ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΙΒΛΙΟ Ε΄

Επιμέλεια μετάφρασης:

- Βρυωνάκη Αγγελική ΑΜ 824 Τ.Ε.Μ.
- Γιαννακάκη Αριστέα ΑΜ 756 Τ.Ε.Μ.
- Κουτσάκη Παουλίνα ΑΜ 3729 Μαθ.
- Σεβαστάκη Ελευθερία ΑΜ 734 Τ.Ε.Μ.
- Σεβαστάκη Φωτεινή ΑΜ 3708 Μαθ.
- Σηφάκης Κωνσταντίνος ΑΜ 3436 Μαθ.

Ορισμοί

1. Ένα μέγεθος είναι μέρος ενός μεγέθους, το μικρότερο του μεγαλύτερου, αν μετρά το μεγαλύτερο.

2. Το μεγαλύτερο μέγεθος είναι πολλαπλάσιο του μικρότερου αν μετράται από το μικρότερο.

3. Ένας λόγος είναι ενός είδους σχέση μεταξύ δυο ομογενών μεγεθών που αφορά το πηλίκο τους.

4. Μεγέθη λέγεται ότι έχουν λόγο το ένα προς το άλλο, εάν είναι δυνατό όταν πολλαπλασιαστούν να υπερβούν το ένα το άλλο.

5. Μεγέθη λέγεται ότι είναι στον ίδιο λόγο το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν οποιαδήποτε ισοπολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου αν ληφθούν είναι αντίστοιχα ίσα, μεγαλύτερα ή μικρότερα από οποιαδήποτε ισοπολλαπλάσια και αν ληφθούν του δεύτερου και του τέταρτου κατά την κατάλληλη σειρά πολλαπλασιασμού.

6. Και τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο ας καλούνται ανάλογα.

7. Και όταν για ίσα πολλαπλάσια, το πολλαπλάσιο του πρώτου υπερέχει του πολλαπλάσιου του δεύτερου και το πολλαπλάσιο του τρίτου δεν υπερέχει του πολλαπλάσιου του τέταρτου, τότε λέγεται ότι το πρώτο προς το δεύτερο έχει μεγαλύτερο λόγο από αυτόν που έχει το τρίτο προς το τέταρτο.

8. Και αναλογία μεταξύ τριών όρων είναι η ελάχιστη (δυνατή).

9. Και όταν τρία μεγέθη είναι ανάλογα, λέγεται ότι το πρώτο έχει προς το τρίτο λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου που έχει προς το δεύτερο.

10. Και όταν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα διαδοχικά λέγεται ότι το πρώτο έχει προς το τέταρτο λόγο ίσο με τον κύβο του λόγου που έχει ως προς το δεύτερο. Και ομοίως, σε διαδοχική σειρά, οποιοδήποτε και αν είναι η αναλογία .

11. Ομόλογα λέγονται τα εξής αντίστοιχα μεγέθη: τα ηγούμενα με τα ηγούμενα και τα επόμενα με τα επόμενα.

12. Εναλλάξ λόγος είναι η λήψη σε μία αναλογία του λόγου του ηγούμενου προς το ηγούμενο ίσο με τον λόγο του επόμενου προς το επόμενο.

13. Αντίστροφος λόγος είναι η λήψη του λόγου του επόμενου ως το ηγούμενο και του ηγούμενου ως το επόμενο.

14. Σύνθεση λόγου είναι η λήψη του λόγου του αθροίσματος του ηγούμενου και του επόμενου προς το επόμενο.

15. Διαίρεση λόγου είναι η λήψη του λόγου της διαφοράς του ηγούμενου και του επόμενου προς το επόμενο.

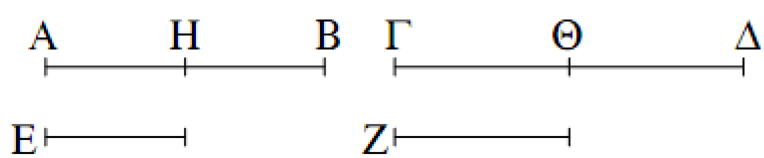
16. Αναστροφή λόγου είναι η λήψη του λόγου του ηγούμενου προς τη διαφορά του με το επόμενο.

