

# ΕΥΚΚΛΕΙΔΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΙΒΛΙΟ Δ'

## **Επιμέλεια Μετάφρασης:**

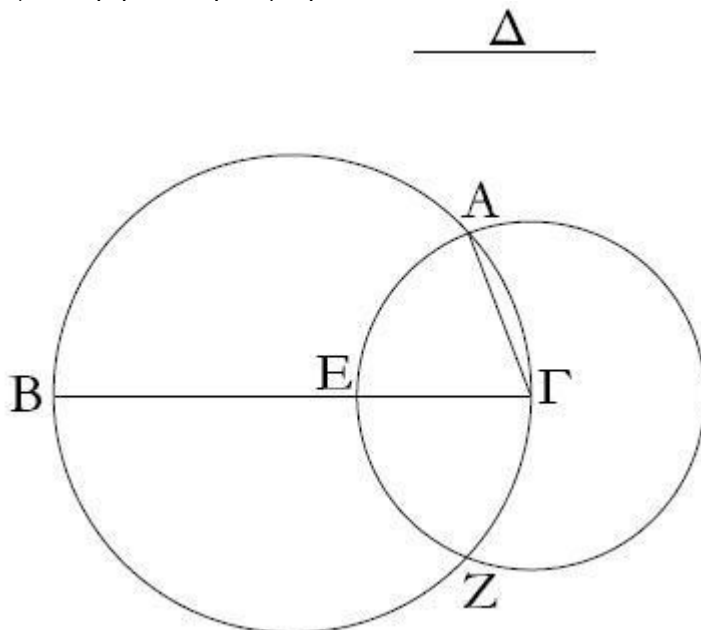
- Αραούζου Μαρίνα Α.Μ.:3696
- Ασβεστάς Ιωάννης – Μάριος Α.Μ.: 3579
- Κασσωτάκη Μαρία Α.Μ.:3610
- Λαμπριανού Μαριάνθη Α.Μ.: 3293
- Χαραλάμπους Ξένια Α.Μ.:3698

### Ορισμοί

1. Ευθύγραμμο σχήμα εγγράφεται σε ένα άλλο ευθύγραμμο σχήμα, όταν κάθε γωνία του εγγραφόμενου σχήματος βρίσκεται πάνω σε κάποια πλευρά του ευθύγραμμου σχήματος στο οποίο εγγράφεται.
2. Ομοίως, ένα ευθύγραμμο σχήμα περιγράφεται σε ένα άλλο ευθύγραμμο σχήμα, όταν κάθε πλευρά του περιγραφόμενου βρίσκεται πάνω σε κάποια γωνία του σχήματος στο οποίο περιγράφεται.
3. Ευθύγραμμο σχήμα λέγεται ό,τι εγγράφεται σε κύκλο, όταν η κάθε γωνία του εγγραφόμενου βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου.
4. Ευθύγραμμο σχήμα λέγεται ό,τι περιγράφεται σε κύκλο, όταν η κάθε πλευρά του περιγραφόμενου εφάπτεται στην περιφέρεια του κύκλου.
5. Ομοίως, κύκλος λέγεται ό,τι εγγράφεται σε σχήμα, όταν η περιφέρειά του περνάει πάνω από κάθε πλευρά του σχήματος στο οποίο εγγράφεται.
6. Κύκλος λέγεται ό,τι περιγράφεται σε σχήμα, όταν περνάει πάνω από κάθε γωνία του σχήματος στο οποίο περιγράφεται.
7. Ευθεία λέγεται ό,τι εφαρμόζεται σε κύκλο, όταν τα άκρα της βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κύκλου.

### **Πρόταση 1**

*Στον δοθέντα κύκλο να εφαρμοστεί ευθεία ίση με δοθείσα ευθεία, η οποία δεν είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο του κύκλου.*



Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και η δοθείσα ευθεία Δ που δεν είναι μεγαλύτερη της διαμέτρου του κύκλου. Στον κύκλο ΑΒΓ πρέπει να εφαρμοστεί μια ευθεία ίση με την ευθεία Δ.

Ας αχθεί η ΒΓ διάμετρος του κύκλου ΑΒΓ. Αν η ΒΓ είναι ίση με τη Δ, τότε ότι ζητείται επιτεύχθηκε, γιατί εφαρμόζεται στον κύκλο ΑΒΓ η ευθεία ΒΓ ίση της Δ.

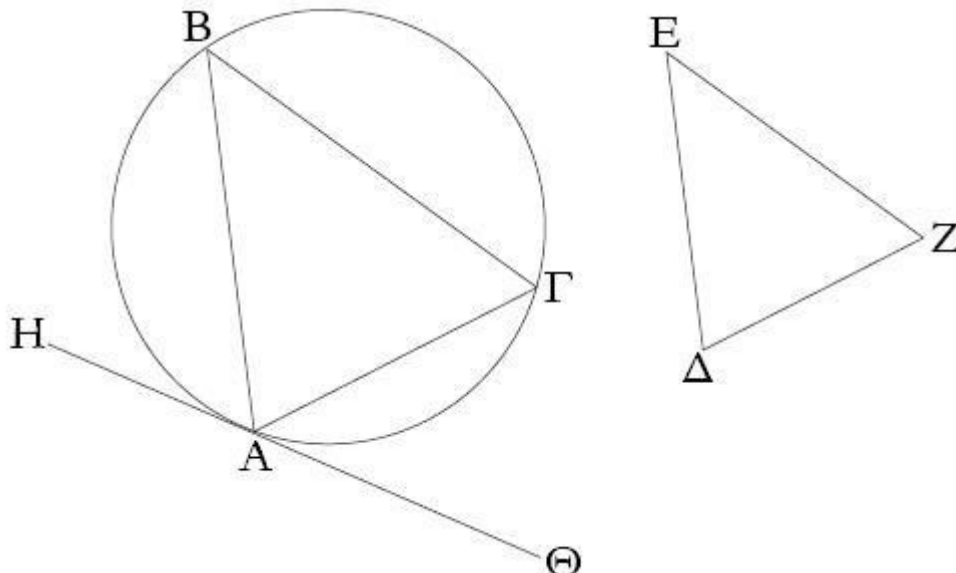
Αν η ΒΓ είναι μεγαλύτερη της Δ, άγεται η ΓΕ ίση με τη Δ, γράφεται κύκλος ΕΑΖ κέντρου Γ διαστήματος ΓΕ και ενώνεται η ΓΑ.

Επειδή το σημείο Γ είναι το κέντρο του κύκλου ΕΑΖ, η ΓΑ είναι ίση με τη ΓΕ. Αλλά η Δ είναι ίση με τη ΓΕ. Άρα και η Δ είναι ίση με τη ΓΑ.

Άρα στον δοθέντα κύκλο ΑΒΓ εφαρμόζεται η ευθεία ΓΑ ίση με τη δοθείσα ευθείας Δ. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 2

Στον δοθέντα κύκλο να εγγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο.



Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και το δοθέν τρίγωνο ΔΕΖ. Στον κύκλο ΑΒΓ πρέπει να εγγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

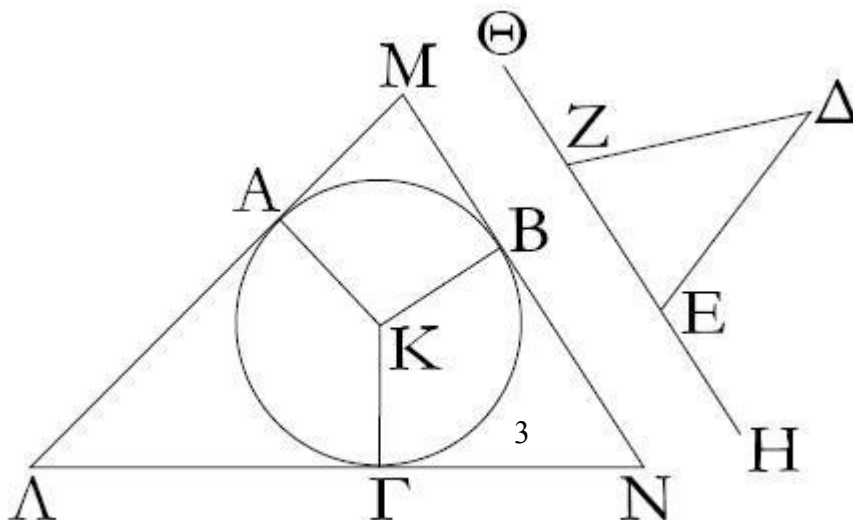
Ας αχθεί η εφαπτόμενη ΗΘ του κύκλου ΑΒΓ στο Α. Και δημιουργείται στην ευθεία ΑΘ και στο σημείο αυτής Α γωνία ΘΑΓ ίση με την γωνία ΔΕΖ. Και στην ευθεία ΑΗ και στο σημείο αυτής Α η ΗΑΒ ίση με την ΔΕΖ [γωνία] και ενώνεται η ΒΓ.

Επειδή στον κύκλο ΑΒΓ εφάπτεται η ευθεία ΑΘ και από το σημείο επαφής Α διέρχεται η ευθεία ΑΓ, άρα η γωνία ΘΑΓ είναι ίση με την εναλλάξ γωνία των τμημάτων του κύκλου ΑΒΓ. Αλλά η ΘΑΓ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Άρα και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Λόγω αυτών η γωνία ΑΓΒ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Άρα και η λοιπή γωνία ΒΑΓ είναι ίση με τη λοιπή ΕΔΖ [άρα το ΑΒΓ είναι τρίγωνο ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ και εγγράφεται στον κύκλο ΑΒΓ].

Άρα στον δοθέντα κύκλο εγγράφεται τρίγωνο ισογώνιο με το δοθέν τρίγωνο. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 3

Σε δοθέντα κύκλο να περιγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο.



Έστω κύκλος  $AB\Gamma$  και τρίγωνο  $\Delta EZ$ . Στον κύκλο  $AB\Gamma$  πρέπει να περιγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με το δοθέν τρίγωνο  $\Delta EZ$ .

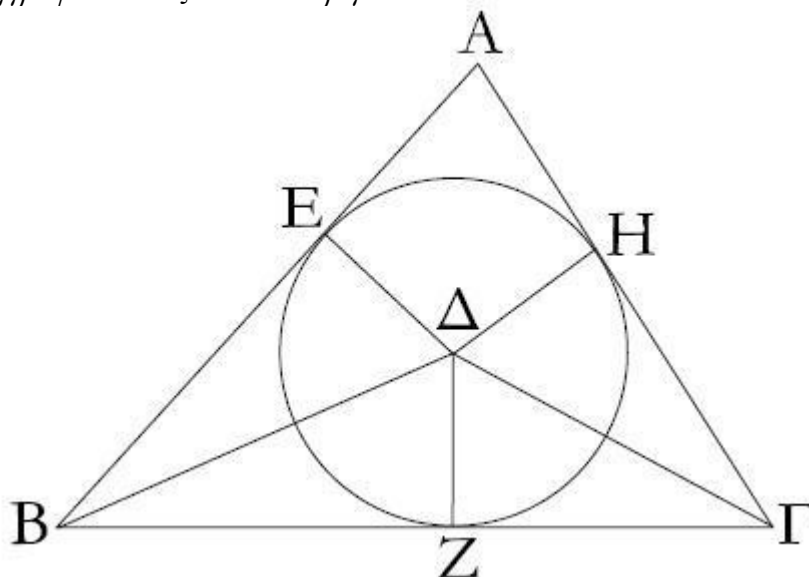
Προεκτείνεται η  $EZ$  κατά ίσα τμήματα ως τα σημεία  $H, \Theta$ , θεωρείται το κέντρο  $K$  του κύκλου  $AB\Gamma$  και άγεται, τυχαία, η ευθεία  $KB$ . Δημιουργείται στην ευθεία  $KB$  και στο σημείο αυτής  $K$  η γωνία  $BKA$  ίση με την  $\Delta EH$  και η  $BK\Gamma$  ίση με την  $\Delta Z\Theta$ . Και από τα σημεία  $A, B, \Gamma$  άγονται οι εφαπτόμενες του  $AB\Gamma$  κύκλου  $\Lambda M, MBN, N\Gamma A$ .

Και επειδή οι  $\Lambda M, MN, N\Lambda$  εφάπτονται του κύκλου  $AB\Gamma$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$ , και από το κέντρο  $K$  προς τα σημεία  $A, B, \Gamma$  γράφονται οι  $KA, KB, K\Gamma$ , οι γωνίες στα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι ορθές. Και επειδή οι τέσσερις γωνίες του  $AMBK$  είναι ίσες με τέσσερις ορθές και επειδή το  $AMBK$  διαιρείται σε δύο τρίγωνα και οι γωνίες  $KAM, KBM$  είναι ορθές γωνίες, άρα οι λοιπές γωνίες  $AKB, AMB$  είναι ίσες με δυο ορθές. Και οι  $\Delta EH, \Delta EZ$  είναι ίσες με δύο ορθές. Άρα οι  $AKB, AMB$  είναι ίσες με τις  $\Delta EH, \Delta EZ$ , όπου η  $AKB$  είναι ίση με τη  $\Delta EH$ . Άρα η λοιπή γωνία  $AMB$  είναι ίση με την λοιπή  $\Delta EZ$ . Ομοίως δείχνεται ότι και η  $\Lambda NB$  είναι ίση με την  $\Delta ZE$ . Άρα και η λοιπή  $\Lambda MN$  είναι ίση με την [λοιπή]  $\Delta Z$ . Άρα το τρίγωνο  $\Lambda MN$  είναι ισογώνιο με το  $\Delta EZ$  τρίγωνο και περιγράφεται στον κύκλο  $AB\Gamma$ .

Άρα περιγράφεται στον δοθέντα κύκλο τρίγωνο ισογώνιο με το δοθέν τρίγωνο.  
Ο.Ε.Π..

#### Πρόταση 4

Να εγγραφεί κύκλος σε δοθέν τρίγωνο.



Έστω δοθέν τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο πρέπει να εγγραφεί κύκλος.

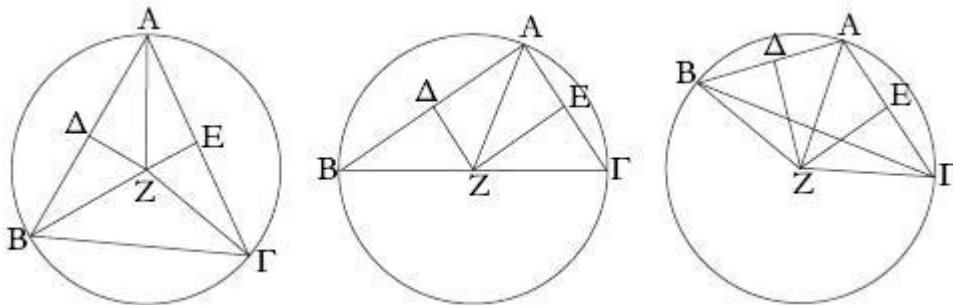
Τις γωνίες  $AB\Gamma, A\Gamma B$  διχοτομούν οι ευθείες  $B\Delta, \Gamma\Delta$  που τέμνονται μεταξύ τους στο σημείο  $\Delta$ . Και από το σημείο  $\Delta$  ως ακθούνη στα  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  οι κάθετες ευθείες  $\Delta E, \Delta Z, \Delta H$ .

