισμα των δύο πλευρών είναι μεγαλύτερο από την τρίτη, το άθροισμα των ΕΒ και η ΕΖ είναι μεγαλύτερο από την ΒΖ. Η ΑΕ είναι ίση με την ΒΕ (άρα οι ΒΕ και ΕΖ είναι ίσες με την ΑΖ). Άρα η ΑΖ είναι μεγαλύτερη από την ΒΖ. Πάλι, επειδή η ΒΕ είναι ίση με την ΓΕ και η ΖΕ είναι κοινή, οι δυο ευθείες ΒΕ και ΕΖ είναι ίσες με τις ευθείες ΓΕ ,ΕΖ ανα δύο. Αλλά η γωνία ΒΕΖ είναι μεγαλύτερη από την γωνία ΓΕΖ, άρα η βάση ΒΖ είναι μεγαλύτερη από την βάση ΓΖ. Όμοια για τους ιδίους λόγους η ΓΖ είναι μεγαλύτερη από την ΖΗ.

Πάλι, επειδή το άθροισμα των ΗΖ και η ΖΕ είναι μεγαλύτερο από την ΕΗ και η ΕΗ είναι ίση με την ΕΔ, το άθροισμα των ΗΖ και ΖΕ είναι μεγαλύτερο από την ΕΔ. Η κοινή ΕΖ αφαιρείται, άρα η λοιπή ΗΖ είναι μεγαλύτερη από την λοιπή ΖΔ. Άρα η ΖΑ είναι η μέγιστη και η ΖΔ είναι η ελάχιστη. Και η ΖΒ είναι μικρότερη από τη ΖΓ και η ΖΓ είναι μικρότερη από τη ΖΗ.

Λέγω ότι από το σημείο Ζ μονό δύο ίσες ευθείες θα προσπίπτουν στον κύκλο ΑΒΓΔ, κάθε μια εκατέρωθεν της ελάχιστης ΖΔ. Ας έχουν συσταθεί πάνω στην ευθεία

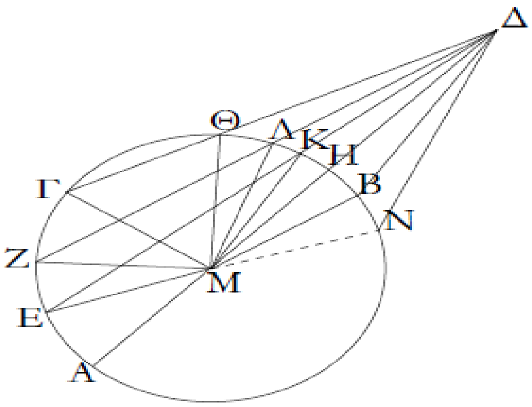
ΕΖ στο σημείο Ε η γωνία ΖΕΘ ίση με την γωνία ΗΕΖ και ας έχει αχθεί η ΖΘ. Επειδή λοιπόν η ΗΕ είναι ίση με την ΕΘ και η ΕΖ είναι κοινή, οι δυο ευθείες ΗΕ και ΕΖ είναι ίσες με τις ΘΕ, ΕΖ αντίστοιχα. Και η γωνία ΗΕΖ είναι ίση με την γωνία ΘΕΖ. Άρα η βάση ΖΗ είναι ίση με την βάση ΖΘ. Λέγω ότι από το Ζ δεν προσπίπτει στον κύκλο άλλη ευθεία ίση με την ΖΗ, διότι, αν είναι δυνατό, έστω ότι προσπίπτει η ΖΚ. Επειδή ΖΚ είναι ίση με την ΖΗ και η ΖΘ είναι ίση με την ΖΗ, η ΖΚ είναι ίση με τη ΖΘ. Η πιο κοντινή στο κέντρο είναι ίση με την πιο μακρινή, το όποιο είναι αδύνατο. Άρα, από το σημείο Ζ μια οποιοδήποτε άλλη ευθεία ίση με το ΗΖ δεν θα προσπίπτει στον κύκλο. Άρα είναι η μόνη.

Άρα, εάν σε κύκλο ληφθεί επί της διαμέτρου ένα σημείο διαφορετικό από το κέντρο του και από αυτό προς τον κύκλο προσπίπτουν ευθείες, τότε η μέγιστη είναι αυτή στην οποία βρίσκεται το κέντρο και ελάχιστη η υπόλοιπη. Για τις άλλες, αυτές που είναι πλησιέστερα στο κέντρο είναι μεγαλύτερες από αυτές που είναι πιο μακριά. Μόνο δύο είναι ίσες απο το σημείο που προσπίπτουν στον κύκλο, κάθε μια εκατέρωθεν της ελάχιστης.
Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 8

Εάν ληφθεί σημείο εκτός κύκλου και από αυτό διέρχονται ευθείες προς τον κύκλο ώστε η μια να διέρχεται από το κέντρο και οι υπόλοιπες τυχαία, τότε από τις ευθείες που προσπίπτουν στη κοίλη περιφέρεια η μεγαλύτερη είναι αυτή που διέρχεται από το κέντρο. Για τις άλλες, μια ευθεία που είναι πιο κοντά στην ευθεία που διέρχεται από το κέντρο είναι πάντα μεγαλύτερη από μια πιο μακρινή. Για τις ευθείες που προσπίπτουν στην κυρτή περιφέρεια, η μικρότερη είναι αυτή μεταξύ του σημείου και της διαμέτρου. Για τις άλλες, μια ευθεία που είναι πιο κοντά στην ελάχιστη είναι πάντα μικρότερη από μια που βρίσκεται πιο μακριά. Και μόνο δυο ίσες ευθείες θα προσπίπτουν από το σημείο προς τον κύκλο, μια σε κάθε πλευρά της ελάχιστης.

Έστω κύκλος ΑΒΓ και ας έχει ληφθεί έξω από αυτόν το Δ. Και από αυτό ας έχουν αχθεί οι ευθείες ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, και ΔΓ. Έστω ότι η ΔΑ διέρχεται από το κέντρο. Λέγω ότι για τις ευθείες που προσπίπτουν στην κοίλη περιφέρεια του ΑΕΖΓ, η μεγαλύτερη είναι αυτή που διέρχεται από το κέντρο, η ΔΑ. Και ότι η ΔΕ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΖ, και η ΔΖ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΓ. Από τις ευθείες που προσπίπτουν στην κυρτή περιφέρεια ΘΛΚΗ, η μικρότερη είναι εκείνη μεταξύ του σημείου και της διαμέτρου ΑΗ, η ΔΗ. Και μια ευθεία που βρίσκεται πιο κοντά στην ελάχιστη ευθεία είναι πάντα μικρότερη από μια πιο μακρινή. Η ΔΚ είναι μικρότερη της ΔΛ και η ΔΛ είναι μικρότερη της ΔΘ.



Ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου και έστω ότι είναι το Μ. Και ενώνονται οι ΜΕ , ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ και ΜΘ.

Επειδή η ΑΜ είναι ίση με την ΕΜ και προστίθεται η κοινή ΑΔ και στις δυο, η ΑΔ είναι ίση με τις ΕΜ, ΜΔ. Αλλά, οι ΕΜ, ΜΔ είναι μεγαλύτερες από την ΕΔ, άρα και η ΑΔ είναι ίση με την ΕΔ. Πάλι, επειδή η ΜΕ είναι ίση με την ΜΖ και η ΜΔ είναι κοινή, οι ευθείες ΕΜ,ΜΔ είναι ίσες με τις ΖΜ, ΜΔ και η γωνία ΕΜΔ είναι μεγαλύτερη από την ΖΜΔ. Άρα η βάση ΕΔ είναι μεγαλύτερη από τη βάση ΖΔ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η ΖΔ είναι επίσης μεγαλύτερη από τη ΓΔ. Άρα η ΑΔ είναι η μέγιστη ευθεία. Και η ΔΕ είναι μεγαλύτερη από την ΔΖ και η ΔΖ είναι μεγαλύτερη από την ΔΓ.

Και επειδή οι ΜΚ και ΚΔ είναι μεγαλύτερες από την ΜΔ και η ΜΗ ισούται με την ΜΚ, η εναπομείνασα ΚΔ είναι κι αυτή μεγαλύτερη από την λοιπή ΗΔ. Έτσι η ΗΔ είναι μικρότερη από την ΚΔ. Και επειδή στο τρίγωνο ΜΛΔ δυο εσωτερικές ευθείες ΜΚ και ΚΔ συστάθηκαν σε μια από τις πλευρές της ΜΔ, τότε οι ΜΚ και ΚΔ είναι μικρότερες των ΜΛ και ΛΔ. Και η ΜΚ είναι ίση με τη ΜΛ. Άρα η λοιπή ΔΚ είναι μικρότερη από την λοιπή ΔΛ. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η ΔΛ είναι μικρότερη από τη ΔΘ. Άρα, η ΔΗ είναι η ελάχιστη ευθεία και η ΔΚ είναι μικρότερη από τη ΔΛ και η ΔΛ είναι μικρότερη από τη ΔΘ.

Λέγω ότι μόνο δυο ίσες ευθείες θα προσπίπτουν από το σημείο Δ προς τον κύκλο, μία σε κάθε πλευρά της ελάχιστης ευθείας ΔΗ. Ας έχουν συσταθεί πάνω στην ευθεία ΜΔ, στο σημείο Μ, η γωνία ΔΜΒ ίση με τη γωνία ΚΜΔ. Και έστω ότι ας έχει αχθεί η ΔΒ. Επειδή η ΜΚ είναι ίση με τη ΜΒ, και η ΜΔ είναι κοινή, οι δύο ευθείες ΚΜ, ΜΔ είναι ίσες με τις ΒΜ, ΜΔ ανά δύο. Και η γωνία ΚΜΔ είναι ίση με τη γωνία ΒΜΔ. Άρα η βάση ΔΚ με τη βάση ΔΒ είναι ίσες. Λέγω ότι άλλη ευθεία ίση με την ΔΚ δεν προσπίπτει προς τον κύκλο από το σημείο Δ, διότι, αν αυτό είναι δυνατό, έστω ότι μια τέτοια ευθεία προσπίπτει, και έστω ότι είναι η ΔΝ. Επειδή λοιπόν, η ΔΚ είναι ίση με τη ΔΝ, αλλά η ΔΚ είναι ίση με τη ΔΒ, η ΔΒ είναι ίση με τη ΔΝ. Η πλησιέστερη στην ελάχιστη ΔΗ είναι ίση με την απώτερη. Το οποίο αποδείχτηκε ότι είναι αδύνατο. Άρα, πάνω από δυο ίσες ευθείες είναι αδύνατο να προσπίπτουν από το σημείο Δ προς την περιφέρεια του κύκλου ΑΒΓΔ, από μία σε κάθε πλευρά της μικρότερης ευθείας ΔΗ.

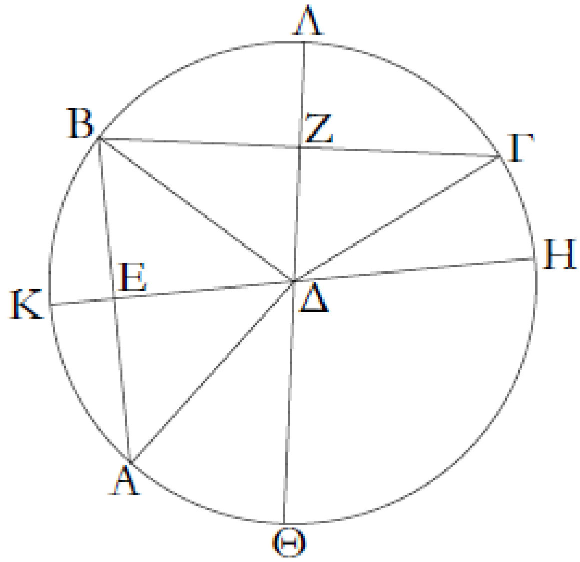
Άρα, εάν ληφθεί σημείο εκτός κύκλου και από αυτό διέρχονται ευθείες προς τον κύκλο ώστε η μια διατρέχει το κέντρο και οι υπόλοιπες τυχαία.Τότε από τις ευθείες που προσπίπτουν στη κοίλη περιφέρεια η μεγαλύτερη είναι αυτή που διέρχεται από το κέντρο. Για τις άλλες, μια ευθεία που είναι πιο κοντά στην ευθεία που διέρχεται απο το κέντρο είναι πάντα μεγαλύτερη από μια πιο μακρινή. Για τις ευθείες που προσπίπτουν στην κυρτή περιφέρεια, η μικρότερη είναι αυτή μεταξύ του

σημείου και της διαμέτρου. Για τις άλλες, μια ευθεία που είναι πιο κοντά στην ελάχιστη είναι πάντα μικρότερη από μια που βρίσκεται πιο μακριά. Και μόνο δυο ίσες ευθείες θα προσπίπτουν από το σημείο προς τον κύκλο, μια σε κάθε πλευρά της ελάχιστης.
Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 9

Εάν ληφθεί σημείο εντός κύκλου και από το σημείο προσπίπτουν προς τον κύκλο περισσότερες από δυο ίσες ευθείες τότε το ληφθέν σημείο είναι το κέντρο του κύκλου.

Έστω κύκλος ΑΒΓ και Δ σημείο εντός του και από το Δ προσπίπτουν προς τον κύκλο περισσότερες από δύο ίσες ευθείες οι ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. Λέγω ότι το Δ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.



Ενώνονται οι ΑΒ και ΒΓ και διχοτομούνται στα σημεία Ε,Ζ αντίστοιχα. Ενώνονται οι ΕΔ, ΖΔ που διέρχονται από τα σημεία Η,Κ,Θ,Λ.