17. Λόγος εξ' ισότητας δοθέντων μεγεθών και άλλων τόσων μεγεθών που έχουν τον ίδιο λόγο λαμβανομένων ανά δύο προκύπτει, όταν όπως το πρώτο μέγεθος είναι προς το τελευταίο μέγεθος του πρώτου συνόλου μεγεθών όπως το πρώτο είναι προς τον τελευταίο του δεύτερου συνόλου μεγεθών. Ή αλλιώς, είναι η λήψη του λόγου των άκρων μεγεθών παραλείποντας τα μέσα.

18. Διαταραγμένη αναλογία δοθέντων τριών μεγεθών και άλλων τόσων προκύπτει, όταν όπως είναι το ηγούμενο προς το επόμενο στο πρώτο σύνολο μεγεθών, είναι και το ηγούμενο προς το επόμενο στο δεύτερο σύνολο μεγεθών, και όπως είναι το επόμενο προς κάποιο άλλο στο πρώτο σύνολο μεγεθών, είναι και κάποιο άλλο προς το ηγούμενο στο δεύτερο σύνολο μεγεθών.

Πρόταση 1

Εάν οποσαδήποτε μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια άλλων μεγεθών ίσου πλήθους, τότε όσες φορές διαιρεί το κάθε μέγεθος το πολλαπλάσιο του τόσες φορές διαιρεί το ολικό μέγεθος το ολικό πολλαπλάσιο.



Έστω τα οποσαδήποτε μεγέθη ΑΒ,ΓΔ τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια των μεγεθών Ε, Ζ, αντίστοιχα. Λέγω ότι όσες φορές είναι πολλαπλάσιο το ΑΒ του Ε τόσες φορές είναι πολλαπλάσια τα ΑΒ, ΓΔ των Ε, Ζ, αντίστοιχα.

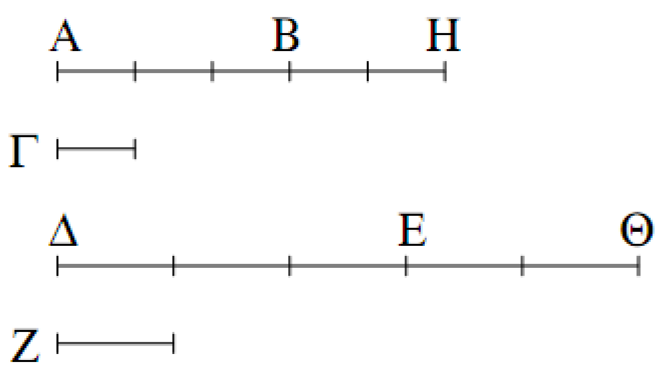
Τα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα πολλαπλάσια των Ε, Ζ, αντίστοιχα. Άρα, όσα μεγέθη ίσα με το Ε έχει το ΑΒ τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ έχει το ΓΔ. Διαιρώντας το ΑΒ σε μεγέθη ίσα με το Ε, τα ΑΗ, ΗΒ και διαιρώντας το ΓΔ σε μεγέθη ίσα με το Ζ, τα ΓΘ, ΘΔ, τότε το πλήθος των ΑΗ, ΗΒ είναι ίσο με το πλήθος των ΓΘ, ΘΔ. Το ΑΗ είναι ίσο με το Ε και το ΓΘ είναι ίσο με το Ζ, άρα είναι ίσο το ΑΗ με το Ε και τα ΑΗ, ΓΘ είναι ίσα με τα Ε, Ζ. Για τον ίδιο λόγο το ΗΒ είναι ίσο με το Ε και τα ΗΒ, ΘΔ είναι ίσα με τα Ε, Ζ. Άρα όσα μεγέθη είναι ίσα το Ε στο ΑΒ τόσα μεγέθη είναι ίσα με τα Ε, Ζ στα ΑΒ, ΓΔ. Άρα όσες φορές το ΑΒ είναι πολλαπλάσιο του Ε τόσες φορές τα ΑΒ, ΓΔ είναι πολλαπλάσια των Ε, Ζ.