Και επειδή είναι ίση η γωνία  $AB\Delta$  με την  $\Gamma B\Delta$ , και η ορθή  $BE\Delta$  είναι ίση με την ορθή  $BZ\Delta$ , σχηματίζονται τα δύο τρίγωνα  $EB\Delta, ZB\Delta$ , που έχουν δυο γωνίες ίσες και μια ίση πλευρά, την υποτεινούσα από μια από τις ίσες γωνίες την κοινή πλευρά  $B\Delta$ . Άρα και οι λοιπές πλευρές είναι ίσες με τις λοιπές πλευρές αντίστοιχα. Άρα η  $\Delta E$  είναι ίση με τη  $\Delta Z$ . Με αυτόν τον τρόπο και η  $\Delta H$  είναι ίση με τη  $\Delta Z$ . Άρα οι τρεις ευθείες  $\Delta E, \Delta Z, \Delta H$  είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα με κέντρο  $\Delta$  και διάστημα έως ένα εκ των σημείων  $E, Z, H$  γράφεται κύκλος, που άγεται και από τα λοιπά σημεία, και

εφάπτεται στις ευθείες  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ , επειδή είναι ορθές οι γωνίες στα σημεία  $E$ ,  $Z$ ,  $H$ . Διότι αν (ο κύκλος) τέμνει αυτές, μια ευθεία που άγεται στη διάμετρο του κύκλου από τις ορθές στα άκρα, εμπίπτει στον κύκλο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν γράφεται κύκλος με κέντρο το  $\Delta$  και διάστημα έως ένα εκ των  $E$ ,  $Z$ ,  $H$  που να τέμνει τις ευθείες  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ . Άρα εφάπτεται σε αυτές, και ο κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Ας έχει εγγραφεί όπως ο κύκλος  $EZH$ . Άρα στο δοθέν τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγράφεται ο κύκλος  $EZH$ . Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 5

Σε δοθέν τρίγωνο να περιγραφεί κύκλος.



Έστω το δοθέν τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο πρέπει να περιγραφεί κύκλος.

Οι ευθείες  $AB$ ,  $A\Gamma$  διχοτομούνται στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  αντίστοιχα και από τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  σε ορθή γωνία προς τις ευθείες  $AB$ ,  $A\Gamma$  άγονται οι ευθείες  $\Delta Z$ ,  $EZ$ , που ενώνονται μέσα στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ή πάνω στην ευθεία  $B\Gamma$  ή έξω από την  $B\Gamma$ .

Εάν συμπίπτουν μέσα στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο σημείο  $Z$ , ενώνονται οι  $ZB$ ,  $Z\Gamma$ ,  $ZA$ .

Και επειδή η  $A\Delta$  είναι ίση με τη  $\Delta B$  και η κάθετη  $\Delta Z$  είναι κοινή, η βάση  $AZ$  είναι ίση με τη βάση  $ZB$ . Ομοίως δείχνεται ότι η  $\Gamma Z$  είναι ίση με την  $AZ$  ώστε και η  $ZB$  να είναι ίση με την  $Z\Gamma$ . Άρα οι τρεις  $ZA$ ,  $ZB$ ,  $Z\Gamma$  είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα γράφεται κύκλος κέντρου  $Z$  διαστήματος κάποιου από τα  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  που άγεται και από τα λοιπά σημεία και είναι περιγεγραμμένος στο  $AB\Gamma$  τρίγωνο. Έτσι περιγράφεται ο  $AB\Gamma$ .

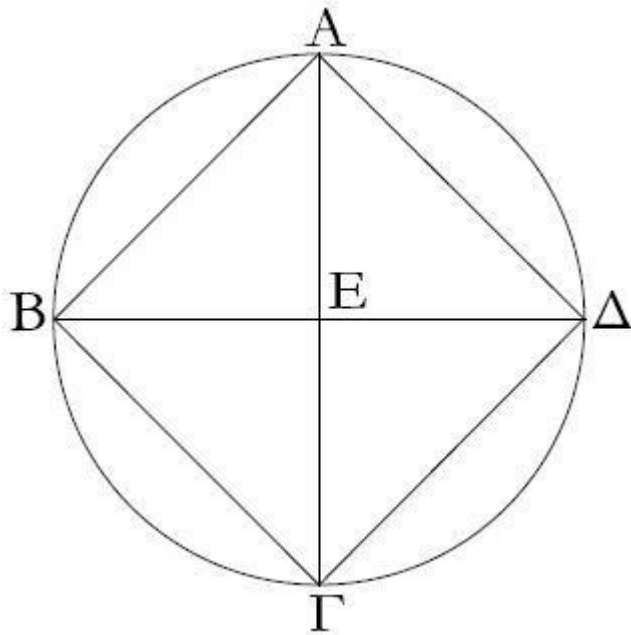
Αν οι  $\Delta Z$ ,  $EZ$  συμπίπτουν πάνω στην ευθεία  $B\Gamma$  στο  $Z$ , ενώνεται η  $AZ$ . Ομοίως δείχνεται ότι το σημείο  $Z$  είναι κέντρο του περιγραφόμενου κύκλου στο  $AB\Gamma$  τρίγωνο.

Αν οι  $\Delta Z$ ,  $EZ$  συμπίπτουν εκτός του  $AB\Gamma$  τριγώνου πάλι στο  $Z$ , ενώνονται οι ευθείες  $AZ$ ,  $BZ$ ,  $\Gamma Z$ . Και επειδή πάλι η  $A\Delta$  είναι ίση με τη  $\Delta B$  και η κάθετη  $\Delta Z$  κοινή. Άρα η βάση  $AZ$  είναι ίση με τη βάση  $BZ$ . Ομοίως δείχνεται ότι η  $\Gamma Z$  είναι ίση με την  $AZ$  και η  $BZ$  ίση με τη  $Z\Gamma$ . Άρα (πάλι) γράφεται κύκλος κέντρου  $Z$  διαστήματος ενός εκ των  $ZA$ ,  $ZB$ ,  $Z\Gamma$  που άγεται και από τα λοιπά σημεία και είναι περιγεγραμμένος στο  $AB\Gamma$  τρίγωνο.

Άρα στο δοθέν τρίγωνο περιγράφεται κύκλος. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 6

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί τετράγωνο.



Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔ, στον οποίο πρέπει να εγγραφεί τετράγωνο.

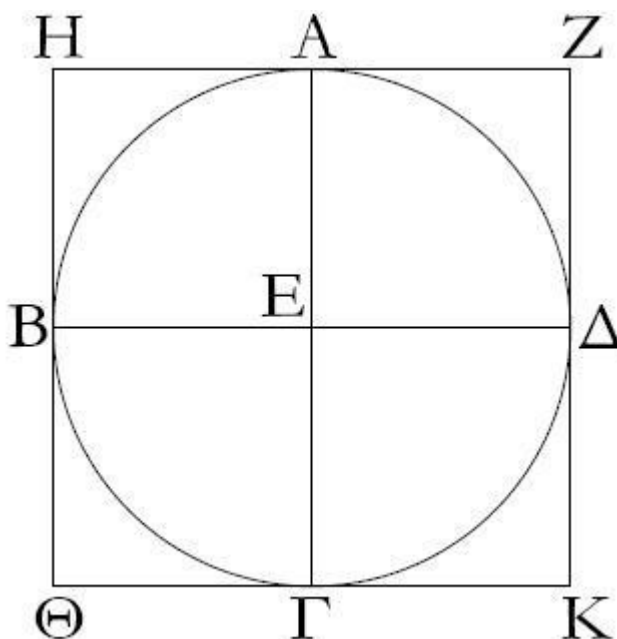
Άγονται δύο διάμετροι ΑΓ, ΒΔ του κύκλου ΑΒΓΔ σε ορθή γωνία μεταξύ και ενώνονται οι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Επειδή η ΒΕ είναι ίση με τη ΕΔ, γιατί το Ε είναι το κέντρο, και η κοινή ΕΑ βαίνει σε ορθή γωνία, η βάση ΑΒ είναι ίση με τη βάση ΑΔ. Με αυτόν τον τρόπο κάθε μια των ΒΓ, ΓΔ είναι ίση με κάθε μια των ΑΒ, ΑΔ. Άρα το ΑΒΓΔ είναι ισόπλευρο τετράπλευρο. Λέγω ότι είναι και ορθογώνιο. Γιατί η ευθεία ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου ΑΒΓΔ, άρα το ΒΑΔ είναι ημικύκλιο. Άρα η ΒΑΔ γωνία είναι ορθή. Με αυτόν τον τρόπο κάθε μια από τις ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ είναι ορθή. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Έχει δειχθεί ότι είναι και ισόπλευρο. Άρα είναι τετράγωνο και εγγράφεται στον ΑΒΓΔ κύκλο.