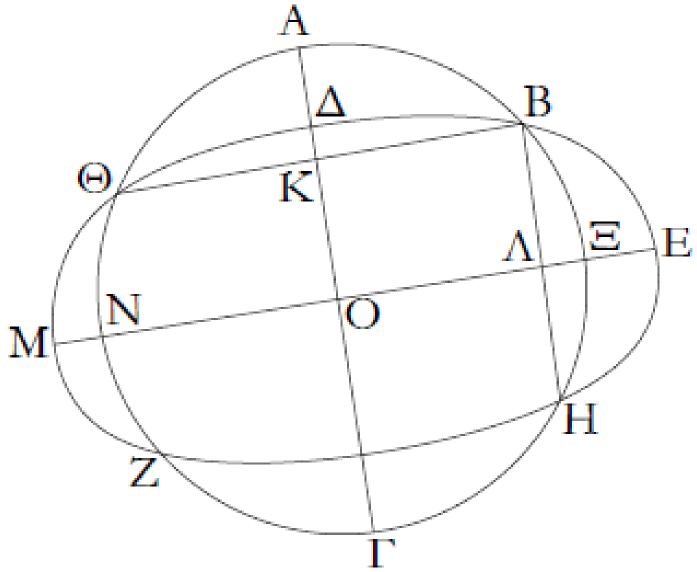
Επειδή λοιπόν η ευθεία ΑΕ είναι ίση με τη ΕΒ και η ΕΔ είναι κοινή, οι ΑΕ, ΕΔ είναι ίσες με τις ΒΕ, ΕΔ αντίστοιχα. Και η βάση ΔΑ ίση με τη βάση ΔΒ.Άρα η γωνία ΑΕΔ είναι ίση με τη ΒΕΔ και είναι ορθές. Άρα η ΗΚ διχοτομεί κάθετα την ΑΒ. Εάν κάποια ευθεία εντός κύκλου διχοτομεί άλλη ευθεία κατά ορθή γωνία, τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στη τέμνουσα ευθεία. Άρα το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στην ΗΚ. Για τον ίδιο λόγο το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ βρίσκεται στην ΘΛ και οι ΗΚ, ΘΛ δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο εκτός του Δ. Άρα Δ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Άρα εάν ληφθεί σημείο εντός κύκλου και από το σημείο προσπίπτουν προς τον κύκλο περισσότερες από δύο ίσες ευθείες τότε το ληφθέν σημείο είναι το κέντρο του κύκλου.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 10

Κύκλος δεν τέμνει άλλο κύκλο σε περισσότερα από δυο σημεία.

Εάν αυτό είναι δυνατόν, έστω ότι ο κύκλος ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο ΔΕΖ σε περισσότερα από δυο σημεία τα Β, Η, Ζ, Θ. Και ενώνονται οι ΒΘ, ΒΗ που διχοτομούνται στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα. Από τα Κ, Λ άγονται οι ΚΓ,ΛΜ κάθετες στις ΒΘ, ΒΗ και διέρχονται από τα σημεία Α,Ε αντίστοιχα.



Επειδή λοιπόν στο κύκλο ΑΒΓ η ΑΓ διχοτομεί κάθετα τη ΒΘ, το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ βρίσκεται στην ΑΓ. Πάλι, επειδή στον ίδιο κύκλο ΑΒΓ η ΝΞ διχοτομεί κάθετα τη ΒΓ το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ βρίσκεται στην ΝΞ. Οι ΑΓ, ΝΞ δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο εκτός του Ο.Άρα το Ο είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.Όμοια δείχνουμε ότι το Ο είναι κέντρο του κύκλου ΔΕΖ. Άρα οι δυο τεμνόμενοι κύκλοι ΑΒΓ,ΔΕΖ έχουν το ίδιο κέντρο Ο. Το οποίο είναι αδύνατο.

Άρα κύκλος δεν τέμνει άλλο κύκλο σε περισσότερα από δυο σημεία.Ο.Ε.Δ.

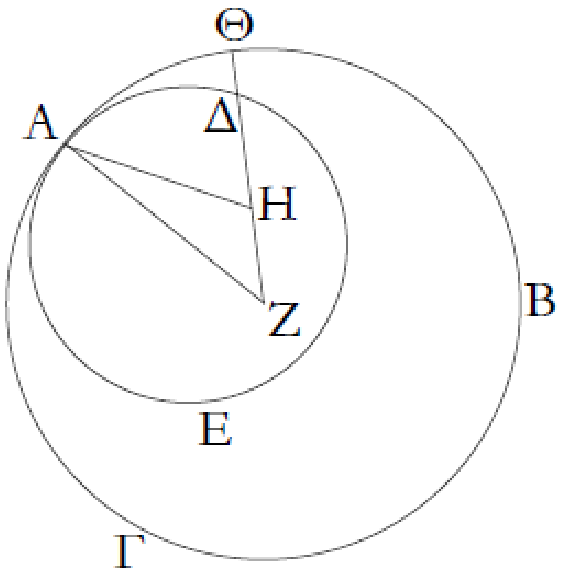
Πρόταση 11

Εάν δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και ληφθούν τα κέντρα τους τότε η ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους θα διέρχεται από το σημείο επαφής των κύκλων.

Έστω δυο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ που εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α και λαμβάνεται το σημείο Ζ κέντρο του κύκλου ΑΒΓ και το σημείο Η του κύκλου ΑΔΕ. Λέγω ότι η ευθεία που ενώνει το Ζ και το Η θα διέρχεται από το Α.

Εάν αυτό δεν είναι δυνατόν, τότε εμπίπτει όπως η ευθεία ΖΗΘ και ενώνονται οι ΑΖ, ΑΗ.

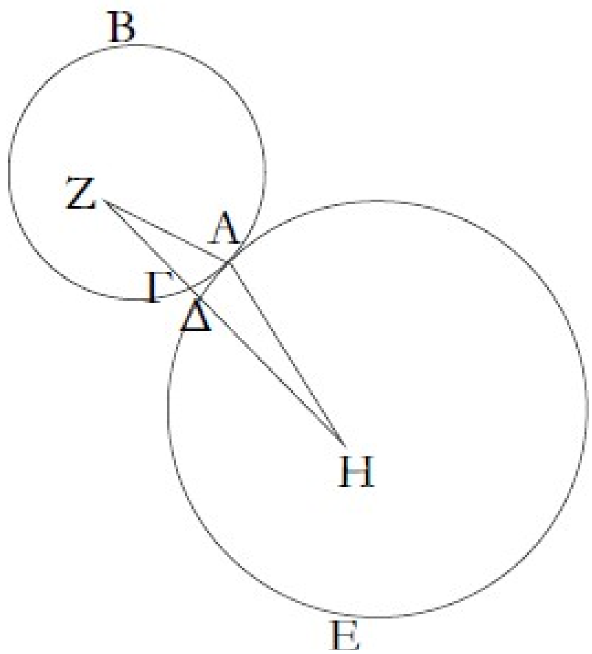
Επειδή λοιπόν οι ΑΗ, ΗΖ είναι μεγαλύτερες από τις ΖΑ,ΖΘ και αφαιρείται από κοινού η ΖΗ, το υπόλοιπο ΑΗ είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου της ΗΘ. Η ΑΗ είναι ίση με την ΗΔ και η ΗΔ είναι μεγαλύτερη από την ΗΘ.Δηλαδή η μικρότερη είναι μεγαλύτερη της μεγαλύτερης, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η ευθεία που ενώνει τα Ζ,Η δεν θα διέρχεται εκτός του εσωτερικού κύκλου αλλά θα διέρχεται από το σημείο επαφής Α.



Άρα εάν δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και ληφθούν τα κέντρα τους τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους διέρχεται από το σημείο επαφής των κύκλων.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 12

Εάν δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους θα διέρχεται από το σημείο επαφής τους.



Έστω δυο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α και λαμβάνεται το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓ και το Η του ΑΔΕ. Λέγω ότι η ευθεία που ενώνει τα Ζ,Η θα διέρχεται από το σημείο επαφής Α.

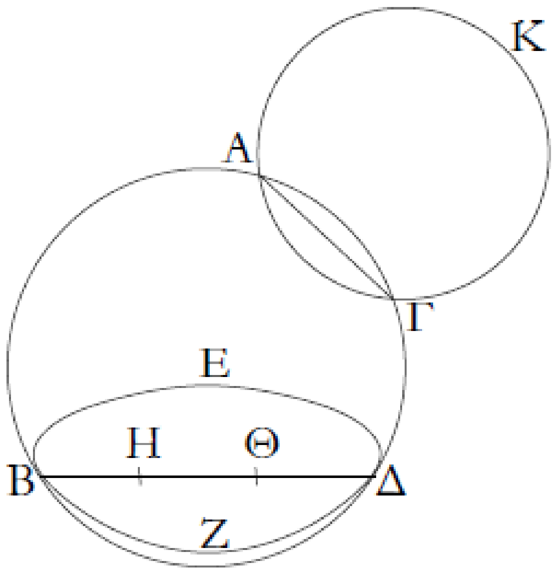
Εάν αυτό δεν είναι δυνατόν τότε εμπίπτει όπως η ευθεία ΖΓΔΗ και ενώνονται οι ΑΖ, ΑΗ.

Επειδή λοιπόν το σημείο Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ, η ΖΑ είναι ίση με τη ΖΓ. Πάλι επειδή το σημείο Η είναι το κέντρο του κύκλου ΑΔΕ η ΗΑ είναι ίση με τη ΗΔ.Άρα οι ΖΑ, ΑΗ είναι ίσες με τις ΖΓ, ΗΔ αντίστοιχα. Άρα η ΖΗ είναι μεγαλύτερη των ΖΑ και ΑΗ αλλά είναι και μικρότερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η ευθεία που ενώνει τα Ζ,Η δεν μπορεί να μην διέρχεται από το σημείο επαφής Α.

Άρα εάν δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους θα διέρχεται από το σημείο επαφής τους.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 13

Κύκλος δεν εφάπτεται κύκλου σε περισσότερα από ένα σημεία είτε εφάπτεται εσωτερικά είτε εξωτερικά.



Εάν αυτό είναι δυνατόν, έστω ο κύκλος ΑΒΔΓ που εφάπτεται του κύκλου ΕΒΖΔ πρώτα εσωτερικά σε περισσότερα από ένα σημεία, τα Δ και Β.

Λαμβάνεται το κέντρο Η του κύκλου ΑΒΓΔ και το Θ του ΕΒΖΔ.

Άρα η ευθεία που ενώνει τα Η, Θ διέρχεται από τα Β, Δ όπως εμπίπτει η ΒΗΘΔ. Και επειδή το Η είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΔΓ η ΒΗ είναι ίση με τη ΗΔ άρα η ΒΗ είναι μεγαλύτερη της ΘΔ. Άρα η ΒΘ είναι μεγαλύτερη της ΘΔ. Πάλι, επειδή το Θ είναι το κέντρο του κύκλου ΕΒΖΔ η ΒΘ είναι ίση με τη ΘΔ αλλά δείχτηκε ότι είναι μεγαλύτερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα κύκλος δεν εφάπτεται εσωτερικά κύκλου σε περισσότερα από ένα σημείο.

Λέγω ότι ούτε εξωτερικά εφάπτεται.

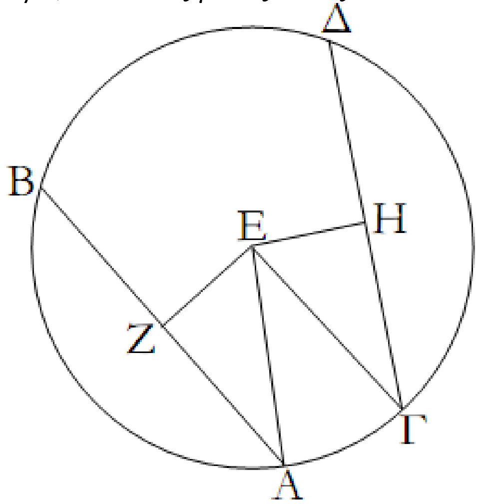
Εάν αυτό είναι δυνατόν, έστω ο κύκλος ΑΓΚ που εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου ΑΒΔΓ σε περισσότερα από ένα σημεία τα Α, Γ και ενώνεται η ΑΓ.

Επειδή λοιπόν από τους κύκλους ΑΒΔΓ, ΑΓΚ ελήφθησαν από τις περιφέρειες τους δυο τυχαία σημεία τα Α, Γ, η ευθεία που τα ενώνει θα προσπίπτει εντός των κύκλων. Αλλά προσπίπτει εντός του ΑΒΓΔ και εκτός του ΑΓΚ, το οποίο είναι άτοπο. Άρα κύκλος δεν εφάπτεται εξωτερικά κύκλου σε περισσότερα από ένα σημεία. Έχει δειχθεί ότι ούτε εσωτερικά.

Άρα κύκλος δεν εφάπτεται κύκλου σε περισσότερα από ένα σημείο είτε εφάπτεται εσωτερικά είτε εξωτερικά.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 14

Σε έναν κύκλο, ίσες ευθείες ισαπέχουν από το κέντρο, και οι ευθείες που ισαπέχουν από το κέντρο, είναι ίσες μεταξύ τους.



Έστω ο κύκλος ΑΒΔΓ και έστω ΑΒ και ΓΔ ίσες ευθείες μέσα στον κύκλο. Λέγω ότι οι ΑΒ και ΓΔ απέχουν ίση απόσταση από το κέντρο.