Άρα, εάν οποσαδήποτε μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια κάποιων άλλων μεγεθών, τότε όσες φορές διαιρεί το κάθε μέγεθος το πολλαπλάσιο του, τόσες φορές διαιρεί το ολικό μέγεθος το ολικό πολλαπλάσιο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 2

Εάν ένα πρώτο και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου και ενός τετάρτου μεγέθους, αντίστοιχα και ένα πέμπτο και ένα έκτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου μεγέθους, αντίστοιχα, τότε συντεθειμένα το πρώτο με το πέμπτο μέγεθος καθώς και το τρίτο με το έκτο μέγεθος, θα είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου μεγέθους, αντίστοιχα.

Διότι, έστω ότι το πρώτο μέγεθος ΑΒ και το τρίτο μέγεθος ΔΕ είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ και του τετάρτου Ζ. Έστω και ότι ένα πέμπτο μέγεθος ΒΗ και ένα έκτο μέγεθος ΕΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ και του τετάρτου Ζ. Λέγω ότι συντεθειμένα το πρώτο με το πέμπτο, δηλαδή το ΑΗ, και το τρίτο με το έκτο, δηλαδή το ΔΘ, είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου Γ και του τετάρτου Ζ.



Το ΑΒ και το ΔΕ είναι ίσα πολλαπλάσια του Γ και του Ζ, αντίστοιχα. Άρα, όσα μεγέθη ίσα με το Γ έχει το ΑΒ τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ έχει το ΔΕ. Για τον ίδιο λόγο όσα μεγέθη ίσα με το Γ έχει το ΒΗ τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ έχει και το ΕΘ. Άρα, όσα μεγέθη ίσα με το Γ έχει ολόκληρο το ΑΗ τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ έχει ολόκληρο το

ΔΘ. Άρα, συντεθειμένα το πρώτο και το πέμπτο, το ΑΗ είναι πολλαπλάσιο του δευτέρου Γ όσες φορές συντεθειμένα το τρίτο και το έκτο, το ΔΘ είναι πολλαπλάσιο του τετάρτου Ζ.

Άρα, εάν ένα πρώτο και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου και ενός τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα, και ένα πέμπτο και ένα έκτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα, τότε συντεθειμένα το πρώτο και το πέμπτο μέγεθος καθώς και το τρίτο με το έκτο μέγεθος, θα είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου μεγέθους, αντίστοιχα. Ο.Ε.Δ.

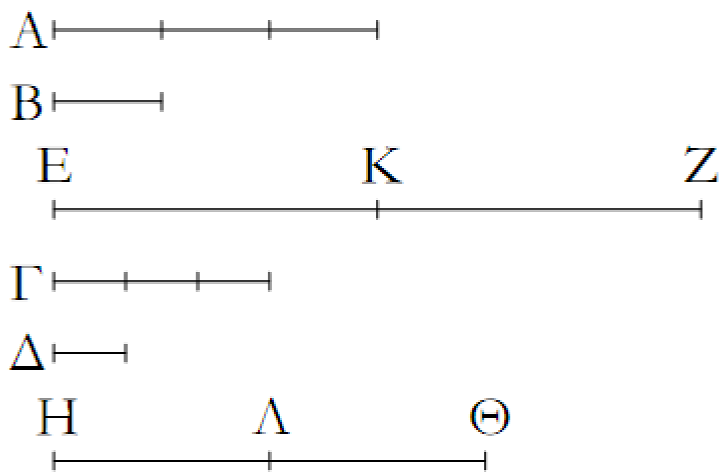
Πρόταση 3

Εάν ένα πρώτο και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου και ενός τετάρτου μεγέθους αντίστοιχα, και εάν ληφθούν ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου μεγέθους τότε, εξ' ισότητας τα ληφθέντα μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου αντίστοιχα.

Διότι, έστω ότι το πρώτο μέγεθος Α και το τρίτο μέγεθος Γ είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου Β και του τετάρτου Δ. Ας έχουν ληφθεί ίσα πολλαπλάσια των Α και Γ που είναι τα ΕΖ και ΗΘ. Λέγω ότι το ΕΖ και το ΗΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του Β και του Δ, αντίστοιχα.