Άρα στο δοθέντα κύκλο εγγράφεται το ΑΒΓΔ. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 7

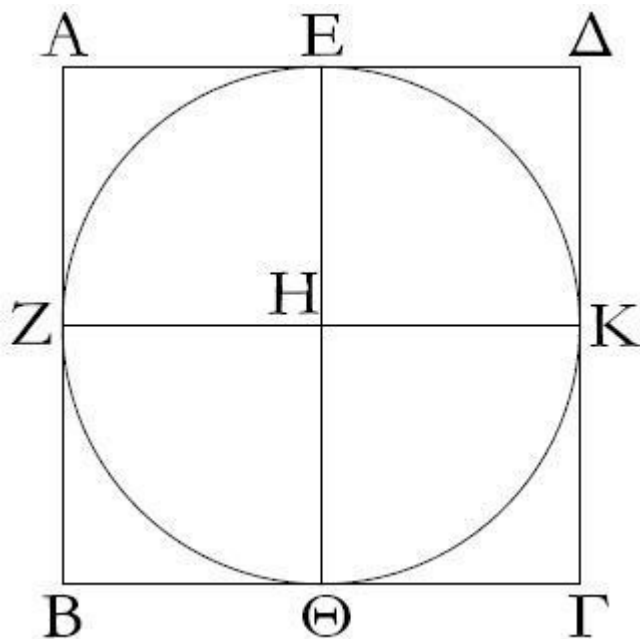
Σε δοθέντα κύκλο να περιγραφεί τετράγωνο.



Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔ στον οποίο πρέπει να περιγραφεί τετράγωνο.  
 Ας αχθούν δύο διάμετροι ΑΓ, ΒΔ του κύκλου ΑΒΓΔ, κάθετες μεταξύ τους, και από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ας αχθούν εφαπτόμενες του κύκλου ΑΒΓΔ οι ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ. Από το κέντρο Ε έως το σημείο επαφής Α ενώνεται η ΕΑ. Επειδή η ΖΗ εφάπτεται του ΑΒΓΔ κύκλου, οι γωνίες στο Α είναι ορθές. Με αυτό τον τρόπο και οι γωνίες στα σημεία Β, Γ, Δ είναι ορθές. Και επειδή η ΑΕΒ γωνία είναι ορθή, είναι και ΕΒΗ ορθή, άρα η ΗΘ είναι παράλληλη της ΑΓ. Με αυτό τον τρόπο και η ΗΘ είναι παράλληλη της ΖΚ. Ομοίως δείχνεται ότι και κάθε μια από τις ΗΖ, ΘΚ είναι παράλληλη με την ΒΕΔ. Άρα τα τετράπλευρα με διαγώνιες ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ είναι παραλληλόγραμμα. Άρα η ΗΖ είναι ίση με την ΘΚ και η ΗΘ με την ΖΚ. Και επειδή η ΑΓ είναι ίση με την ΒΔ, αλλά και η ΑΓ είναι ίση με κάθε μια από τις ΗΘ, ΖΚ και η ΒΔ είναι ίση με κάθε μια από τις ΗΖ, ΘΚ [άρα και κάθε μια από τις ΗΘ, ΖΚ ίση με κάθε μια από τις ΗΖ, ΘΚ]. Άρα το ΖΗΘΚ τετράπλευρο είναι ισόπλευρο. Λέγω ότι είναι και ορθογώνιο. Επειδή το ΗΒΕΑ είναι παραλληλόγραμμο και η ΑΕΒ είναι ορθή, άρα και η ΑΗΒ είναι ορθή. Ομοίως δείχνεται ότι και στα Θ, Κ, Ζ οι γωνίες είναι ορθές. Άρα το ΖΗΘΚ είναι ορθογώνιο. Δείχθηκε και ισόπλευρο, άρα είναι τετράγωνο και περιγράφεται στον ΑΒΓΔ κύκλο.  
 Άρα στον δοθέντα κύκλο περιγράφεται τετράγωνο. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 8

Σε δοθέν τετράγωνο να εγγραφεί κύκλος.

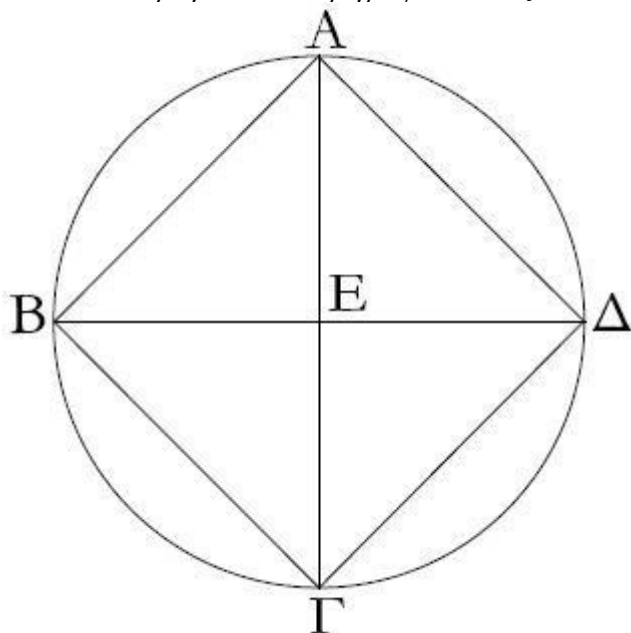


Έστω το δοθέν τετράγωνο ΑΒΓΔ, στο οποίο πρέπει να εγγραφεί κύκλος.  
 Κάθε μια από τις ΑΔ, ΑΒ διχοτομείται στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα και από το Ε άγεται ΕΘ παράλληλη στις ΑΒ, ΓΔ ενώ από το Ζ άγεται η ΖΚ παράλληλη στις ΑΔ, ΒΓ. Άρα καθένα από τα τετράπλευρα με διαγώνιες ΑΕ, ΕΔ, ΑΖ, ΖΒ, ΔΚ, ΚΓ, ΒΘ, ΘΓ είναι παραλληλόγραμμο και οι απέναντι τους πλευρές είναι ίσες. Επειδή η ΑΔ είναι ίση με την ΑΒ, η ΑΕ μισή της ΑΔ και η ΑΖ μισή της ΑΒ, άρα η ΑΕ είναι ίση με την ΑΖ, ομοίως και οι απέναντι. Άρα η ΖΗ είναι ίση με την ΗΕ. Ομοίως δείχνεται ότι κάθε μια των ΗΘ, ΗΚ είναι ίση με κάθε μια των ΖΗ, ΗΕ. Άρα οι τέσσερις ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ (είναι) ίσες μεταξύ τους. Άρα γράφεται κύκλος κέντρου Η διαστήματος