Διότι ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΔΓ, έστω το Ε, και ας έχουν αχθεί οι ΕΖ και ΕΗ, κάθετες ευθείες από το Ε στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Και ας έχουν συνδεθεί οι ΑΕ και ΕΓ.

Επειδή λοιπόν η ΕΖ που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τέμνει την ΑΒ που δε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και τη διχοτομεί σε ορθή γωνία. Άρα η ΑΖ είναι ίση με την ΖΒ, και η ΑΒ είναι διπλάσια της ΑΖ. Για τους ίδιους λόγους πρέπει και η ΓΔ να είναι επίσης διπλάσια της ΓΗ, και η ΑΒ να είναι ίση με τη ΓΔ. Άρα και η ΑΖ είναι ίση με την ΓΗ. Και επειδή η ΑΕ είναι ίση με την ΕΓ, το τετράγωνο της ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΓ. Αλλά το άθροισμα των τετραγώνων της ΑΖ και ΕΖ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΕ, επειδή η γωνία Ζ είναι ορθή. Και το άθροισμα των τετραγώνων της ΕΗ και ΗΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΓ, επειδή η γωνία Η είναι ορθή. Επομένως το άθροισμα των τετραγώνων της ΑΖ και ΖΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΗ και ΗΕ, εκ των οποίων το τετράγωνο της ΑΖ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΗ, επειδή η ΑΖ είναι ίση με την ΓΗ. Άρα το λοιπό τετράγωνο της ΖΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΗ, άρα η ΕΖ είναι ίση με την ΕΗ. Λέμε ότι ευθείες γραμμές σε έναν κύκλο ισαπέχουν από το κέντρο αυτού, όταν οι κάθετες σε αυτές ευθείες από το κέντρο του κύκλου είναι ίσες. Άρα η ΑΒ και η ΓΔ ισαπέχουν από το κέντρο.

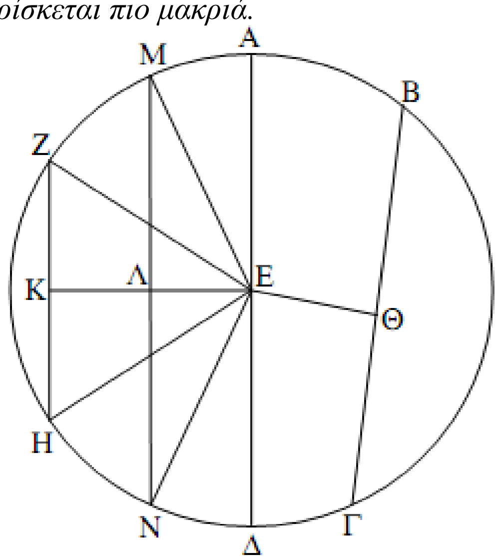
Αλλά οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου, οπότε η ΕΖ είναι ίση με την ΕΗ. Λέγω πως η ΑΒ είναι επίσης ίση με την ΓΔ.

Με την ίδια κατασκευή μπορούμε ομοίως να δείξουμε πως η ΑΒ είναι διπλάσια της ΑΖ και η ΓΔ διπλάσια της ΓΗ. Και επειδή η ΑΕ είναι ίση με τη ΓΕ, το τετράγωνο της ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΕ. Αλλά το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΖ και ΖΑ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΕ. Το δε άθροισμα των τετραγώνων των ΕΖ και ΖΑ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΗ και ΗΓ, από τα οποία το τετράγωνο ΕΖ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΗ, επειδή η ΕΖ είναι ίση με την ΕΗ. Άρα το λοιπο τετράγωνο της ΑΖ είναι ίσο με το λοιπό τετράγωνο της ΓΗ, άρα η ΑΖ είναι ίση με τη ΓΗ. Και η ΑΒ είναι διπλάσια της ΑΖ και η ΓΔ διπλάσια της ΓΗ. Επομένως η ΑΒ είναι ίση με την ΓΔ.

Δηλαδή, σε έναν κύκλο, ίσες ευθείες ισαπέχουν από το κέντρο, και οι ευθείες που ισαπέχουν από το κέντρο, είναι ίσες μεταξύ τους. ΟΕΔ.

Πρόταση 15

Σε έναν κύκλο, η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη ευθεία, ενώ για τις υπόλοιπες, μια ευθεία πιο κοντά στο κέντρο είναι πάντα μεγαλύτερη από κάποια άλλη ποθ βρίσκεται πιο μακριά.



Έστω κύκλος ΑΒΓΔ, και έστω ΑΔ η διάμετρος του και Ε το κέντρο του. Και έστω ΒΓ ευθεία πιο κοντά στη διάμετρο ΑΔ, και ΖΗ πιο μακριά. Λέγω ότι η ΑΔ είναι η μέγιστη ευθεία και πως η ΒΓ είναι μεγαλύτερη από την ΖΗ.

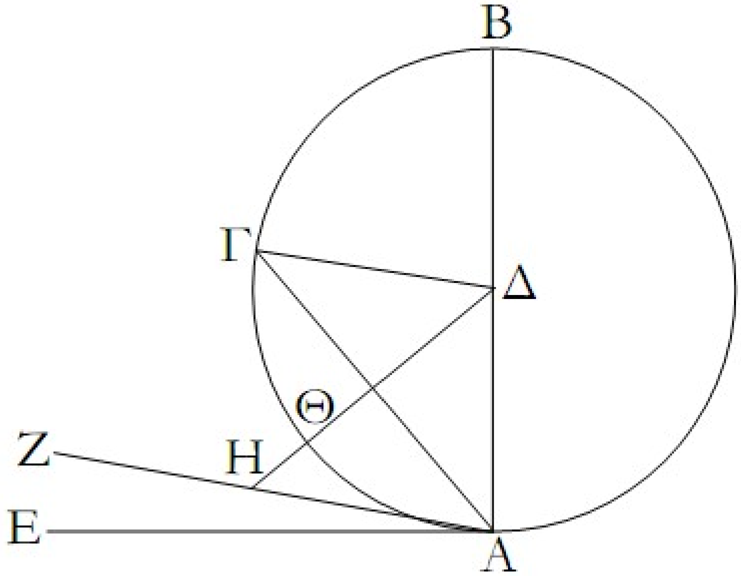
Ας έχουν αχθεί οι ΕΘ και ΕΚ από το κέντρο Ε, κάθετες στις ΒΓ και ΖΗ αντίστοιχα. Επειδή η ΒΓ είναι πιο κοντά στο κέντρο και η ΖΗ πιο μακριά, η ΕΚ θα είναι μεγαλύτερη της ΕΘ. Έστω ΕΛ να είναι ίση με την ΕΘ. Ας έχει αχθεί η ΛΜ από το Λ, κάθετη στο ΕΚ, έτσι ώστε να διέρχεται και από το Ν. Και ας έχουν συνδεθεί οι ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ και ΕΗ.

Επειδή λοιπόν η ΕΘ είναι ίση με την ΕΛ, η ΒΓ θα είναι επίσης ίση με τη ΜΝ. Και πάλι, επειδή η ΑΕ θα είναι ίση με την ΕΜ και η ΕΔ με την ΕΝ, η ΑΔ θα είναι ίση με τη ΜΕ και ΕΝ. Αλλά οι ΜΕ και ΕΝ είναι μεγαλύτερες από τη ΜΝ, (και η ΑΔ είναι μεγαλύτερη της ΜΝ) και η ΜΝ είναι ίση με τη ΒΓ. Άρα η ΑΔ θα είναι μεγαλύτερη της ΒΓ. Και επειδή οι δύο ευθείες ΜΕ, ΕΝ είναι ίσες με τις ΖΕ και ΕΗ ανά δύο, και η γωνία ΜΕΝ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία ΖΕΗ. Άρα η βάση ΜΝ είναι μεγαλύτερη από τη βάση ΖΗ. Αλλά έχει δειχθεί πως η ΜΝ είναι ίση με τη ΒΓ [και η ΒΓ είναι μεγαλύτερη της ΖΗ]. Άρα η διάμετρος ΑΔ είναι η μέγιστη ευθεία και η ΒΓ είναι μεγαλύτερη της ΖΗ.

Άρα, σε έναν κύκλο η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη ευθεία, ενώ για τις υπόλοιπες μια ευθεία πιο κοντά στο κέντρο είναι πάντα μεγαλύτερη από κάποια άλλη που βρίσκεται πιο μακριά. ΟΕΔ.

Πρόταση 16

Μια ευθεία που άγεται κάθετα σε διάμετρο του κύκλου από άκρο αυτής, εμπίπτει εκτός του κύκλου. Και καμιά άλλη ευθεία δεν χωρά στο διάστημα μεταξύ της προαναφερθείσας ευθείας και της περιφέρειας του κύκλου. Και η γωνία του ημικυκλίου είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε ευθύγραμμη οξεία γωνία, ενώ η λοιπή γωνία είναι μικρότερη.



Έστω ΑΒΓ ο κύκλος γύρω από το κέντρο Δ και η διάμετρος ΑΒ. Λέγω ότι η ευθεία που άγεται από το Α, κάθετη στο ΑΒ, θα εμπίπτει εκτός του κύκλου.

Διότι εάν ήταν δυνατόν ας έχει εμπέσει εντός του κύκλου όπως η ΓΑ, και ας έχει ενωθεί η ΔΓ.

Επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΔΓ, η γωνία ΔΑΓ είναι επίσης ίση με τη γωνία ΑΓΔ. Άρα η ΔΑΓ είναι ορθή, και η ΑΓΔ είναι επίσης ορθή. Στο τρίγωνο ΑΓΔ πρέπει οι δύο γωνίες ΔΑΓ και ΑΓΔ να είναι ίσες με δύο ορθές, το οποίο είναι αδύνατον. Άρα η ευθεία που άγεται από το σημείο Α κάθετα στο ΒΑ δεν εμπίπτει εντός του κύκλου. Ομοίως, αποδεικνύεται πως δεν εμπίπτει και πάνω στην περιφέρεια. Άρα θα βρίσκεται εκτός.

Έστω ότι εμπίπτει όπως η ΑΕ. Λέγω λοιπόν, πως καμιά άλλη ευθεία δεν χωρά στο διάστημα ανάμεσα στην ευθεία ΑΕ και την περιφέρεια ΓΘΑ.

Έστω ότι είναι δυνατόν να χωρά όπως η ΖΑ, και ας έχει αχθεί η ΔΗ από το σημείο Δ κάθετη στη ΖΑ. Επειδή η ΑΗΔ είναι ορθή γωνία και η ΔΑΗ μικρότερη από ορθή, η ΑΔ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΗ. Και η ΔΑ είναι ίση με τη ΔΘ. Άρα η ΔΘ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΗ, η μικρότερη της μεγαλύτερης, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα καμιά άλλη ευθεία δεν χωρά ανάμεσα στην ΑΕ και την περιφέρεια.

Λέγω πως και η γωνία του ημικυκλίου που περιέχεται στην ευθεία ΒΑ και στην περιφέρεια ΓΘΑ είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε ευθύγραμμη οξεία γωνία, και πως η λοιπή γωνία, η περιεχόμενη στην περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ είναι μικρότερη από οποιαδήποτε οξεία γωνία.

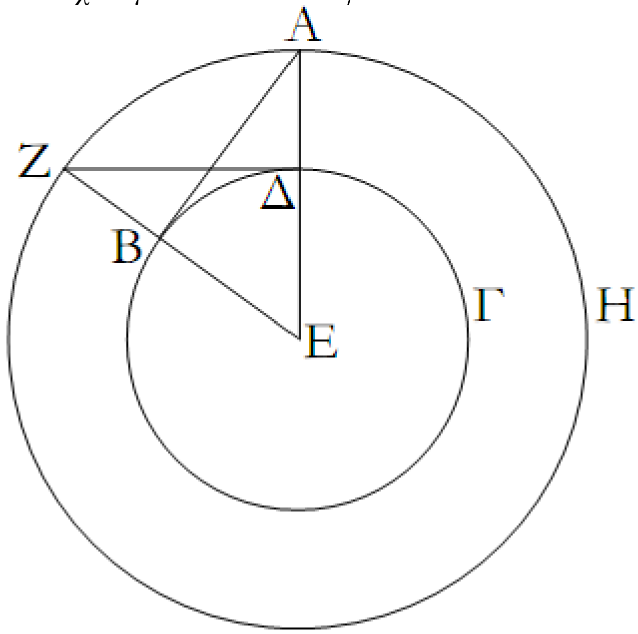
Επειδή, αν οποιαδήποτε ευθύγραμμη γωνία είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται στην ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ ή μικρότερη από τη γωνία που περιέχεται στην περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ, τότε θα μπορούσε μια ευθεία να χωρέσει ανάμεσα στο διάστημα της περιφέρειας ΓΘΑ και της ευθείας ΑΕ. Αλλά μια τέτοια ευθεία δεν υπάρχει. Άρα, μια ευθύγραμμη οξεία γωνία περιεχόμενη σε ευθείες δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από μια γωνία περιεχόμενη στην ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ, ούτε μπορεί να είναι μικρότερη από την περιεχόμενη γωνία της περιφέρειας ΓΘΑ και της ευθείας ΑΕ.

Πόρισμα

Από αυτό είναι φανερό, πως μια ευθεία που άγεται κάθετα στη διάμετρο του κύκλου από τα άκρα της, εφάπτεται του κύκλου [και ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου σε μοναδικό σημείο, όπως επίσης έχει δειχθεί ότι μια ευθεία που συναντά τον κύκλο σε δύο σημεία πέφτει μέσα σε αυτόν]. ΟΕΔ

Πρόταση 17

Να αχθεί μια ευθεία που εφάπτεται σε δοθέντα κύκλο από δοθέν σημείο.