Το ΕΖ και το ΗΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του Α και του Γ, αντίστοιχα. Άρα, όσα πολλαπλάσια του Α έχει το ΕΖ τόσα πολλαπλάσια του Ζ έχει το ΗΘ. Ας έχει διαιρεθεί το ΕΖ σε μεγέθη ΕΚ και το ΚΖ ίσα με το Α και το ΗΘ σε μεγέθη ΗΛ και το ΛΘ ίσα με το Γ. Τότε το πλήθος των ΕΚ, ΚΖ είναι ίσο με το πλήθος των ΗΛ, ΛΘ. Το Α και το Γ είναι ίσα πολλαπλάσια του Β και του Δ, αντίστοιχα. Το ΕΚ είναι ίσο με το Α και το ΗΛ είναι ίσο με το Γ. Άρα το ΕΚ και το ΗΛ είναι ίσα πολλαπλάσια του Β και του Δ, αντίστοιχα. Για τον ίδιο λόγο, το ΚΖ και το ΛΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του Β και του Δ, αντίστοιχα. Το πρώτο ΕΚ και το τρίτο ΗΛ είναι ίσα πολλαπλάσια του δεύτερου Β και τέταρτου Δ. Επίσης, το πέμπτο ΚΖ και το έκτο ΛΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του δεύτερου Β και τέταρτου Δ.

Άρα, το συντεθέν από το πρώτο και πέμπτο, το ΕΖ, και το συντεθέν από το τρίτο και το έκτο, το ΗΘ, είναι ίσα πολλαπλάσια του δεύτερου Β και του τέταρτου Δ, αντίστοιχα.

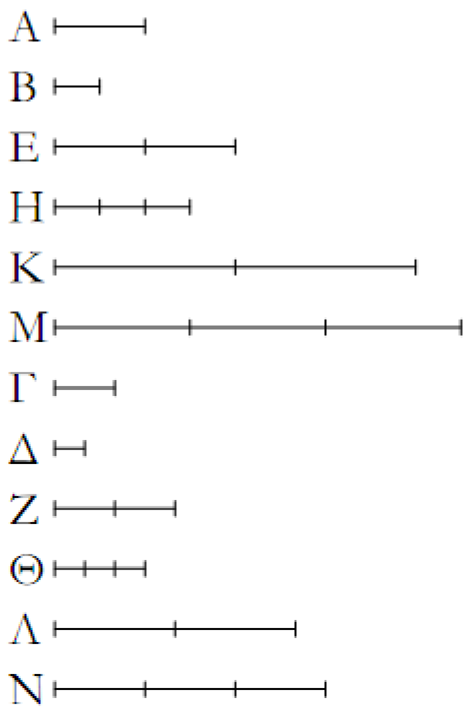


Άρα, εάν ένα πρώτο και ένα τρίτο μέγεθος είναι ίσα πολλαπλάσια ενός δευτέρου και ενός τετάρτου μεγέθους, αντίστοιχα και εάν ληφθούν ίσα πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου μεγέθους τότε, εξ' ισότητας, τα ληφθέντα μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια του δευτέρου και του τετάρτου, αντίστοιχα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 4

Εάν ο λόγος ενός πρώτου μεγέθους προς ένα δεύτερο είναι ίσος με το λόγο ενός τρίτου μεγέθους προς ένα τέταρτο, τότε ο λόγος των ίσων πολλαπλάσιων του πρώτου και του τρίτου μεγέθους θα είναι ίσος με τον λόγο των ίσων πολλαπλάσιων του δεύτερου και του τέταρτου μεγέθους, κατά οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό που έχει τον ίδιο λόγο όταν αυτός παρθεί κατάλληλα.

Το πρώτο μέγεθος Α προς το δεύτερο Β έχει τον ίδιο λόγο με το τρίτο μέγεθος Γ προς το τέταρτο Δ. Ας έχουν ληφθεί ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ τα Ε, Ζ αντίστοιχα και ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ τα Η, Θ αντίστοιχα. Λέγω ότι το Ε προς το Η είναι όπως το Ζ προς το Θ.



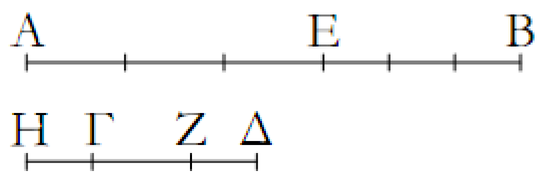
Ας έχουν ληφθεί ίσα πολλαπλάσια των Ε, Ζ τα Κ, Λ αντίστοιχα και ίσα πολλαπλάσια των Η, Θ τα Μ, Ν αντίστοιχα.