κάποιου από τα  $E, Z, \Theta, K$  που άγεται και από τα λοιπά σημεία και εφάπτεται στις ευθείες  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta A$ , επειδή οι γωνίες  $E, Z, \Theta, K$  είναι ορθές. Γιατί αν ο κύκλος τέμνει τις  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta A$ , μια ευθεία που άγεται στην διάμετρο του κύκλου από τις ορθές στα άκρα εμπίπτει στον κύκλο. Το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν γράφεται κύκλος κέντρου  $H$  διαστήματος κάποιου από τα  $E, Z, \Theta, K$  που τέμνει τις  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta A$  ευθείες. Άρα εφάπτεται σε αυτές και είναι εγγεγραμμένος στο  $AB\Gamma\Delta$  τετράγωνο. Άρα στον δοθέν τετράγωνο εγγράφεται κύκλος. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 9

*Σε δοθέν τετράγωνο να περιγραφεί κύκλος.*



Έστω το δοθέν τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  στο οποίο πρέπει να περιγραφεί κύκλος. Οι  $AG, BD$  ενώνονται ώστε να τέμνονται μεταξύ τους στο σημείο  $E$ . Επειδή η  $\Delta A$  είναι ίση με την  $AB$ , η  $AG$  κοινή, οι δύο  $\Delta A, AG$  είναι ίσες με τις  $BA, AG$  αντίστοιχα και η βάση  $\Delta\Gamma$  είναι ίση με τη βάση  $B\Gamma$ . Άρα η γωνία  $\Delta AG$  είναι ίση με την γωνία  $BAG$ . Άρα η  $\Delta AB$  γωνιά διχοτομείται από την  $AG$ . Ομοίως δείχνεται ότι κάθε μια από τις γωνίες  $AB\Gamma, B\Gamma\Delta, \Gamma\Delta A$  διχοτομείται από τις ευθείες  $AG, \Delta B$ . Και επειδή η γωνία  $\Delta AB$  είναι ίση με την  $AB\Gamma$ , η  $EAB$  είναι μισή της  $\Delta AB$  και η  $EBA$  μισή της  $AB\Gamma$ , άρα και η  $EAB$  είναι ίση με την  $EBA$ . Έτσι και η πλευρά  $EA$  να είναι ίση με την  $EB$ . Ομοίως δείχνεται ότι και κάθε μια εκ των (ευθειών)  $EA, EB$  είναι ίση με κάθε μια των  $EG, ED$ . Άρα οι τέσσερις  $EA, EB, EG, ED$  είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα γράφεται κύκλος κέντρου  $E$  διαστήματος έως ένα εκ των  $A, B, \Gamma, \Delta$ , που άγεται και από τα λοιπά σημεία και είναι περιγεγραμμένος στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Έτσι περιγράφεται ο  $AB\Gamma\Delta$ .

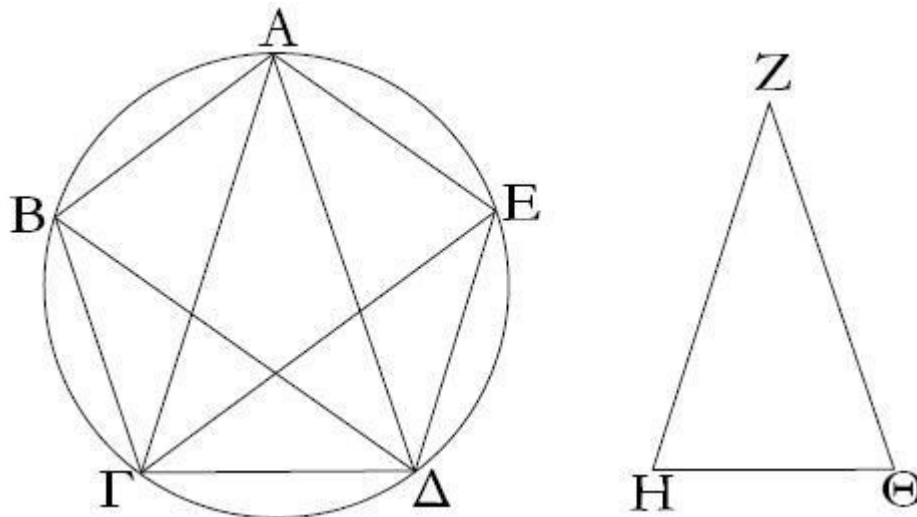
Άρα στο δοθέν τετράγωνο περιγράφεται κύκλος. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 10

*Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο που έχει κάθε μια από τις γωνίες του προς την βάση διπλάσια της λοιπής.*







Έστω ο δοθείς κύκλος ο ΑΒΓΔΕ στον οποίο πρέπει να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο.

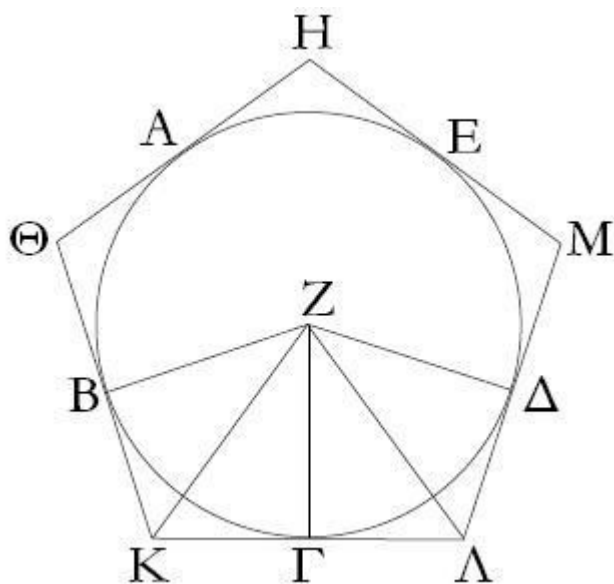
Παίρνεται ισοσκελές τρίγωνο το ΖΗΘ που έχει κάθε μία από τις γωνίες Η, Θ διπλάσια της Ζ και εγγράφεται στον κύκλο ΑΒΓΔΕ ισογώνιο τρίγωνο του ΖΗΘ, το ΑΓΔ, ώστε η γωνιά Ζ να είναι ίση με την ΓΑΔ και κάθε μία από τις γωνίες Η, Θ ίση με καθεμία από τις ΑΓΔ, ΓΔΑ. Άρα και κάθε μία από τις ΑΓΔ, ΓΔΑ είναι διπλάσια της ΓΑΔ. Διχοτομείται κάθε μια από τις γωνίες ΑΓΔ, ΓΔΑ με κάθε μία από τις ευθείες ΓΕ, ΔΒ και ενώνονται οι ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Επειδή κάθε μια από τις γωνίες ΑΓΔ, ΓΔΑ είναι διπλάσια της ΓΑΔ και διχοτομούνται από τις ευθείες ΓΕ, ΔΒ, άρα οι πέντε γωνίες ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ είναι ίσες μεταξύ τους. Οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσες περιφέρειες, άρα αυτές οι πέντε περιφέρειες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ είναι ίσες μεταξύ τους. Από τις ίσες περιφέρειες οι υποτεινουσες είναι ίσες άρα και οι πέντε ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισόπλευρο. Λέγω ότι είναι και ισογώνιο. Επειδή η ΑΒ περιφέρεια είναι ίση με την ΔΕ περιφέρεια, προστίθεται κοινή η ΒΓΔ και άρα όλη η περιφέρεια ΑΒΓΔ είναι ίση με όλη την περιφέρεια ΕΔΓΒ. Η γωνία ΑΕΔ βαίνει πάνω στην ΑΒΓΔ περιφέρεια, η ΒΑΕ πάνω στην ΕΔΓΒ, άρα και η γωνία ΒΑΕ είναι ίση με την ΑΕΔ. Με αυτόν τον τρόπο κάθε μια από τις γωνίες ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ είναι ίση με κάθε μία από τις ΒΑΕ, ΑΕΔ. Άρα το ΑΒΓΔΕ πεντάγωνο είναι ισογώνιο. Δείχθηκε ότι είναι και ισόπλευρο.