Έστω Α το δοθέν σημείο και ΒΓΔ ο δοθείς κύκλος. Πρέπει να αχθεί μια ευθεία εφαπτομένη του κύκλου ΒΓΔ από το σημείο Α.

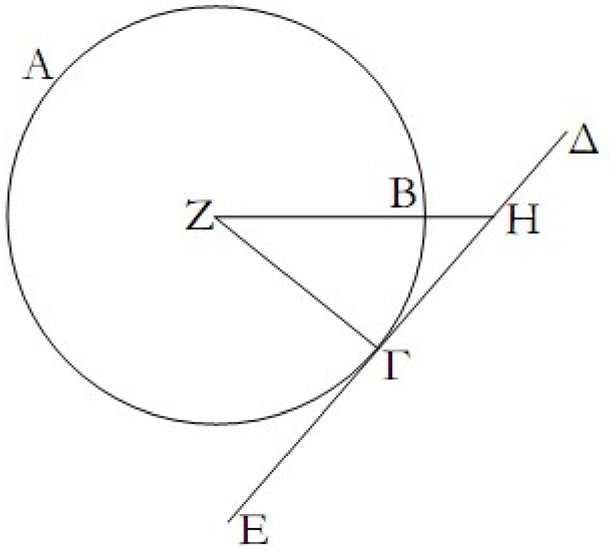
Ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου Ε, και ας έχει ενωθεί η ΑΕ. Και έστω ο κύκλος ΑΖΗ με κέντρο το Ε και με διάστημα ΕΑ. Και ας έχει αχθεί η ΔΖ από το σημείο Δ κάθετη στο ΕΑ και ας έχουν ενωθεί οι ΕΖ και ΑΒ. Λέγω ότι η ευθεία από το σημείο Α, εφαπτομένη στον κύκλο ΒΓΔ, είναι η ΑΒ.

Επειδή Ε το κέντρο των κύκλων ΒΓΔ και ΑΖΗ, η ΕΑ είναι ίση με την ΕΖ και η ΕΔ με την ΕΒ. Οι ΑΕ και ΕΒ να είναι ίσες με τις ΖΕ και ΕΔ ανά δύο, και να περιέχουν την κοινή γωνία Ε. Άρα η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΑΒ, και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΕΒΑ, και οι λοιπές γωνίες είναι ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες. Άρα είναι ίσες οι ΕΔΖ και η ΕΒΑ. Και η ΕΔΖ είναι ορθή. Άρα και η γωνία ΕΒΑ είναι επίσης ορθή και η ΕΒ είναι από το κέντρο. Και μια ευθεία κάθετη στη διάμετρο του κύκλου, από τα άκρα αυτής, εφάπτεται του κύκλου. Άρα η ΑΒ εφάπτεται του κύκλου ΒΓΔ.

Άρα, η ευθεία ΑΒ που άχθηκε είναι εφαπτομένη του δοθέντος κύκλου ΒΓΔ, από δοθέν σημείο Α. ΟΕΠ

Πρόταση 18

Εάν μια ευθεία εφάπτεται ενός κύκλου, και ενωθεί το κέντρο με το σημείο επαφής με την ευθεία, αυτή θα είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία.



Έστω μια ευθεία ΔΕ που εφάπτεται του κύκλου ΑΒΓ στο σημείο Γ. Ας έχει ληφθεί Ζ το κέντρο του κύκλου και ας έχει ενωθεί η ΖΓ που ενώνει το Ζ με το Γ. Λέγω οτι η ΖΓ είναι κάθετη της ΔΕ.

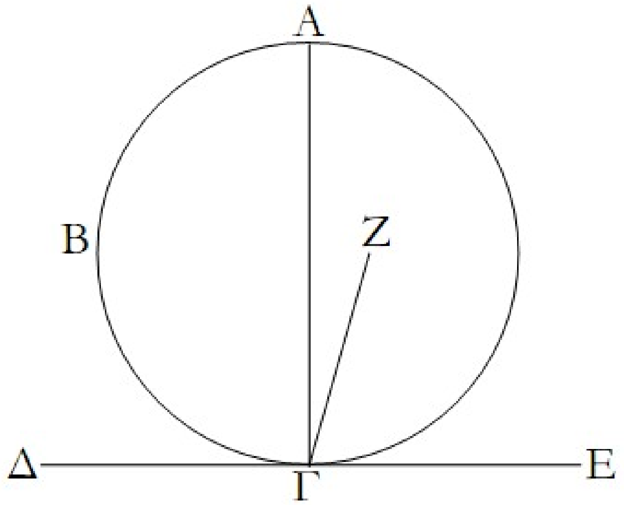
Αν δεν είναι, τότε ας έχει αχθεί η κάθετη ΖΗ απο το σημείο Ζ στην ευθεία ΔΕ.

Επειδή λοιπόν η γωνία ΖΗΓ είναι ορθή, η ΖΓΗ είναι οξεία. Και η μεγαλύτερη γωνία έχει υποτείνουσα την μεγαλύτερη πλευρά. Άρα η ΖΓ είναι μεγαλύτερη από την ΖΗ. Και η ΖΓ είναι ίση της ΖΒ. Άρα και η ΖΒ είναι μεγαλύτερη από την ΖΗ, η μικρότερη από την μεγαλύτερη, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η ΖΗ δεν είναι κάθετος της ΔΕ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι καμία άλλη εκτός της ΖΓ δεν είναι κάθετος της ΔΕ. Άρα η ΖΓ είναι κάθετος της ΔΕ.

Άρα, εάν μια ευθεία εφάπτεται ενός κύκλου, και ενωθεί το κέντρο με το σημείο επαφής με μια ευθεία, αυτή θα είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία. ΟΕΔ.

Πρόταση 19

Εάν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο, και αχθεί μια κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής, τότε το κέντρο του κύκλου θα ανήκει στην ευθεία που άχθηκε.



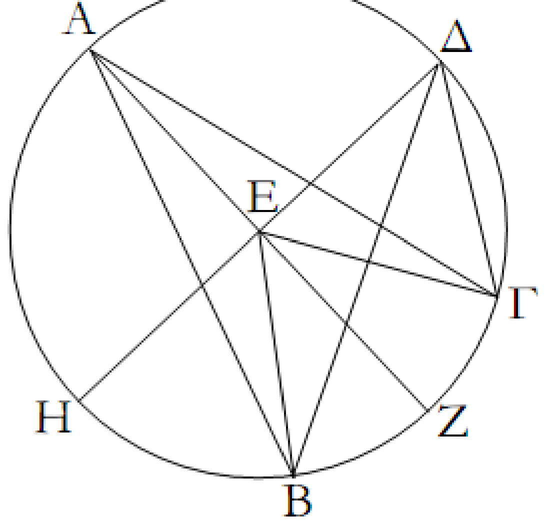
Διότι έστω μία ευθεία ΔΕ εφαπτόμενη του κύκλου ΑΒΓ στο σημείο Γ, και ας έχει αχθεί η ΓΑ από το Γ κάθετα στη ΔΕ. Λέγω ότι το κέντρο του κύκλου είναι στην ΑΓ.

Διότι εάν ήταν δυνατόν, έστω ότι είναι το σημείο Ζ, και ας έχει ενωθεί η ΓΖ. Επειδή [λοιπόν] η ΔΕ εφάπτεται του κύκλου ΑΒΓ, και η ΖΓ που άγεται από το κέντρο στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην ΔΕ. Άρα η ΖΓΕ είναι ορθή. Και η ΑΓΕ είναι ορθή. Άρα η ΖΓΕ είναι ίση με την ΑΓΕ, η μεγαλύτερη με την μικρότερη, που είναι αδύνατο. Άρα το Ζ δεν είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ. Ομοίως αποδεικνύεται πως κανένα σημείο δεν είναι, εκτός κάποιου στην ΑΓ.

Άρα, εάν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο, και αχθεί μια κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής, τότε το κέντρο του κύκλου θα ανήκει στην ευθεία που άχθηκε. ΟΕΔ.

Πρόταση 20

Σε ένα κύκλο, η γωνία από το κέντρο είναι διπλάσια από αυτήν από την περιφέρεια, όταν έχουν την ίδια περιφέρεια βάση.



Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και από το κέντρο του η γωνία ΒΕΓ, ενώ από την περιφέρεια η ΒΑΓ. Αυτές έχουν την ίδια περιφέρεια βάση, την ΒΓ. Λέγω οτι η γωνία ΒΕΓ είναι διπλάσια της ΒΑΓ.

Ας έχει ενωθεί η ΑΕ που διέρχεται από το σημείο Ζ.

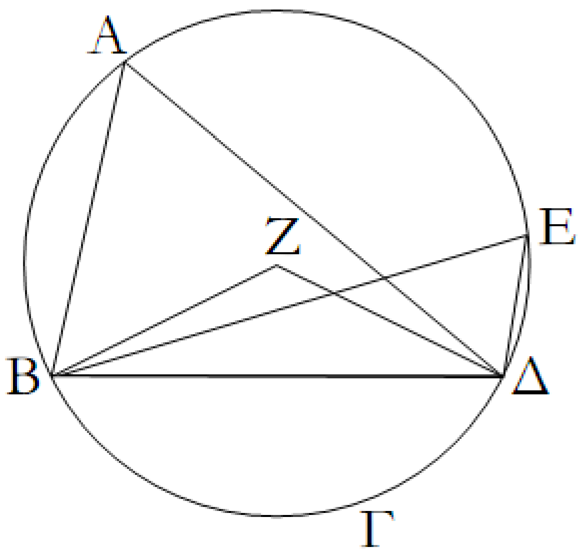
Επειδή λοιπόν η ΕΑ είναι ίση με την ΕΒ, η γωνία ΕΑΒ είναι ίση με την ΕΒΑ. Άρα το άθροισμα των γωνιών ΕΑΒ και ΕΒΑ είναι διπλάσιο της ΕΑΒ. Και η ΒΕΖ είναι ίση με τις ΕΑΒ και ΕΒΑ, άρα η ΒΕΖ είναι διπλάσια της ΕΑΒ. Για τους ίδιους λόγους, η ΖΕΓ ειναι επίσης διπλάσια της ΕΑΒ. Άρα ολόκληρη η ΒΕΓ είναι διπλάσια ολόκληρης της ΒΑΓ.

Έστω λοιπόν ότι έχει αχθεί άλλη μια ευθεία, και έστω μία ακόμη γωνία, η ΒΔΓ. Προεκτείνεται η ΔΕ ώστε να φτάνει μέχρι το Η. Ομοίως, αποδεικνύεται πως η ΗΕΓ είναι διπλάσια της ΕΔΓ, εκ των οποίων η ΗΕΒ είναι διπλάσια της ΕΔΒ. Άρα η λοιπή ΒΕΓ είναι διπλάσια της ΒΔΓ.

Άρα, σε ένα κύκλο, η γωνία από το κέντρο είναι διπλάσια από αυτήν από την περιφέρεια, όταν έχουν την ίδια περιφέρεια βάση. ΟΕΔ.

Πρόταση 21

Σε ένα κύκλο, οι γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τμήμα είναι ίσες μεταξύ τους.



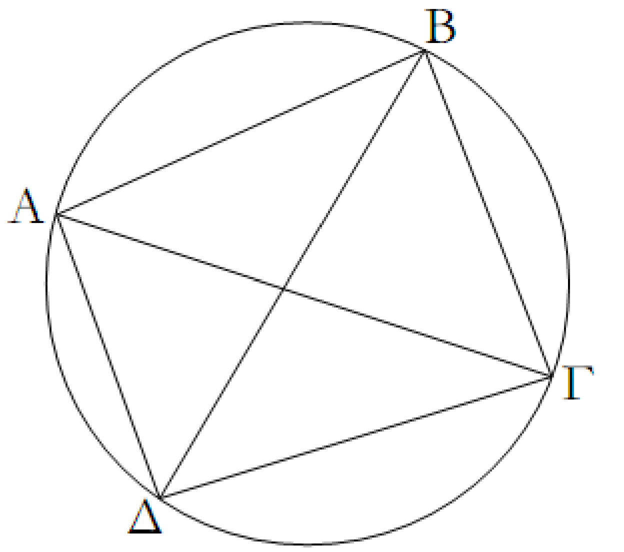
Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ και έστω ΒΑΔ και ΒΕΔ γωνίες στο ίδιο τμήμα ΒΑΕΔ. Λέγω ότι οι ΒΑΔ και ΒΕΔ είναι ίσες μεταξύ τους.

Διότι ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ, και έστω το Ζ, και ας έχουν ενωθεί οι ευθείες ΒΖ, ΖΔ. Και επειδή η γωνία ΒΖΔ βαίνει από το κέντρο, ενώ η ΒΑΔ από την περιφέρεια, και έχουν περιφέρεια βάση την ΒΓΔ, η γωνία ΒΖΔ είναι διπλάσια της ΒΑΔ. Για τους ίδιους λόγους, πρέπει η ΒΖΔ να είναι διπλάσια της ΒΕΔ, άρα η ΒΑΔ είναι ίση με τη ΒΕΔ.

Άρα, σε ένα κύκλο, οι γωνίες που βαίνουν στο ιδιο τμήμα είναι ίσες μεταξύ τους. ΟΕΔ.

Πρόταση 22

Σε τετράπλευρα που βρίσκονται εντός κύκλου, οι απέναντι γωνίες έχουν άθροισμα δύο ορθές.



Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ και μέσα σε αυτόν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Λέγω ότι οι απέναντι γωνίες είναι ίσες με δύο ορθές.