Το Ε είναι πολλαπλάσιο του Α και το Ζ είναι πολλαπλάσιο του Γ. Άρα το Κ είναι πολλαπλάσιο του Α και το Λ είναι πολλαπλάσιο του Γ. Για τον ίδιο λόγο, το Μ είναι πολλαπλάσιο του Β και το Ν είναι πολλαπλάσιο του Δ. Ο λόγος του Α προς το Β είναι ίσος με το λόγο του Γ προς το Δ και έχουν ληφθεί ίσα πολλαπλάσια των Α, Γ τα Κ, Λ αντίστοιχα και ίσα πολλαπλάσια των Β, Δ τα Μ, Ν αντίστοιχα. Άρα, αν είναι μεγαλύτερο το Κ του Μ τότε θα είναι μεγαλύτερο και το Λ του Ν, αν είναι ίσο το Κ του Μ τότε θα είναι ίσο και το Λ του Ν, και αν είναι μικρότερο το Κ του Μ τότε θα είναι μικρότερο και το Λ του Ν. Τα Κ, Λ είναι ίσα πολλαπλάσια των Ε, Ζ και τα Μ, Ν είναι ίσα πολλαπλάσια των Η, Θ. Άρα όσο είναι το Ε προς το Η τόσο είναι και το Ζ προς το Θ.

Άρα, εάν ο λόγος ενός πρώτου μεγέθους προς ένα δεύτερο είναι ίσος με το λόγο ενός τρίτου μεγέθους προς ένα τέταρτο, τότε ο λόγος των ίσων πολλαπλάσιων του πρώτου και του τρίτου μεγέθους θα είναι ίσος με τον λόγο των ίσων πολλαπλάσιων του δεύτερου και του τετάρτου μεγέθους, κατά οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό που έχει τον ίδιο λόγο όταν αυτός παρθεί κατάλληλα. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 5

Εάν ένα μέγεθος είναι πολλαπλάσιο ενός μεγέθους και ένα τμήμα του πρώτου μεγέθους είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ενός τμήματος του δεύτερου μεγέθους τότε το τμήμα που υπολείπεται από το πρώτο μέγεθος είναι ίσο πολλαπλάσιο με το τμήμα που υπολείπεται από το δεύτερο μέγεθος όσο είναι το όλο με το όλο.



Διότι, έστω, το μέγεθος ΑΒ να είναι πολλαπλάσιο του μεγέθους ΓΔ και ένα τμήμα του πρώτου μεγέθους, το ΑΕ να είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ενός μεγέθους ΓΖ αντίστοιχα. Λέγω ότι το λοιπό ΕΒ θα είναι το ίδιο πολλαπλάσιο με το λοιπό ΖΔ έτσι ώστε όλο το ΑΒ να είναι πολλαπλάσιο όλου του ΓΔ αντίστοιχα.

Διότι όσες φορές είναι το ΑΕ διαιρετό από το ΓΖ τόσες φορές ας είναι και το ΕΒ κατασκευασμένο ως διαιρετό από το ΓΗ.