Άρα στον δοθέντα κύκλο εγγράφεται πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 12

*Σε δοθέντα κύκλο να περιγραφεί πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.*



Έστω ο δοθείς κύκλος  $AB\Gamma\Delta E$  στον οποίο πρέπει να περιγραφεί πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Ας παρθούν στα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta, E$ , οι γωνίες του εγγεγραμμένου πενταγώνου, ώστε οι  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  περιφέρειες να είναι ίσες και από τα  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  ας αχθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου οι  $H\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda M, MH$ . Λαμβάνεται κέντρο  $Z$  του  $AB\Gamma\Delta E$  κύκλου και ενώνονται οι  $ZB, ZK, Z\Lambda, Z\Delta$ .

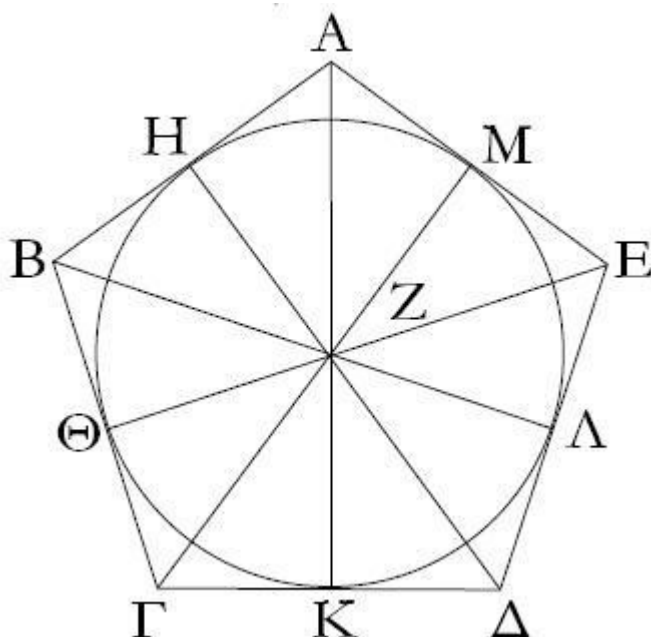
Από το κέντρο  $Z$  πάνω στο σημείο επαφής  $\Gamma$  ενώνεται η  $Z\Gamma$ . Και επειδή η ευθεία  $K\Lambda$  εφάπτεται του  $AB\Gamma\Delta E$  κύκλου στο σημείο  $\Gamma$ , άρα η  $Z\Gamma$  είναι κάθετη στην  $K\Lambda$ . Άρα κάθε μια γωνία στο  $\Gamma$  είναι ορθή. Με αυτόν τον τρόπο και οι γωνίες στα σημεία  $B, \Delta$  είναι ορθές. Επειδή η γωνία  $ZK\Gamma$  είναι ορθή, άρα το τετράγωνο της  $ZK$  είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις  $Z\Gamma, \Gamma K$ . Με αυτόν τον τρόπο το τετράγωνο της  $ZK$  είναι ίσο με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τις  $ZB, BK$ . Όστε τα περιεχόμενα ορθογώνια από τις  $Z\Gamma, \Gamma K$  και από τις  $ZB, BK$  αντίστοιχα είναι ίσα, άρα το τετράγωνο της  $Z\Gamma$  είναι ίσο με το τετράγωνο της  $ZB$ . Άρα λοιπόν και το τετράγωνο της  $\Gamma K$  είναι ίσο με το τετράγωνο της  $BK$ . Άρα και η  $BK$  είναι ίση με την  $\Gamma K$ .

Επειδή η  $ZB$  είναι ίση με την  $Z\Gamma$  και η  $ZK$  κοινή, οι δυο  $BZ, ZK$  είναι ίσες με τις δυο  $\Gamma Z, ZK$  αντίστοιχα. Η βάση  $BK$  (είναι) ίση με την  $\Gamma K$ , άρα η  $BZK$  (γωνία) είναι ίση με την  $KZ\Gamma$  και η  $BKZ$  με την  $ZK\Gamma$ . Άρα η  $BZ\Gamma$  είναι διπλάσια από την  $KZ\Gamma$  και η  $BK\Gamma$  από την  $ZK\Gamma$ . Με αυτόν τον τρόπο και η  $\Gamma Z\Delta$  είναι διπλάσια από την  $\Gamma Z\Lambda$  και η  $\Delta\Lambda\Gamma$  από την  $Z\Lambda\Gamma$ . Επειδή και η  $B\Gamma$  περιφέρεια είναι ίση με την  $\Gamma\Delta$ , ίση είναι και η γωνία  $BZ\Gamma$  με την  $\Gamma Z\Delta$ . Η  $BZ\Gamma$  είναι διπλάσια της  $KZ\Gamma$  και η  $\Delta Z\Gamma$  της  $\Lambda Z\Gamma$ . Άρα και η  $KZ\Gamma$  είναι ίση με την  $\Lambda Z\Gamma$  και η  $Z\Gamma K$  γωνία ίση με την  $Z\Gamma\Lambda$ . Τα δύο τρίγωνα  $ZK\Gamma, Z\Lambda\Gamma$  είναι ίσα αφού έχουν τις δύο τους γωνίες ίσες με τις δύο γωνίες (αντίστοιχα) και μια πλευρά ίση με μια πλευρά, την κοινή  $Z\Gamma$ , άρα οι λοιπές πλευρές ίσες με τις λοιπές πλευρές αντίστοιχα και η λοιπή γωνία ίση με την λοιπή γωνία. Άρα ίση (είναι) η ευθεία  $K\Gamma$  με την  $\Gamma\Lambda$  και η γωνία  $ZK\Gamma$  της  $Z\Lambda\Gamma$ . Επειδή και η  $K\Gamma$  είναι ίση με την  $\Gamma\Lambda$ , άρα η  $K\Lambda$  διπλάσια (είναι) από την  $K\Gamma$ . Με αυτόν τρόπο δείχνεται και η  $\Theta K$  διπλάσια από τη  $BK$  και η  $BK$  είναι ίση με την  $K\Gamma$ , άρα και η  $\Theta K$  είναι ίση με την  $K\Lambda$ . Ομοίως δείχνεται ότι κάθε μια από τις  $\Theta H, HM, M\Lambda$  είναι ίση με κάθε μία από τις  $\Theta K, K\Lambda$ . Άρα το  $H\Theta K\Lambda M$  είναι ισόπλευρο πεντάγωνο. Λέγω ότι είναι και ισογώνιο. Επειδή η γωνία  $ZK\Gamma$  είναι ίση με την  $Z\Lambda\Gamma$  και δείχθηκε η  $\Theta K\Lambda$  διπλάσια από την  $ZK\Gamma$ , η  $K\Lambda M$  διπλάσια από την  $Z\Lambda\Gamma$  άρα και η  $\Theta K\Lambda$  είναι ίση με την  $K\Lambda M$ . Ομοίως δείχνεται ότι κάθε μια από τις  $K\Theta H, \Theta H M, H M\Lambda$  ίση με κάθε μια από τις

ΘΚΛ, ΚΛΜ. Άρα οι πέντε γωνίες ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΛΜΗ, ΜΗΘ είναι μεταξύ τους ίσες. Άρα το ΗΘΚΛΜ είναι ισογώνιο πεντάγωνο. Δείχθηκε και ισόπλευρο και περιγράφεται στον ΑΒΓΔΕ κύκλο.  
 [Άρα στον δοθέντα κύκλο περιγράφεται πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.] Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 13

Σε δοθέν πεντάγωνο, το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο, να εγγραφεί κύκλος.