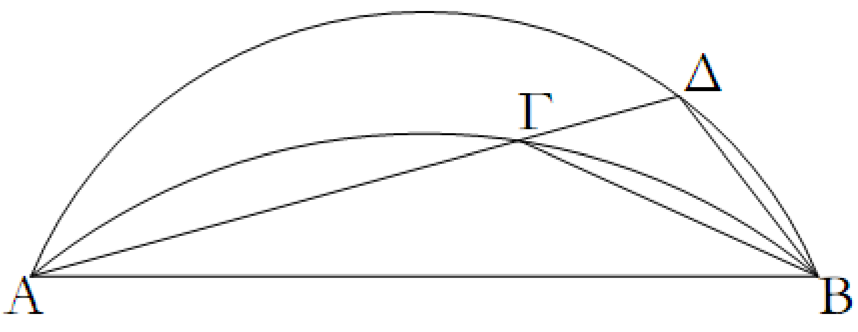
Ας έχουν ενωθεί οι ΑΓ και ΒΔ.

Επειδή λοιπόν, το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, το άθροισμα των τριών γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ίσο με δύο ορθές. Η ΓΑΒ είναι ίση με την ΒΔΓ γιατί βρίσκονται στο τμήμα ΑΔΓΒ. Άρα ολόκληρη η γωνία ΑΔΓ είναι ίση με τις ΒΑΓ, ΑΓΒ. Προστίθεται ΑΒΓ και στις δύο. Άρα οι ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ είναι ίσες με τις ΑΒΓ, ΑΔΓ. Αλλά οι ΑΒΓ, ΒΑΓ και ΑΓΒ είναι ίσες με δύο ορθές. Άρα και οι ΑΒΓ, ΑΔΓ είναι ίσες με δύο ορθές. Όμοίως αποδεικνύεται ότι και οι ΒΑΔ, ΔΓΒ είναι επίσης ίσες με δύο ορθές.

Άρα, για παραλληλόγραμμα που βρίσκονται σε κύκλους, οι απέναντι γωνίες έχουν άθροισμα δύο ορθές. ΟΕΔ.

Πρόταση 23

Δύο όμοια και άνισα τμήματα κύκλων δεν μπορούν να κατασκευαστούν στην ίδια πλευρά μιας ευθείας.



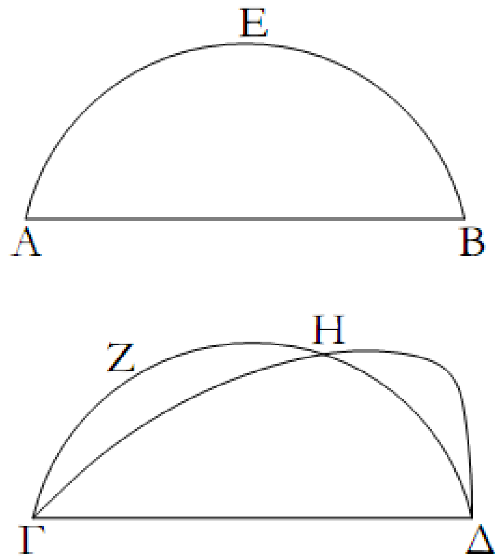
Διότι εάν ήταν δυνατόν, έστω ότι επί της ευθείας ΑΒ κατασκευάζονται δύο άνισα και όμοια τμήματα κύκλων, τα ΑΓΒ, ΑΔΒ και ας έχει διέλθει η ΑΓΔ και ας έχουν ενωθεί οι ΓΒ, ΔΒ.

Επειδή λοιπόν, το ΑΓΒ είναι όμοιο με το ΑΔΒ τμήμα και τα τμήματα στα οποία βαίνουν ίσες γωνίες είναι όμοια, η ΑΓΒ είναι ίση με την ΑΔΒ, η εξωτερική με την εσωτερική, που είναι αδύνατον.

Άρα, δύο όμοια και άνισα τμήματα κύκλων δεν μπορούν να κατασκευαστούν στην ιδια πλευρά μιας ευθείας. ΟΕΔ.

Πρόταση 24

Τα τμήματα κύκλων πάνω σε ίσες ευθείες είναι ίσα μεταξύ τους.



Έστω λοιπόν, ότι στις ίσες ευθείες ΑΒ, ΓΔ, υπάρχουν τα όμοια τμήματα κύκλων ΑΕΒ, ΓΖΔ. Λέγω ότι το ΑΕΒ τμήμα είναι ίσο με το ΓΖΔ τμήμα.

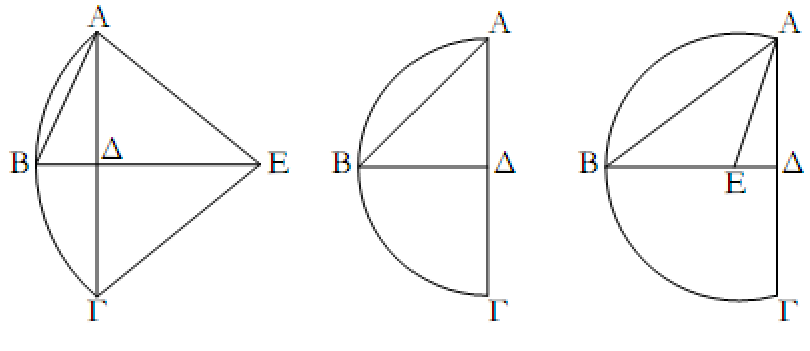
Εφαρμόζεται το ΑΕΒ τμήμα πάνω στο ΓΖΔ και τίθεται το σημείο Α πάνω στο Γ σημείο, και την ευθεία ΑΒ στη ΓΔ, εφαρμόζει και το Β σημείο πάνω στο Δ σημείο επειδή η ΑΒ είναι ίση με τη ΓΔ. Επειδή εφαρμόζει η ΑΒ ευθεία με την ΓΔ, τότε εφαρμόζει και το ΑΕΒ τμήμα με το ΓΖΔ. Γιατί αν εφαρμόζει η ΑΒ ευθεία με την ΓΔ, και όχι το ΑΕΒ με το ΓΖΔ, τότε ή θα εμπίπτει εντός ή εκτός, ή θα έχει άλλο σχήμα όπως το ΓΗΔ και κύκλος θα τέμνει κύκλο σε περισσότερα από δύο σημεία, που είναι αδύνατον. Άρα αν εφαρμόζει η ευθεία ΑΒ στη ΓΔ δεν μπορεί να μην εφαρμόζει το ΑΕΒ στο ΓΖΔ. Άρα εφαρμόζουν και είναι ίσα μεταξύ τους.

Άρα, τα τμήματα κύκλων πάνω σε ίσες ευθείες είναι ίσα μεταξύ τους. ΟΕΔ.

Πρόταση 25

Για δοθέν τμήμα ενός κύκλου, να γραφεί ο κύκλος του οποίου είναι τμήμα.

Έστω ΑΒΓ το δοθέν τμήμα του κύκλου. Θα πρέπει λοιπόν να γραφεί ο κύκλος του οποίου είναι τμήμα.



Ας έχει διχοτομηθεί η ΑΓ στο Δ και ας έχει αχθεί από το Δ σε ορθή γωνία η ΔΒ και ας έχει ενωθεί η ΑΒ. Η γωνία ΑΒΔ είναι ή μεγαλύτερη, ή ίση, ή μικρότερη από τη ΒΑΔ.

Έστω πρώτα ότι είναι μεγαλύτερη, και έστω ότι στην ευθεία ΒΑ, από το σημείο Α φτιάχνεται η γωνία ΑΒΔ ίση με τη ΒΑΕ, και ότι επεκτείνεται η ΒΔ μέχρι το Ε, και ας έχει ενωθεί η ΕΓ. Επειδή λοιπόν η γωνία ΑΒΕ είναι ίση με την ΒΑΕ, άρα είναι ίσες και οι ευθείες ΕΒ και ΕΑ. Και επειδή είναι ίση η ΑΔ με την ΔΓ, ενώ η ΔΕ είναι κοινή, πρέπει οι ΑΔ, ΔΕ να είναι ίσες ανά δύο με τις ΓΔ, ΔΕ. Η ΑΔΕ γωνία είναι ίση με την ΓΔΕ, γιατί είναι και οι δύο ορθές. Άρα οι βάσεις ΑΕ και ΓΕ είναι ίσες. Αλλά αποδείχθηκε ότι οι ΑΕ και η ΒΕ είναι ίσες. Και η ΒΕ είναι ίση με την ΓΕ, άρα είναι και μεταξύ τους ίσες οι τρεις ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ. Άρα ο κύκλος που γράφεται από τα ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, έχει κέντρο το Ε. Άρα με δοσμένο τμήμα, μπορεί να γραφεί ο κύκλος, και φαίνεται πως αν το ΑΒΓ είναι μικρότερο ενός ημικυκλίου, το κέντρο Ε είναι εκτός αυτού.

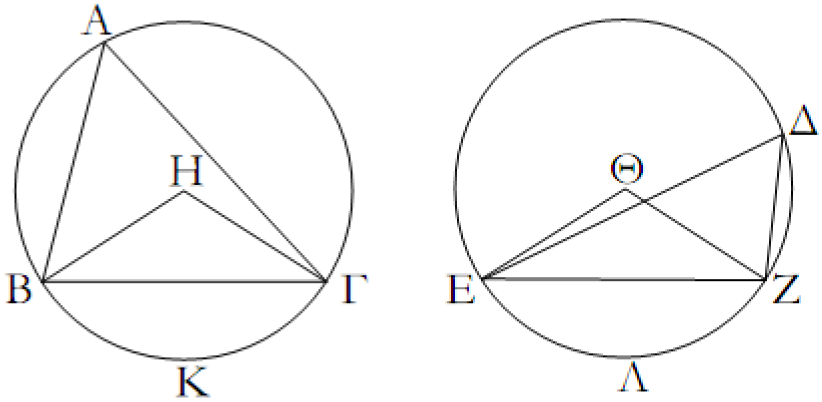
Ομοίως, αν η ΑΒΔ γωνία είναι ίση με την ΒΑΔ, η ΑΔ είναι ίση με κάθε μία από τις ΒΔ, ΔΓ, άρα οι τρεις ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ είναι ίσες μεταξύ τους, και το Δ γίνεται κέντρο του προς αναπλήρωση κύκλου, δηλαδή το ΑΒΓ είναι ημικύκλιο.

Αν η ΑΒΔ είναι μικρότερη της ΒΑΔ και φτιάχνεται στην ευθεία ΒΑ, πάνω στο Α, μια γωνία ίση με την ΑΒΔ, τότε το κέντρο θα βρεθεί πάνω στην Β, μέσα στο ΑΒΓ τμήμα, που είναι μεγαλύτερο από ημικύκλιο.

Άρα γράφηκε κύκλος από δοθέν τμήμα Ο.Ε.Π.

Πρόταση 26

Σε ίσους κύκλους, οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσες περιφέρειες είτε βαίνουν από το κέντρο, είτε βαίνουν από τις περιφέρειες.



Έστω οι ίσοι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ και σε αυτούς ίσες γωνίες ΒΗΓ και ΕΘΖ που βαίνουν από το κέντρο, και οι γωνίες ΒΑΓ, ΕΔΖ που βαίνουν από τις περιφέρειες. Λέγω ότι η περιφέρεια ΒΚΓ είναι ίση με τη περιφέρεια ΕΛΖ.

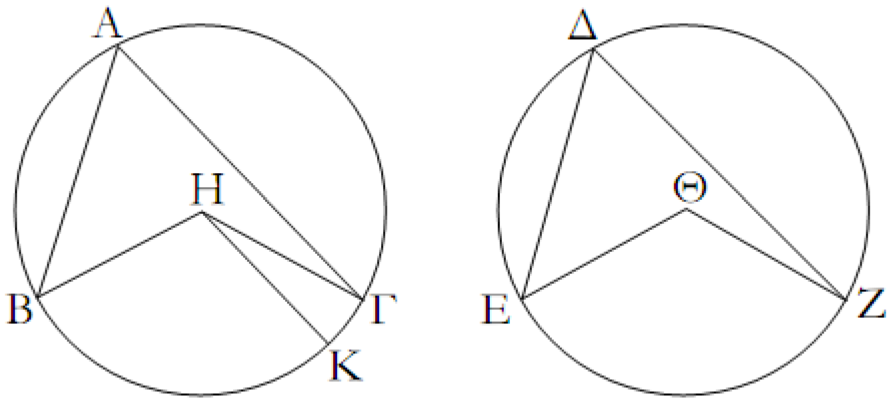
Ενώνονται οι ΒΓ και ΕΖ.

Επειδή οι κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ίσοι, είναι ίσες και οι ευθείες από τα κέντρα. Άρα οι ΒΗ, ΗΓ είναι ίσες με τις ΕΘ, ΘΖ αντίστοιχα. Και η γωνία Η είναι ίση με την γωνία Θ. Άρα, η βάση ΒΓ είναι ίση με τη βάση ΕΖ. Και επειδή η γωνία Α είναι ίση με την γωνία Δ, το τμήμα ΒΑΓ είναι όμοιο με το τμήμα ΕΔΖ, τα οποία βρίσκονται πάνω στις ίσες ευθείες [ΒΓ και ΕΖ]. Τα όμοια τμήματα κύκλων που είναι πάνω σε ίσες ευθείες είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα το τμήμα ΒΑΓ είναι ίσο με το τμήμα ΕΔΖ. Και ολόκληρος ο κύκλος ΑΒΓ είναι ίσος με ολόκληρο τον κύκλο ΔΕΖ. Άρα η λοιπή περιφέρεια ΒΚΓ είναι ίση με την περιφέρεια ΕΛΖ.