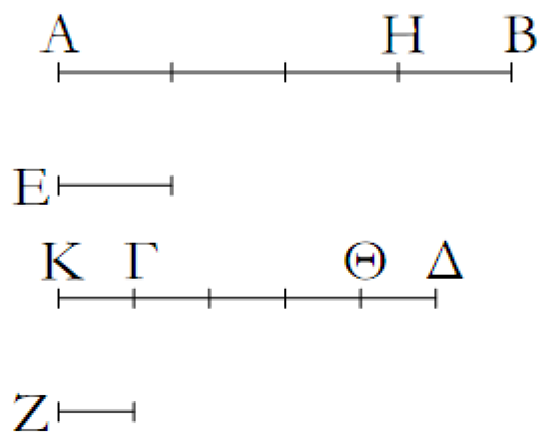
Και καθώς ΑΕ και ΕΒ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ και ΗΓ αντίστοιχα, άρα τα ΑΕ και ΑΒ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ και ΗΖ αντίστοιχα. Και τα ΑΕ και ΑΒ υποτιθενται ίσα πολλαπλάσια του ΓΖ και του ΓΔ αντίστοιχα. Άρα, το ΑΒ είναι ένα ίσο πολλαπλάσιο καθενός από τα ΗΖ και ΓΔ. Άρα, το ΗΖ είναι ίσο με το ΓΔ. Ας έχει αφαιρεθεί το ΓΖ και από τα δύο. Άρα το υπόλοιπο ΗΓ θα είναι ίσο με το υπόλοιπο ΖΔ και επομένως το ΑΕ και το ΕΒ είναι ίσα πολλαπλάσια του ΓΖ και του ΗΓ αντίστοιχα και το ΗΓ είναι ίσο με το ΔΖ, τα ΑΕ και ΕΒ είναι επομένως ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ και ΖΔ αντίστοιχα. Και τα ΑΕ και ΑΒ υποτίθενται ίσα πολλαπλάσια καθενός από τα ΓΖ και ΓΔ αντίστοιχα. Άρα το λοιπό ΕΒ θα είναι επίσης ίσο πολλαπλάσιο του λοιπού ε ΖΔ έτσι ώστε όλο το ΑΒ είναι πολλαπλάσιο όλου του ΓΔ.

Άρα, εάν ένα μέγεθος είναι πολλαπλάσιο ενός μεγέθους και ένα τμήμα του πρώτου μεγέθους είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ενός τμήματος του δεύτερου μεγέθους τότε το τμήμα που υπολείπεται από το πρώτο μέγεθος είναι το ίδιο πολλαπλάσιο με το τμήμα που υπολείπεται από το δεύτερο μέγεθος όσο είναι το όλο με το όλο.. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 6

Εάν δύο μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια δύο άλλων μεγεθών και κάποια αφαιρεθέντα από τα αρχικά μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια των τελευταίων, τότε τα λοιπά μεγέθη είναι επίσης είτε ίσα με τα τελευταία είτε είναι ίσα πολλαπλάσιά τους.

Διότι έστω ότι δύο μεγέθη ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα πολλαπλάσια από δύο μεγεθών Ε και Ζ αντίστοιχα. Και έστω τα αφαιρεθέντα από το αρχικό, τα ΑΗ και ΓΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των Ε και Ζ αντίστοιχα. Λέγω ότι τα λοιπά ΗΒ και ΘΔ είναι επίσης είτε ίσα με το Ε και το Ζ αντίστοιχα είτε είναι πολλαπλάσια τους.



Διότι έστω ότι αρχικά το ΗΒ είναι ίσο με το Ε. Λέγω ότι το ΘΔ είναι επίσης ίσο με το Ζ.

Διότι έστω ότι το ΓΚ να είναι κατασκευασμένο ίσο με το Ζ. Καθώς τα ΑΗ και ΓΘ είναι ίσα πολλαπλάσια του Ε και του Ζ αντίστοιχα και το ΗΒ είναι ίσο με το Ε, είναι και το ΚΓ ίσο με το Ζ. Και τα ΑΒ και ΓΔ υποτίθενται ίσα πολλαπλάσια των Ε και Ζ αντίστοιχα. Άρα τα ΚΘ και ΓΔ είναι ίσα πολλαπλάσια από το Ζ και το Ζ αντίστοιχα. Άρα, ΚΘ και ΓΔ είναι το καθένα ίσο πολλαπλάσιο του Ζ.

Άρα το ΚΘ είναι ίσο με το ΓΔ. Έστω ότι το ΓΘ έχει αφαιρεθεί και από τα δύο. Άρα, το λοιπό ΚΓ είναι ίσο με το λοιπό ΘΔ. Αλλά, το Ζ είναι ίσο με το ΚΓ. Άρα το ΘΔ είναι επίσης ίσο με το Ζ. Άρα, εάν το ΗΒ είναι ίσο με το Ε τότε το ΘΔ θα είναι επίσης ίσο με το Ζ.

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι ακόμα και αν το ΗΒ είναι ένα πολλαπλάσιο του Ε τότε το ΘΔ θα είναι επίσης το ίδιο πολλαπλάσιο με το Ζ.