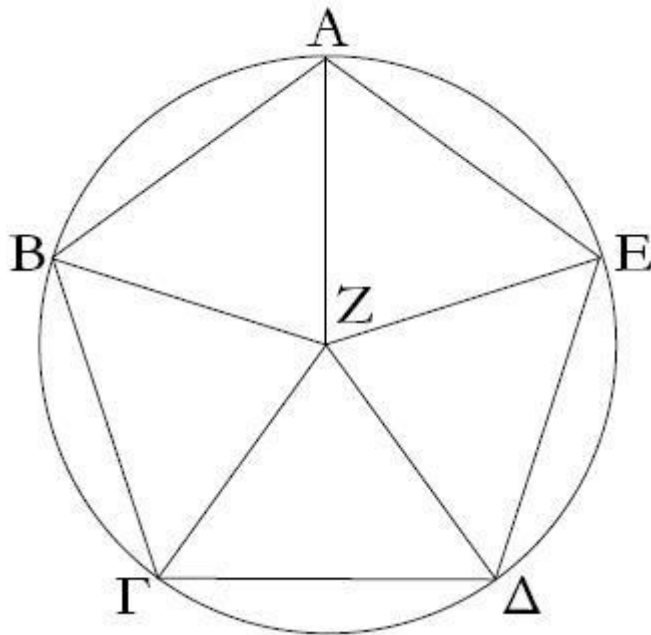
Έστω το δοθέν πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ ισόπλευρο και ισογώνιο, στο οποίο πρέπει να εγγραφεί κύκλος. Διχοτομείται κάθε μία από τις γωνίες ΒΓΔ, ΓΔΕ από κάθε μια από τις ευθείες ΓΖ, ΔΖ και από το σημείο Ζ που οι ευθείες ΓΖ, ΔΖ τέμνονται μεταξύ τους ενώνονται οι ευθείες ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Και επειδή η ΒΓ είναι ίση με την ΓΔ και η ΓΖ κοινή, οι δυο ΒΓ, ΓΖ είναι ίσες με τις δυο ΔΓ, ΓΖ και η γωνία ΒΓΖ ίση με τη γωνία ΔΓΖ. Άρα η βάση ΒΖ είναι ίση με τη βάση ΔΖ και το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΓΖ και οι λοιπές γωνίες είναι ίσες με τις λοιπές γωνίες αντίστοιχα, αφού οι υποτείνουσες πλευρές είναι ίσες. Άρα η γωνία ΓΒΖ ίση με την ΓΔΖ και επειδή η ΓΔΕ είναι η διπλάσια της ΓΔΖ και η ΓΔΕ ίση με την ΑΒΓ και η ΓΔΖ ίση με την ΓΒΖ άρα η ΓΒΑ είναι διπλασία από την ΓΒΖ. Άρα η γωνία ΑΒΖ είναι ίση με τη ΖΒΓ. Η γωνία ΑΒΓ διχοτομείται από την ευθεία ΒΖ. Ομοίως δείχνεται ότι και κάθε μια των ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομείται από κάθε μια των ευθειών ΖΑ, ΖΕ. Άγονται από το σημείο Ζ πάνω στις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ οι κάθετες ευθείες ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ.

Και επειδή η γωνία ΘΓΖ είναι ίση με τη γωνία ΚΓΖ και η ορθή ΖΘΓ είναι ίση με την (ορθή) ΖΚΓ, τα δύο τρίγωνα ΖΘΓ, ΖΚΓ είναι ίσα, έχοντας δυο γωνίες ίσες και μια ίση πλευρά, την υποτείνουσα από μία από τις ίσες γωνίες την κοινή πλευρά ΖΓ. Άρα και οι λοιπές πλευρές ίσες με τις λοιπές πλευρές αντίστοιχα. Άρα η κάθετη ΖΘ ίση με την κάθετη ΖΚ. Ομοίως δείχνεται ότι κάθε μια των ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ είναι ίση με κάθε μια των ΖΘ, ΖΚ. Άρα οι πέντε ευθείες ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα γράφεται κύκλος κέντρου Ζ και διαστήματος έως ένα εκ των Η, Θ, Κ, Λ, Μ που άγεται και από τα λοιπά σημεία και εφάπτεται στις ευθείες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ. Οι γωνίες στα σημεία Η, Θ, Κ, Λ, Μ είναι ορθές, γιατί αν δεν εφάπτεται σε αυτές, αλλά

τις τέμνει, προκύπτει ότι η αγόμενη στη διάμετρο του κύκλου προς τις ορθές στα άκρα εμπίπτει στον κύκλο που δείχθηκε άτοπο. Άρα δεν γράφεται κύκλος κέντρου  $Z$  με διάστημα κάποιο από τα  $H, \Theta, K, \Lambda, M$  που να τέμνει τις ευθείες  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ . Άρα εφάπτεται σε αυτές. Έτσι γράφεται ο  $H\Theta K\Lambda M$ . Άρα στο δοθέν πεντάγωνο το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο εγγράφεται κύκλος. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 14

Σε δοθέν πεντάγωνο, το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο να περιγραφεί κύκλος.



Έστω το δοθέν πεντάγωνο  $AB\Gamma\Delta E$ , το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο, στο οποίο πρέπει να περιγραφεί κύκλος.

Διχοτομείται κάθε μια από τις  $B\Gamma\Delta, \Gamma\Delta E$  γωνίες από κάθε από τις ευθείες  $Z\Gamma, Z\Delta$  που διέρχονται από το σημείο  $Z$ . Από τα σημεία  $B, A, E$  άγονται οι ευθείες  $ZB, ZA, ZE$ .

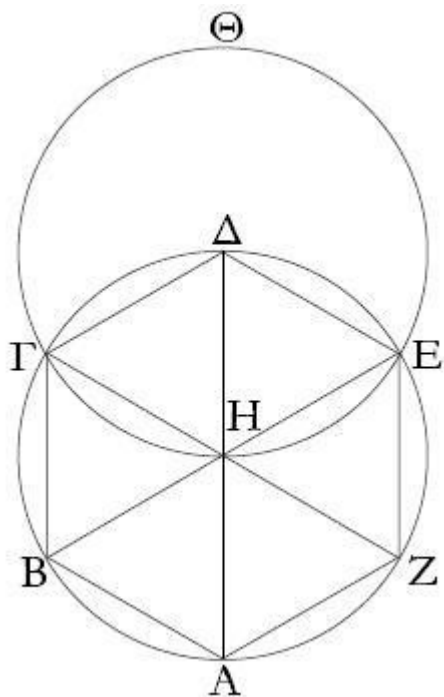
Ομοίως δείχθηκε στην προηγούμενη πρόταση ότι κάθε μια από τις  $\Gamma B A, B A E, A E \Delta$  γωνίες διχοτομείται από κάθε μια από τις ευθείες  $ZB, ZA, ZE$ . Και επειδή η  $B\Gamma\Delta$  γωνία είναι ίση με τη  $\Gamma\Delta E$  και η  $Z\Gamma\Delta$  είναι η μισή της  $B\Gamma\Delta$ , η  $\Gamma\Delta Z$  είναι μισή της  $\Gamma\Delta E$  άρα και η  $Z\Gamma\Delta$  ίση με τη  $Z\Delta\Gamma$ , ώστε και η πλευρά  $Z\Gamma$  να είναι με τη  $Z\Delta$ . Ομοίως δείχεται ότι και κάθε μια από τις  $ZB, ZA, ZE$  είναι ίση με κάθε μια από τις  $Z\Gamma, Z\Delta$ .

Άρα οι πέντε ευθείες  $ZA, ZB, Z\Gamma, Z\Delta, ZE$  είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα γράφεται κύκλος κέντρου  $Z$  και διαστήματος έως ένα εκ των  $ZA, ZB, Z\Gamma, Z\Delta, ZE$  και άγεται από τα λοιπά σημεία και είναι περιγεγραμμένος. Έτσι περιγράφεται ο  $AB\Gamma\Delta E$ .

Άρα στο δοθέν πεντάγωνο το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο περιγράφεται κύκλος. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 15

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.