Άρα σε ίσους κύκλους, οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσες περιφέρειες, είτε βαίνουν από το κέντρο, είτε βαίνουν από τις περιφέρειες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 27

Σε ίσους κύκλους οι γωνίες που βαίνουν σε ίσες περιφέρειες είναι ίσες μεταξύ τους, και οι γωνίες από το κέντρο που βαίνουν σε ίσες περιφέρειες είναι ίσες μεταξύ τους.



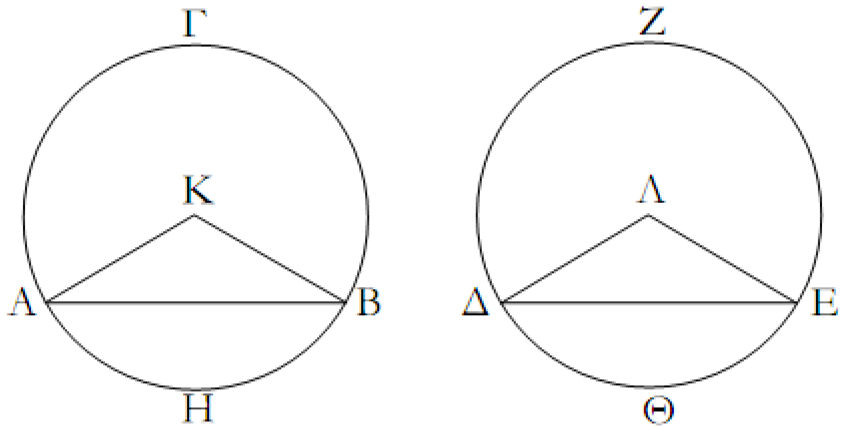
Στους ίσους κύκλους ΑΒΓ και ΔΕΖ, οι γωνίες ΒΗΓ και ΕΘΖ βαίνουν στις ίσες περιφέρειες ΒΓ, ΕΖ από τα κέντρα Η, Θ. Οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΔΖ βαίνουν επίσης σε ίσες περιφέρειες. Λέγω ότι η γωνία ΒΗΓ είναι ίση με την ΕΘΖ και η ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ.

Εάν η ΒΗΓ και η ΕΘΖ είναι άνισες, τότε μία από αυτές είναι η μεγαλύτερη. Έστω ότι η ΒΗΓ είναι μεγαλύτερη και κατασκευάζεται στην ευθεία ΒΗ από το σημείο Η. Τότε η γωνία ΕΘΖ είναι ίση με τη ΒΗΚ. Αλλά οι γωνίες που βαίνουν σε ίσες περιφέρειες από το κέντρο, είναι ίσες. Άρα η περιφέρεια ΒΚ είναι ίση με την περιφέρεια ΕΖ. Αλλά η ΕΖ είναι ίση με τη ΒΓ άρα η ΒΚ είναι ίση με τη ΒΓ, η μικρότερη με τη μεγαλύτερη. Το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η γωνία ΒΗΓ και η γωνία ΕΘΖ δεν είναι άνισες. Άρα είναι ίσες. Η γωνία στο Α είναι η μισή της ΒΗΓ και η γωνία Δ είναι μισή της ΕΘΖ. Άρα η γωνία στο Α είναι ίση με τη γωνία Δ.

Άρα σε ίσους κύκλους οι γωνίες που βαίνουν σε ίσες περιφέρειες είναι ίσες μεταξύ τους, και οι γωνίες από το κέντρο που βαίνουν σε ίσες περιφέρειες είναι ίσες μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 28

Σε ίσους κύκλους όταν ίσες ευθείες αφαιρούν ίσες περιφέρειες, τότε η μεγαλύτερη περιφέρεια είναι ίση με τη μεγαλύτερη, και η μικρότερη ίση με τη μικρότερη.



Έστω ΑΒΓ, ΔΕΖ ίσοι κύκλοι και ΑΒ, ΔΕ ίσες ευθείες μέσα σε αυτούς, που αφαιρούν τις μεγαλύτερες περιφέρειες ΑΓΒ, ΔΖΕ και τις μικρότερες ΑΗΒ, ΔΘΕ. Λέγω ότι η μεγαλύτερη περιφέρεια ΑΓΒ είναι ίση με τη μεγαλύτερη περιφέρεια ΔΖΕ και η μικρότερη ΑΗΒ είναι ίση με τη μικρότερη ΔΘΕ.

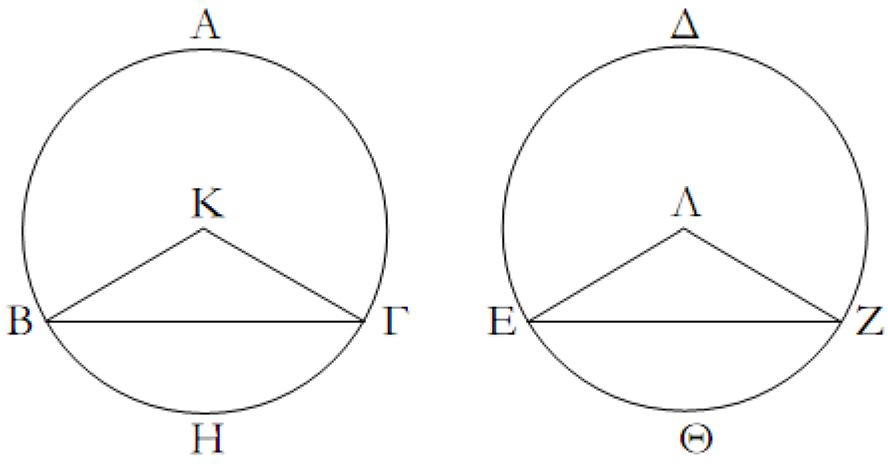
Ας έχουν ληφθεί Κ, Λ τα κέντρα των κύκλων και έχουν ενωθεί οι ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Και επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι, οι ευθείες από το κέντρο είναι ίσες. Πρέπει οι ΑΚ, ΚΒ να είναι ίσες με τις ΔΛ, ΛΕ και η βάση ΑΒ να είναι ίση με τη βάση ΔΕ, άρα η γωνία ΑΚΒ είναι ίση με τη γωνία ΔΛΕ. Και οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσες περιφέρειες, όταν βαίνουν από το κέντρο. Άρα η περιφέρεια ΑΗΒ είναι ίση με τη περιφέρεια ΔΘΕ. Ολόκληρος ο κύκλος ΑΒΓ είναι επίσης ίσος με ολόκληρο τον κύκλο ΔΕΖ. Άρα η λοιπή περιφέρεια ΑΓΒ είναι επίσης ίση με την λοιπή περιφέρεια ΔΖΕ.

Άρα, σε ίσους κύκλους όταν ίσες ευθείες αποκόπτουν ίσες περιφέρειες, τότε η μεγαλύτερη περιφέρεια είναι ίση με τη μεγαλύτερη, και η μικρότερη ίση με τη μικρότερη. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 29

Σε ίσους κύκλους, ίσες ευθείες υποτείνουν σε ίσες περιφέρειες.



Έστω ΑΒΓ, ΔΕΖ ίσοι κύκλοι και σε αυτούς αποκόπτονται ίσες περιφέρειες ΒΗΓ, ΕΘΖ και ενώνονται οι ευθείες ΒΓ, ΕΖ. Λέγω ότι η ΒΓ είναι ίση με τη ΕΖ.

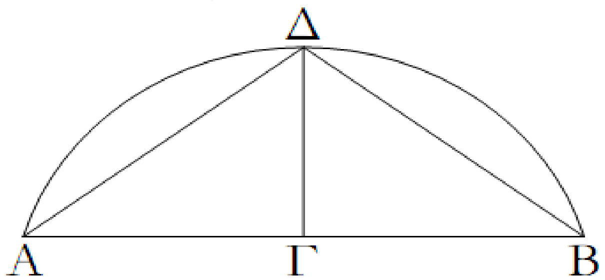
Λαμβάνονται Κ, Λ τα κέντρα των κύκλων. Και ενώνονται οι ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Και επειδή η περιφέρεια ΒΗΓ είναι ίση με την περιφέρεια ΕΘΖ, η γωνία ΒΚΓ είναι ίση με τη γωνία ΕΛΖ. Και επειδή οι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσοι, ίσες είναι και οι ευθείες από το κέντρο τους. Άρα οι ΒΚ, ΚΓ είναι ίσες με τις ΕΛ, ΛΖ αντίστοιχα. Αυτές περιέχουν ίσες γωνίες, άρα η βάση ΒΓ είναι ίση με τη βάση ΕΖ.

Άρα, σε ίσους κύκλους, ίσες ευθείες υποτείνουν σε ίσες περιφέρειες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 30

Να διχοτομηθεί δοθείσα περιφέρεια.



Έστω ΑΔΒ η δοθείσα περιφέρεια. Πρέπει να διχοτομηθεί η περιφέρεια ΑΔΒ.

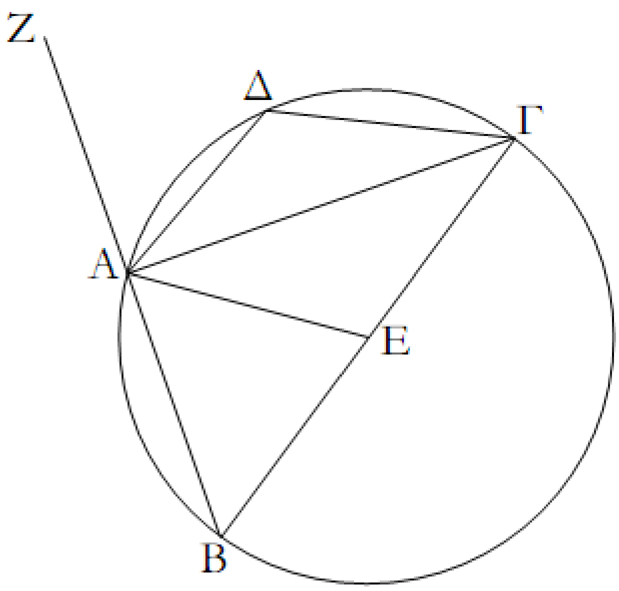
Ενώνεται η ΑΒ και διχοτομείται στο Γ και άγεται κάθετα η ΓΔ από το σημείο Γ στην ΑΒ ευθεία. Και ενώνονται οι ΑΔ, ΔΒ.

Και επειδή η ΑΓ είναι ίση με τη ΓΒ και η ΓΔ είναι κοινή, πρέπει οι ΑΓ, ΓΔ να είναι ίσες με τις ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Η γωνία ΑΓΔ είναι ίση με την ΒΓΔ και είναι και οι δύο ορθές. Άρα η βάση ΑΔ είναι ίση με τη βάση ΔΒ. Και ίσες ευθείες αφαιρούν ίσες περιφέρειες, η μεν μεγαλύτερη τη μεγαλύτερη, και η δε μικρότερη τη μικρότερη. Κάθε μία από τις ΑΔ, ΔΒ περιφέρειες είναι μικρότερη από ημικύκλιο, άρα η ΑΔ περιφέρεια είναι ίση με τη ΔΒ περιφέρεια.

Άρα η δοθείσα περιφέρεια διχοτομήθηκε στο σημείο Δ. Ο.Ε.Π

Πρόταση 31

Σε ένα κύκλο η γωνία που περιέχεται σε ημικύκλιο είναι ορθή, ενώ μια σε μεγαλύτερο τμήμα είναι μικρότερη από ορθή και μία σε μικρότερο τμήμα είναι μεγαλύτερη από ορθή. Αυτή που βαίνει σε μεγαλύτερο τμήμα είναι μεγαλύτερη της ορθής και αυτή που βαίνει σε μικρότερο τμήμα είναι μικρότερη της ορθής.



Έστω ΑΒΓΔ κύκλος και έστω η ΒΓ διάμετρός του και Ε το κέντρο του. Ενώνονται οι ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ότι η γωνία ΒΑΓ που περιέχεται στο ημικύκλιο ΒΑΓ είναι ορθή και η γωνία ΑΒΓ που περιέχεται στο τμήμα ΑΒΓ, το οποίο είναι μεγαλύτερο απ' το ημικύκλιο, είναι μικρότερη της ορθής και η γωνία ΑΔΓ που περιέχεται στο τμήμα ΑΔΓ που είναι μικρότερο απ' το ημικύκλιο, είναι μεγαλύτερη της ορθής.

Ενώνεται η ΑΕ και διέρχεται η ΒΑ από το Ζ.

Επειδή η ΒΕ είναι ίση με την ΕΑ, η γωνία ΑΒΕ είναι ίση με την ΒΑΕ. Πάλι επειδή η ΓΕ είναι ίση με την ΕΑ, η γωνία ΑΓΕ είναι ίση με την ΓΑΕ . Άρα ολόκληρη η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τις γωνίες ΑΒΓ, ΑΓΒ. Η ΖΑΓ, είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ίση με τις γωνίες ΑΒΓ, ΑΓΒ . Άρα η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΖΑΓ και η καθεμία είναι ορθή. Άρα η γωνία ΒΑΓ στο ημικύκλιο ΒΑΓ είναι ορθή.

Επειδή οι γωνίες ΑΒΓ, ΒΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερες από δύο ορθές και ΒΑΓ είναι ορθή, η γωνία ΑΒΓ είναι μικρότερη από ορθή. Και αυτή είναι στο τμήμα ΑΒΓ που είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου.