Άρα, εάν δύο μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια δύο άλλων μεγεθών και κάποια αφαιρεθέντα από τα αρχικά μεγέθη είναι ίσα πολλαπλάσια των τελευταίων, τότε τα λοιπά μεγέθη είναι επίσης είτε ίσα με τα τελευταία είτε είναι ίσα πολλαπλάσια τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 7

Ίσα μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο προς το ίδιο μέγεθος και το μέγεθος αυτό έχει τον ίδιο λόγο με τα ίσα μεγέθη.

Έστω ότι τα Α και Β είναι ίσα μεγέθη και Γ είναι κάποιο άλλο τυχαίο μέγεθος. Λέγω ότι καθένα από τα Α και Β έχει τον ίδιο λόγο προς το Γ και το Γ να έχει τον ίδιο λόγο προς καθένα από τα Α και Β.

Διότι έστω ότι τα ίσα πολλαπλάσια των Δ και Ε έχουν κατασκευαστεί από το Α και Β αντίστοιχα, και το άλλο τυχαίο πολλαπλάσιο Ζ από το Γ.

Άρα, καθώς τα Δ και Ε είναι ίσα πολλαπλάσια του Α και του Β αντίστοιχα και το Α είναι ίσο με το Β, άρα το Δ είναι επίσης ίσο με το Ε. Και το Ζ είναι διαφορετικό, τυχαίο μέγεθος. Άρα, εάν το Δ υπερβαίνει το Ζ τότε το Ε επίσης υπερβαίνει το Ζ, και εάν το Δ είναι ίσο με το Ζ τότε το Ε είναι επίσης ίσο με το Ζ, και εάν το Δ είναι μικρότερο από το Ζ τότε το Ε είναι επίσης μικρότερο από το Ζ. Και τα Δ και Ε είναι ίσα πολλαπλάσια των Α και Β αντίστοιχα. Και Ζ ένα άλλο τυχαίο πολλαπλάσιο του Γ. Άρα,όπως το Α είναι προς το Γ έτσι το Β είναι προς το Γ.

Λέγω ότι το Γ έχει επίσης τον ίδιο λόγο προς καθένα από τα Α και Β.

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε με την ίδια κατασκευή, ότι αν το Δ είναι ίσο με το Ε και ότι το Ζ είναι κάποιο άλλο, εάν το Ζ υπερβαίνει το Δ τότε υπερβαίνει επίσης και το Ε, και εάν το Ζ είναι ίσο με το Δ τότε είναι επίσης είναι ίσο με το Ε, και εάν το Ζ είναι μικρότερο από το Δ τότε είναι επίσης μικρότερο από το Ε. Και το Ζ είναι πολλαπλάσιο του Γ, και τα Δ και Ε άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια από το Α και το Β. Επομένως, καθώς το Γ είναι προς το Α έτσι το Γ είναι προς το Β.

Άρα, ίσα μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο προς το ίδιο μέγεθος και το μέγεθος αυτό έχει τον ίδιο λόγο με τα ίσα μεγέθη.

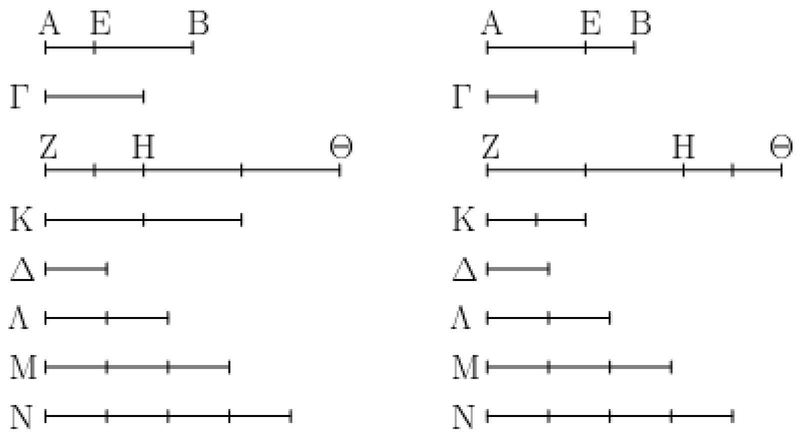
Πόρισμα

Είναι φανερό από αυτό, ότι αν κάποια μεγέθη είναι ανάλογα τότε αυτά θα είναι επίσης αντιστρόφως ανάλογα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 8

Των ανίσων μεγεθών το μεγαλύτερο μέγεθος έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι έχει το μικρότερο προς το ίδιο μέγεθος. Και αυτό το μέγεθος έχει μεγαλύτερο λόγο προς το μικρότερο μέγεθος από ότι προς το μεγαλύτερο.