Έστω ο δοθείς κύκλος  $AB\Gamma\Delta EZ$  στον οποίο πρέπει να εγγραφεί εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Ας αχθεί η διάμετρος  $AD$  του κύκλου  $AB\Gamma\Delta EZ$  κέντρου  $H$ . Γράφεται κύκλος  $E\text{H}\Gamma\Theta$  κέντρου  $\Delta$  και διαστήματος  $\Delta H$  και ενώνονται οι  $EH, \Gamma H$  που έχουν αχθεί πάνω στα σημεία  $B, Z$  και ενώνονται οι  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EZ, ZA$ . Λέγω ότι το ισόπλευρο εξάγωνο  $AB\Delta EZ$  είναι και ισογώνιο.

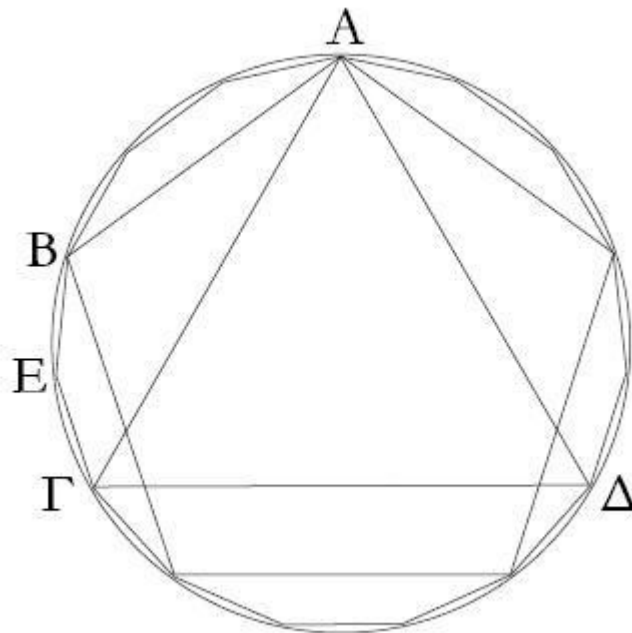
Επειδή το  $H$  σημείο είναι το κέντρο του  $AB\Gamma\Delta EZ$  κύκλου, η  $HE$  είναι ίση με την  $H\Delta$ . Επειδή πάλι το σημείο  $\Delta$  είναι το κέντρο του  $H\Gamma\Theta$  κύκλου, η  $\Delta E$  είναι ίση με την  $\Delta H$ . Αλλά δείχθηκε η  $HE$  ίση με την  $H\Delta$ , άρα και η  $HE$  είναι ίση με την  $E\Delta$ . Άρα το  $E\text{H}\Delta$  είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Άρα και οι τρεις του γωνίες οι  $E\text{H}\Delta, H\Delta E, \Delta E\text{H}$  είναι μεταξύ τους ίσες. Επειδή στα ισοσκελή τρίγωνα οι προς τη βάση γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες και οι τρεις γωνίες του τριγώνου είναι ίσες με δύο ορθές, άρα η  $E\text{H}\Delta$  είναι το ένα τρίτο των δύο ορθών. Ομοίως δείχνεται ότι η  $\Delta H\Gamma$  είναι το ένα τρίτο δύο ορθών. Επειδή η ευθεία  $\Gamma H$  βρίσκεται πάνω στην  $EB$ , οι εφεξής γωνίες  $E\text{H}\Gamma, \Gamma H B$  είναι ίσες με δύο ορθές, άρα και η λοιπή  $\Gamma H B$  είναι το ένα τρίτο δύο ορθών. Άρα οι γωνίες  $E\text{H}\Delta, \Delta H\Gamma, \Gamma H B$  είναι μεταξύ τους ίσες ώστε και οι κατακορυφήν  $B\text{H}\Delta, \Delta H Z, Z\text{H} E$  να είναι ίσες [με τις  $E\text{H}\Delta, \Delta H\Gamma, \Gamma H B$ ]. Οι έξι γωνίες  $E\text{H}\Delta, \Delta H\Gamma, \Gamma H B, B\text{H}\Delta, \Delta H Z, Z\text{H} E$  είναι μεταξύ τους ίσες. Οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσες περιφέρειες. Άρα οι έξι περιφέρειες  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EZ, ZA$  είναι μεταξύ τους ίσες. Στις ίσες περιφέρειες πρόσκεινται ίσες ευθείες. Άρα οι έξι ευθείες είναι μεταξύ τους ίσες. Άρα το  $AB\Gamma\Delta EZ$  εξάγωνο είναι ισόπλευρο. Λέγω ότι είναι και ισογώνιο. Επειδή η περιφέρεια  $ZA$  είναι ίση με την περιφέρεια  $E\Delta$ , προστίθεται η κοινή  $AB\Gamma\Delta$  περιφέρεια άρα όλη η  $ZAB\Gamma\Delta$  είναι ίση με την  $E\Delta\Gamma B A$ . Η  $Z E \Delta$  γωνία βαίνει στην περιφέρεια  $ZAB\Gamma\Delta$  και η γωνία  $A E Z$  στην περιφέρεια  $E\Delta\Gamma B A$ , άρα η  $A Z E$  γωνία είναι ίση με τη  $\Delta E Z$ . Ομοίως δείχνεται ότι και οι λοιπές γωνίες του εξαγώνου  $AB\Gamma\Delta EZ$  είναι ίσες με κάθε μία από τις γωνίες  $A Z E, Z E \Delta$ . Άρα το  $AB\Gamma\Delta EZ$  εξάγωνο είναι ισογώνιο. Δείχθηκε και ισόπλευρο και εγγράφεται στον  $AB\Gamma\Delta EZ$  κύκλο. Άρα στον δοθέντα κύκλο εγγράφεται εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο. Ο.Ε.Π..

### Πόρισμα

Από αυτό είναι φανερό ότι η πλευρά του εξαγώνου είναι ίση με την πλευρά από το κέντρο του κύκλου (μέχρι την περιφέρεια του). Ομοίως στο πεντάγωνο εάν αχθούν εφαπτόμενες του κύκλου, από τις διαιρέσεις του εξαγώνου στην περιφέρεια του κύκλου, περιγράφεται στον κύκλο εξαγώνο ισόπλευρο και ισογώνιο ακολούθως του πενταγώνου. Και ομοίως όπως στο πεντάγωνο εγγράφεται και περιγράφεται κύκλος στο δοθέν εξαγώνο. Ο.Ε.Π..

### Πρόταση 16

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.



Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔ, στον οποίο πρέπει να εγγραφεί δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Εγγράφεται στον κύκλο ΑΒΓΔ πλευρά ΑΓ ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτόν, και πλευρά ΑΒ ισοπλεύρου πενταγώνου. Άρα ο ΑΒΓΔ είναι κύκλος δεκαπέντε ίσων τμημάτων τέτοιων ώστε η περιφέρεια ΑΒΓ, που είναι το ένα τρίτο του κύκλου, είναι ίση με τα πέντε τμήματα, και η περιφέρεια ΑΒ που είναι το ένα πέμπτο του κύκλου είναι ίση με τρία τμήματα. Άρα η λοιπή ΒΓ είναι ίση με τα δύο τμήματα. Η ΒΓ διχοτομείται στο Ε άρα οι περιφέρειες ΒΕ, ΕΓ είναι το ένα δεκατο πέμπτο του κύκλου ΑΒΓΔ.

Άρα εάν οι ΒΕ, ΕΓ ενωθούν με ίσες συνεχείς ευθείες και συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο στον ΑΒΓΔΕ κύκλο, θα εγγεγραφθεί δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο Ο.Ε.Π..

Ομοίως για το πεντάγωνο αν αχθούν εφαπτομένες στον κύκλο κατά τις διαιρέσεις του κύκλου, περιγράφεται γύρω από τον κύκλο δεκαπεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο. Όπως λοιπόν με το πεντάγωνο δείχθηκε και στο δοθέν δεκαπεντάγωνο ότι εγγράφεται και περιγράφεται κύκλος. Ο.Ε.Π..