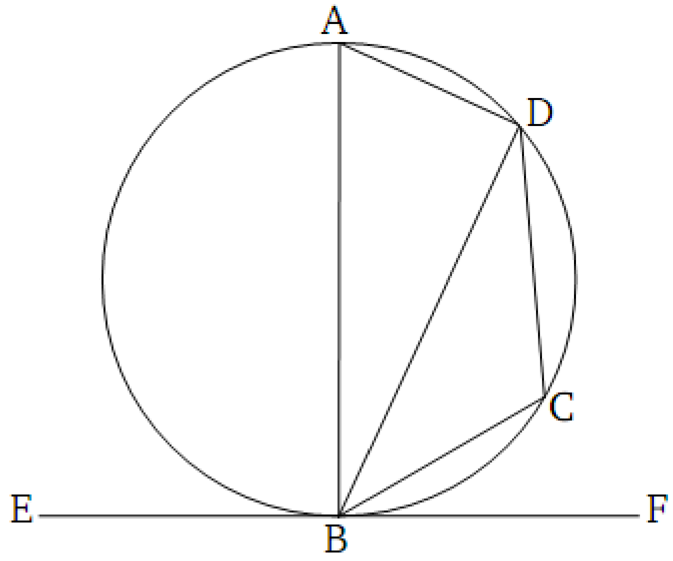
Και επειδή μέσα στον κύκλο είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και για τετράπλευρα μέσα σε κύκλους οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ορθές (άρα οι γωνίες ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ανά δύο ορθές), η γωνία ΑΒΓ είναι μικρότερη από ορθή. Άρα η εναπομείνασα γωνία ΑΔΓ είναι μεγαλύτερη από ορθή και είναι στο τμήμα ΑΔΓ, που είναι μικρότερο του ημικυκλίου.

Λέγω ότι και η μεν στο μεγαλύτερο τμήμα γωνία, η περιεχόμενη στην περιφέρεια ΑΒΓ και στην ΑΓ ευθεία είναι μεγαλύτερη της ορθής. Η δε στο μικρότερο τμήμα γωνία, η περιεχόμενη της ΑΔ(Γ) περιφέρειας και της ΑΓ ευθείας είναι μικρότερη της ορθής. Και αυτό είναι φανερό. Επειδή λοιπόν η περιεχόμενη από τις ΒΑ , ΑΓ ευθείες είναι ορθή, η περιεχόμενη από την ΑΒΓ περιφέρεια και την ΑΓ ευθεία είναι μεγαλύτερη από ορθή. Πάλι επειδή η περιεχόμενη από τις ΑΓ και ΑΖ ευθείες είναι ορθή, η περιεχόμενη από την ΓΑ ευθεία και την ΑΔ(Γ) περιφέρεια είναι μικρότερη από ορθή.

Άρα, σε ένα κύκλο η γωνία που περιέχεται σε ημικύκλιο είναι ορθή, ενώ μια σε μεγαλύτερο τμήμα είναι μικρότερη από ορθή και μία σε μικρότερο τμήμα είναι μεγαλύτερη από ορθή. Αυτή που βαίνει σε μεγαλύτερο τμήμα είναι μεγαλύτερη της ορθής και αυτή που βαίνει σε μικρότερο τμήμα είναι μικρότερη της ορθής. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 32

Αν ευθεία εφάπτεται σε κύκλο και άγεται από το σημείο επαφής ευθεία τεμνόμενη στον κύκλο, τότε σχηματίζει γωνία με την εφαπτομένη τέτοια ώστε οι γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου να είναι ίσες .



Έστω κύκλος ΑΒΓΔ που εφάπτεται στην ευθεία ΕΖ στο σημείο Β και άγεται από το σημείο Β η ευθεία ΒΔ στον κύκλο ΑΒΓΔ τέμνουσα σ’ αυτόν. Λέγω ότι η ΒΔ σχηματίζει γωνία με την εφαπτομένη ΕΖ τέτοια ώστε και οι γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου να είναι ίσες, δηλαδή η μεν γωνία ΖΒΔ είναι ίση με τη συνισταμένη γωνία στο τμήμα ΒΑΔ, η δε γωνία ΕΒΔ είναι ίση με τη συνισταμένη γωνία στο τμήμα ΔΓΒ.

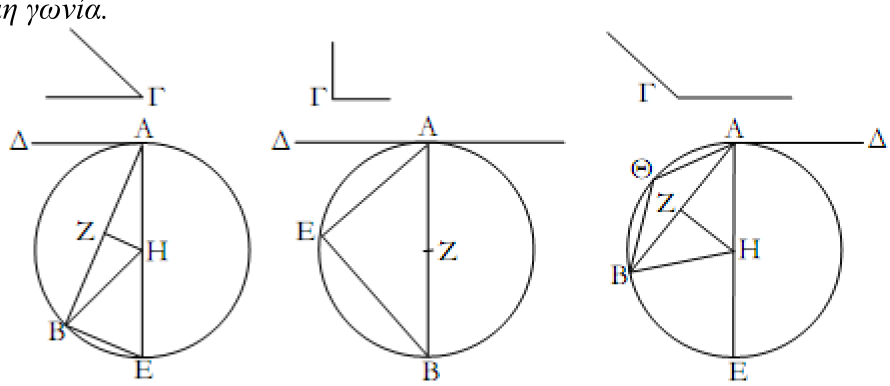
Άγεται από το Β, η ΒΑ κάθετη στην ΕΖ . Και έχει ληφθεί στην περιφέρεια ΒΔ τυχαίο σημείο Γ, και ενώνονται οι ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Επειδή στον κύκλο ΑΒΓΔ εφάπτεται η ευθεία ΕΖ στο Β και από το σημείο επαφής άχθηκε η ΒΑ κάθετη στην εφαπτομένη, το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ είναι πάνω στην ΒΑ. Άρα η ΒΑ είναι διάμετρος του κύκλου ΑΒΓΔ και η γωνία ΑΔΒ που είναι στο ημικύκλιο είναι ορθή. Άρα οι λοιπές γωνίες ΒΑΔ, ΑΒΔ είναι ίσες με μια ορθή. Η ΑΒΖ είναι ορθή, άρα η ΑΒΖ είναι ίση με τις ΒΑΔ, ΑΒΔ. Αφαιρέθηκε η κοινή ΑΒΔ, άρα η εναπομείνασα ΔΒΖ γωνία είναι ίση με τη γωνία στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου ΒΑΔ . Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι στον κύκλο, οι απέναντι γωνίες του θα είναι ανά δύο ίσες με ορθές . Θα είναι δε και οι ΔΒΖ, ΔΒΕ ανά δύο ίσες με ορθές, άρα οι ΔΒΖ, ΔΒΕ είναι ίσες με τις ΒΑΔ, ΒΓΔ, δείχθηκε οτι η ΒΑΔ είναι ίση με τη ΔΒΖ. Άρα η λοιπή στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου ΔΓΒ, ΔΒΕ είναι ίση με τη ΔΓΒ γωνία.

Άρα, αν ευθεία εφάπτεται σε κύκλο και άγεται από το σημείο επαφής ευθεία τεμνόμενη στον κύκλο, τότε σχηματίζει γωνία με την εφαπτομένη τέτοια ώστε οι γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου να είναι ίσες. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 33

Σε δοθείσα ευθεία να γραφεί τμήμα κύκλου δεχόμενο γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.



Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ και η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία Γ. Πρέπει επί της δοθείσας ευθείας ΑΒ να γραφεί τμήμα κύκλου δεχόμενο γωνία ίση με τη γωνία Γ.

Η Γ (γωνία) είναι είτε οξεία είτε ορθή είτε αμβλεία. Έστω αρχικά ότι είναι οξεία και όπως στο πρώτο σχήμα συνίσταται η ΒΑΔ από την ΑΒ ευθεία και το σημείο Α ίση με την γωνία Γ, άρα η ΒΑΔ είναι οξεία. Άγεται η ΑΕ κάθετη στη ΔΑ, και διχοτομείται η ΑΒ στο Ζ, και άγεται από το σημείο Ζ κάθετα προς την ΑΒ η ΖΗ και ενώνεται η ΗΒ.

Και επειδή η ΑΖ είναι ίση με τη ΖΒ και η ΖΗ κοινή, οι δύο ΑΖ, ΖΗ είναι ίσες με τις δύο ΒΖ, ΖΗ. Και η γωνία ΑΖΗ είναι ίση με τη ΒΖΗ. Άρα η βάση ΑΗ είναι ίση με τη βάση ΒΗ . Άρα ο γραφόμενος κύκλος με κέντρο Η και διάστημα ΗΑ περνάει και από το Β. Έστω ότι γράφεται ο ΑΒΕ, και ενώνεται η ΕΒ. Επειδή από το άκρο Α της διαμέτρου ΑΕ, η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, η ΑΔ εφάπτεται του ΑΒΕ κύκλου. Επειδή η ευθεία ΑΔ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΕ και από το σημείο επαφής Α άχθηκε προς το κύκλο ΑΒΕ η ευθεία ΑΒ, άρα η γωνία ΔΑΒ είναι ίση με τη γωνία στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου ΑΕΒ. Αλλά η ΔΑΒ είναι ίση με τη γωνία Γ, άρα η ΑΕΒ είναι ίση με τη γωνία Γ.

Άρα σε δοθείσα ευθεία ΑΒ γράφεται τμήμα κύκλου ΑΕΒ δεχόμενο γωνία ΑΕΒ ίση με τη δοθείσα γωνία Γ.

Αλλά έστω η γωνία Γ να είναι ορθή και έστω πάλι ότι στην ΑΒ γράφεται τμήμα κύκλου δεχόμενο γωνία ίση με την ορθή Γ [γωνία]. Συνίσταται [πάλι] η ΒΑΔ ίση με την ορθή γωνία Γ, όπως έχει στο δεύτερο σχήμα και διχοτομείται η ΑΒ στο Ζ και με κέντρο το Ζ, από τα δύο διαστήματα ΖΑ, ΖΒ, γράφεται ο κύκλος ΑΕΒ .

Άρα η ΑΔ ευθεία εφάπτεται του ΑΒΕ κύκλου σε ορθή γωνία από το Α. Η γωνία ΒΑΔ είναι ίση με τη γωνία στο τμήμα ΑΕΒ και μία γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή. Αλλά και η ΒΑΔ είναι ίση με τη γωνία Γ, άρα η γωνία στο ΑΕΒ είναι ίση με τη γωνία Γ.

Άρα γράφεται πάλι στην ΑΒ το τμήμα κύκλου ΑΕΒ δεχόμενο γωνία ίση με τη γωνία Γ.

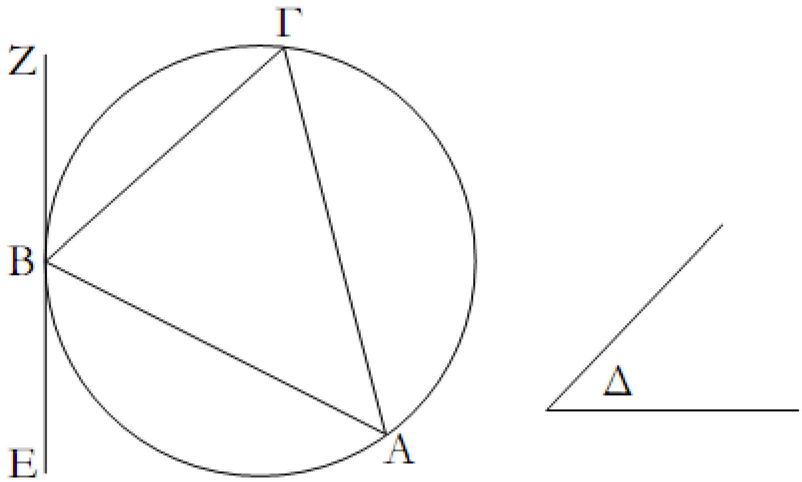
Έστω η γωνία Γ να είναι αμβλεία. Συνίσταται η ΒΑΔ από την ευθεία ΑΒ και το σημείο Α,ίση με τη γωνία Γ, όπως στο τρίτο σχήμα. Άγεται η ΑΕ κάθετη στην ΑΔ και διχοτομείται πάλι η ΑΒ στο Ζ,άγεται επίσης η ΖΗ κάθετη στην ΑΒ και ενώνεται η ΗΒ.

Και επειδή πάλι η ΑΖ είναι ίση με τη ΖΒ και η ΖΗ κοινή, οι δύο ΑΖ, ΖΗ είναι ίσες με τις ΒΖ, ΖΗ. Η γωνία ΑΖΗ είναι ίση με τη γωνία ΒΖΗ, άρα η βάση ΑΗ είναι ίση με τη βάση ΒΗ, άρα γράφεται κύκλος με κέντρο το Η και διάστημα ΗΑ που περνάει από το Β. Όπως διέρχεται και ο ΑΕΒ. Και επείδη η ΑΔ είναι κάθετη στο άκρο της διαμέτρου ΑΕ, η ΑΔ εφάπτεται του ΑΕΒ κύκλου.Από το σημείο επαφής Α άχθηκε η ΑΒ, άρα η γωνία ΒΑΔ είναι ίση με την συνισταμένη γωνία στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου ΑΘΒ. Αλλά η γωνία ΒΑΔ είναι ίση με τη γωνία Γ και άρα η γωνία στο τμήμα ΑΘΒ είναι ίση με τη γωνία Γ.

Άρα σε δοθείσα ευθεία γράφεται τμήμα κύκλου δεχόμενο γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 34

Από δοθέν κύκλο να αφαιρεθεί τμήμα δεχόμενο γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία .



Έστω ΑΒΓ ο δοθείς κύκλος και Δ η ευθύγραμμη γωνία. Πρέπει από τον κύκλο ΑΒΓ να αποκοπεί τμήμα δεχόμενο γωνία ίση με τη δοθείσα ευθύγραμμη γωνία Δ.

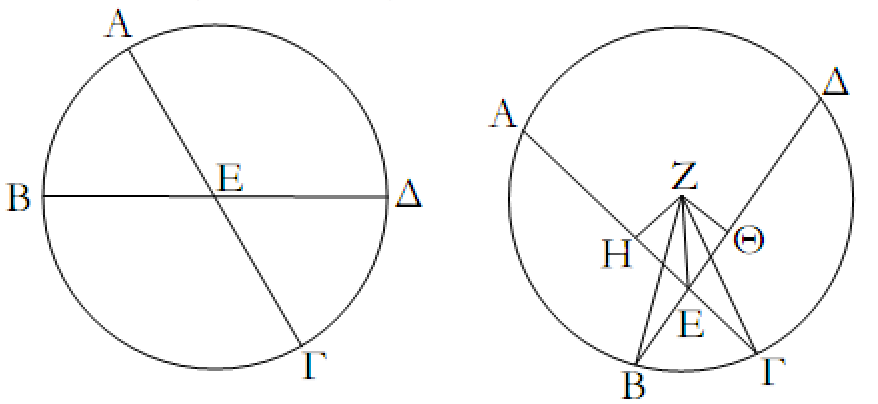
Άγεται η ΕΖ εφαπτόμενη του κύκλου ΑΒΓ στο σημείο Β. Συνίσταται από την ευθεία ΖΒ και το προς αυτής σημείο Β, γωνία ΖΒΓ ίση με τη γωνία Δ.

Επειδή λοιπόν η ΕΖ ευθεία εφάπτεται του κύκλου ΑΒΓ και άχθηκε η ΒΓ από το σημείο επαφής Β, η γωνία ΖΒΓ είναι ίση με τη συνισταμένη γωνία στο εναλλάξ τμήμα ΒΑΓ. Αλλά η ΖΒΓ είναι ίση με τη γωνία Δ, άρα η γωνία στο ΒΑΓ τμήμα είναι ίση με την Δ [γωνία].

Άρα από δοθέν κύκλο αφαιρέθηκε τμήμα ΒΑΓ δεχόμενο γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 35

Αν σε ένα κύκλο δύο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους τότε το ορθογώνιο που περιέχεται στα τμήματα της μιας είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στα τμήματα της άλλης.



Σε κύκλο ΑΒΓΔ, δύο ευθείες οι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται μεταξύ τους στο σημείο Ε. Λέγω ότι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ,ΕΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΔΕ, ΕΒ.

Αν οι ΑΓ, ΒΔ διέρχονται από το κέντρο ώστε το Ε να είναι κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ, είναι φανερό ότι οι ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ είναι ίσες και το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΔΕ, ΕΒ.

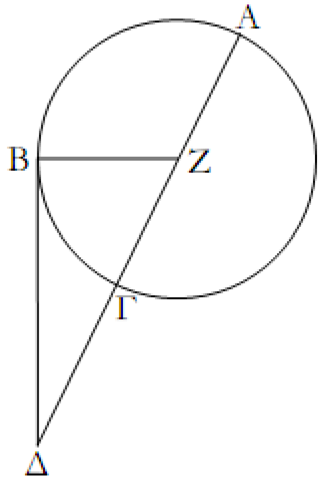
Έστω ότι δεν πρέπει οι ΑΓ, ΔΒ να διέρχονται από το κέντρο και έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ, έστω το Ζ, και άγονται από το Ζ οι ΖΗ, ΖΒ κάθετες στις ΑΓ, ΔΒ και ενώνονται οι ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

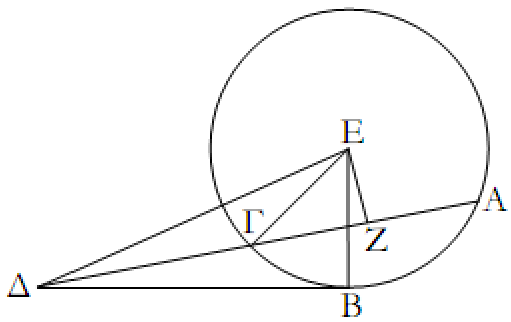
Και επειδή η ευθεία ΗΖ, που περνάει από το κέντρο, τέμνει κάθετα την ΑΓ που δεν περνάει από το κέντρο και τη διχοτομεί, η ΑΗ είναι ίση με τη ΗΓ. Επειδή η ευθεία ΑΓ τέμνεται ίσα στο Η και άνισα στο Ε, το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ με το τετράγωνο από την ΕΗ είναι ίσο με το τετράγωνο από την ΗΓ. Ας προστεθεί το [κοινό] τετράγωνο από την ΗΖ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΗΕ, ΗΖ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΗ, ΗΖ. Αλλά, το μεν περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΕΗ, ΗΖ είναι ίσο με το τετράγωνο από την ΖΕ, το δε περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΗ, ΗΖ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΓ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ με το τετράγωνο από την ΖΕ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΓ. Η ΖΓ είναι ίση με τη ΖΒ. Άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ με το τετράγωνο από τη ΖΕ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΒ. Γι αυτό πρέπει και το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΔΕ, ΕΒ με το τετράγωνο από τη ΖΕ να είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΒ. Δείχθηκε δε και οτι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ με το τετράγωνο από τη ΖΕ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΒ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ με το τετράγωνο από τη ΖΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΔΕ, ΕΒ με το τετράγωνο από τη ΖΕ. Αφαιρώντας κοινά το τετράγωνο από το ΖΕ, το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΕ, ΕΓ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΔΕ και ΕΒ.

Άρα αν σε ένα κύκλο δύο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους τότε το ορθογώνιο που περιέχεται στα τμήματα της μιας είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται στα τμήματα της άλλης. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 36

Αν ληφθεί σημείο εκτός κύκλου, και από αυτό προσπίπτουν δύο ευθείες στον κύκλο και η μια από αυτές τέμνει τον κύκλο και η άλλη εφάπτεται σ'αυτόν, τότε το περιεχόμενο ορθογώνιο από την τέμνουσα και την ευθεία που βρίσκεται μεταξύ του σημείου και της κυρτής περιφέρειας είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτόμενης.





Ας έχει ληφθεί σημείο Δ εκτός του κύκλου ΑΒΓ και από το Δ δύο ευθείες οι ΔΓ[Α], ΔΒ προσπίπτουν στον κύκλο ΑΒΓ. Η μεν ΔΓΑ τέμνει τον κύκλο ΑΒΓ, η δε ΒΔ εφάπτεται. Λέγω ότι το περιεχόμενο ορθογώνιο ΑΔ, ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΔΒ.

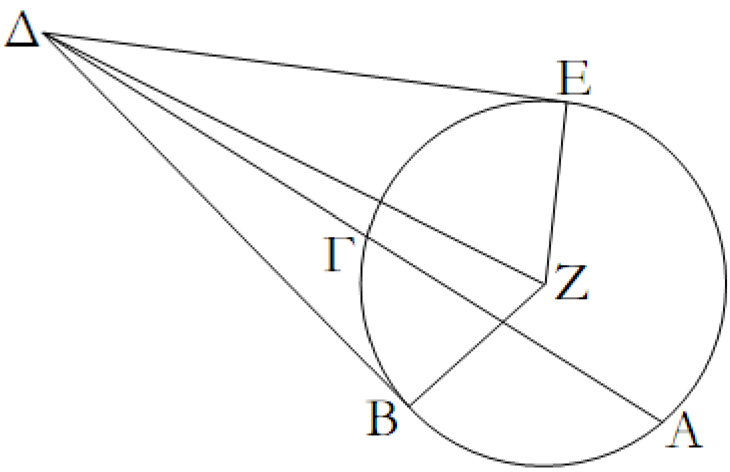
Η [Δ]ΓΑ διέρχεται είτε από το κέντρο είτε όχι. Έστω πρώτα ότι διέρχεται από το κέντρο και έστω Ζ το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ. Ενώνεται η ΖΒ, άρα η ΖΒΔ είναι ορθή. Επειδή η ευθεία ΑΓ διχοτομείται στο Ζ και πρόσκειται η ΓΔ σ’ αυτή, το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από τη ΖΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΔ. Η ΖΓ είναι ίση με τη ΖΒ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από τη ΖΒ είναι ίσο με το τεράγωνο από τη ΖΔ. Τα περιεχόμενα ορθογώνια από τα ΖΒ, ΒΔ είναι ίσα με τα τετράγωνα από τη ΖΔ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από τη ΖΒ είναι ίσο με τα περιεχόμενα ορθογώνια από τις ΖΒ, ΒΔ. Αφαιρείται κοινά το τετράγωνο από την ΖΒ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΔΒ εφαπτομένης.

Έστω ότι η ΔΓΑ δεν περνάει από το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ και έχει ληφθεί το κέντρο Ε. Άγεται η ΕΖ κάθετη στην ΑΓ από το Ε και ενώνονται οι ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, τότε η γωνία ΕΒΔ είναι ορθή. Επειδή η ευθεία ΕΖ που διέρχεται από το κέντρο, τέμνει κάθετα την ΑΓ που δε διέρχεται απ' το κέντρο, και τη διχοτομεί στο σημείο Ζ, και η ΓΔ πρόσκειται σε αυτή, το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από τη ΖΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΖΔ. Προστίθεται κοινά το τετράγωνο από τη ΖΕ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΖ, ΖΕ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΖΔ, ΖΕ. Το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΓΖ, ΖΕ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΕΓ. Η ΕΖΓ [γωνία] είναι ορθή. Το τετράγωνο από την ΕΔ είναι ίσο με τα περιεχόμενα ορθογώνια από τις ΔΖ, ΖΕ άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από την ΕΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από την ΕΔ. Η ΕΓ είναι ίση με την ΕΒ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από την ΕΒ είναι ίσο με το τετράγωνο από την ΕΔ. Τα περιεχόμενα ορθογώνια από τις ΕΒ, ΒΔ είναι ίσα με το τετράγωνο από την ΕΔ. Η γωνία ΕΒΔ είναι ορθή, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ με το τετράγωνο από την ΕΒ είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΕΒ, ΒΔ. Αφαιρείται κοινά το τετράγωνο από την ΕΒ, άρα το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΔΒ.

Άρα αν ληφθεί σημείο εκτός κύκλου, και από αυτό προσπίπτουν δύο ευθείες στον κύκλο και η μια από αυτές τέμνει τον κύκλο και η άλλη εφάπτεται σ'αυτόν, τότε το περιεχόμενο ορθογώνιο από την τέμνουσα και την ευθεία που βρίσκεται μεταξύ του σημείου και της κυρτής περιφέρειας είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτόμενης.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 37

Αν σε έναν κύκλο ληφθεί σημείο εκτός και από το σημείο προσπίπτουν δύο ευθείες στον κύκλο, η μία εκ των οποίων τον τέμνει, η άλλη προσπίπτει σ' αυτόν και το περιεχόμενο ορθογώνιο από την τέμνουσα και την ευθεία που βρίσκεται μεταξύ του σημείου και της κυρτής περιφέρειας είναι ίσο με το τετράγωνο από την προσπίπτουσα, τότε η προσπίπτουσα εφάπτεται στον κύκλο.



Σε κύκλο ΑΒΓ λήφθηκε σημείο Δ εκτός αυτού και από το Δ προς τον κύκλο ΑΒΓ προσπίπτουν δύο ευθείες οι ΔΓΑ, ΔΒ. Η μεν ΔΓΑ τέμνει τον κύκλο, η δε ΔΒ προσπίπτει. Έστω ότι το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ είναι ίσο με το τεράγωνο από τη ΔΒ. Λέγω ότι η ΔΒ εφάπτεται του ΑΒΓ κύκλου.

Άγεται η ΔΕ εφαπτομένη του κύκλου ΑΒΓ και έχει ληφθεί το κέντρο του και έστω αυτό Ζ. Ενώνονται οι ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. Άρα η ΖΕΔ είναι ορθή. Επειδή η ΔΕ εφάπτεται του ΑΒΓ κύκλου το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις ΑΔ, ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΔΒ. Το τετράγωνο από τη ΔΕ είναι ίσο με το τετράγωνο από τη ΔΒ, άρα η ΔΕ είναι ίση με τη ΔΒ. Η ΖΕ είναι ίση με τη ΖΒ, άρα οι ΔΕ, ΕΖ είναι ίσες με τις ΔΒ, ΒΖ. Η βάση ΖΔ είναι κοινή άρα η γωνία ΔΕΖ είναι ίση με τη γωνία ΔΒΖ. Η γωνία ΔΕΖ είναι ορθή, άρα η γωνία ΔΒΖ είναι ορθή. Η ΖΒ είναι η διάμετρος, και η διάμετρος που άγεται κάθετα από τα άκρα του κύκλου εφάπτεται σ' αυτόν, άρα η ΔΒ εφάπτεται του ΑΒΓ κύκλου. Όμοίως αποδεικνύεται ότι και το κέντρο βρίσκεται πάνω στην ΑΓ.

Άρα, αν σε έναν κύκλο ληφθεί σημείο εκτός και από το σημείο προσπίπτουν δύο ευθείες στον κύκλο, η μία εκ των οποίων τον τέμνει, η άλλη προσπίπτει σ' αυτόν και το περιεχόμενο ορθογώνιο από την τέμνουσα και την ευθεία που βρίσκεται μεταξύ του σημείου και της κυρτής περιφέρειας είναι ίσο με το τετράγωνο από της προσπίπτουσα, τότε η προσπίπτουσα εφάπτεται στον κύκλο. Ο.Ε.Δ.