Έστω ΑΒ και Γ άνισα μεγέθη, και ας είναι το ΑΒ το μεγαλύτερο από τα δύο, και το Δ είναι ένα άλλο τυχαίο μέγεθος. Λέγω ότι το ΑΒ έχει το μεγαλύτερο λόγο προς το Δ από ότι το Γ έχει προς το Δ, και το Δ έχει τον μεγαλύτερο λόγο προς το Γ από ότι έχει προς το ΑΒ.



Επειδή το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το Γ, έστω ότι το ΒΕ είναι κατασκευασμένο ίσο με το Γ. Έτσι, το μικρότερο από τα ΑΕ και ΕΒ, πολλαπλασιασμένο θα είναι κάποιες φορές μεγαλύτερο από το Δ . Έστω πρώτα ότι το ΑΕ είναι μικρότερο από το ΕΒ, και το ΑΕ έχει πολλαπλασιαστεί, και έστω ότι το ΖΗ να είναι ένα πολλαπλάσιό του που είναι μεγαλύτερο από το Δ.

Και όσες φορές το ΖΗ είναι διαιρετό από το ΑΕ, τόσες φορές το ΗΘ έχει γίνει επίσης διαιρετό από το ΕΒ, και το Κ από το Γ. Και έστω το διπλό πολλαπλάσιο του Δ, το Λ, να έχει κατασκευαστεί, και το τριπλό πολλαπλάσιο Μ και αρκετά ακόμα, κάθε ένα που αυξάνεται σε σειρά το ένα μετά το άλλο, μέχρι το πολλαπλάσιο που θα είναι το πρώτο πολλαπλάσιο του Δ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το Κ. Έστω είναι το τετραπλό πολλαπλάσιο του Δ, το Ν, το πρώτο πολλαπλάσιο μεγαλύτερο από το Κ.

Άρα καθώς το Κ είναι μικρότερο από το Ν αρχικά, το Κ δεν είναι μικρότερο από το Μ. Και καθώς τα ΖΗ και ΗΘ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ και ΕΒ αντίστοιχα, τα ΖΗ και ΖΘ είναι συνεπώς ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ και ΑΒ αντίστοιχα.. Και τα ΖΗ και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ και Γ αντίστοιχα. Άρα, τα ΖΘ και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ και Γ αντίστοιχα. Άρα τα ΖΘ και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ και Γ. Πάλι, καθώς τα ΗΘ και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ και Γ, και το ΕΒ είναι ίσο με το Γ, το ΗΘ άρα είναι επίσης ίσο με το Κ. Και το Κ δεν είναι μικρότερο από το Μ. Άρα, το ΗΘ δεν είναι και αυτό μικρότερο από το Μ. Και το ΖΗ είναι μεγαλύτερο από το Δ. Άρα όλο το ΖΘ είναι μεγαλύτερο από το Δ και το Μ όταν προστεθούν μαζί. Αλλά τα Δ και Μ που έχουν προστεθεί μαζί είναι ίσα με το Ν, επειδή το Μ είναι τρεις φορές το Δ, και το Μ και το Δ που έχουν προστεθεί μαζί είναι τέσσερις φορές το Δ, και το Ν είναι επίσης τέσσερις φορές το Δ. Άρα, το Μ και το Δ που έχουν προστεθεί μαζί είναι ίσα με το Ν. Αλλά το ΖΘ είναι μεγαλύτερο από τα Μ και Δ. Άρα, το ΖΘ υπερβαίνει το Ν. Και το Κ δεν υπερβαίνει το Ν. Και τα ΖΘ και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ και Γ, και Ν ένα άλλο τυχαίο πολλαπλάσιο του Δ. Άρα το ΑΒ έχει μεγαλύτερο λόγο προς το Δ από ότι έχει το Γ προς το Δ .

Έτσι, λέγω ότι το Δ έχει μεγαλύτερο λόγο προς το Γ από ότι το Δ προς το ΑΒ.

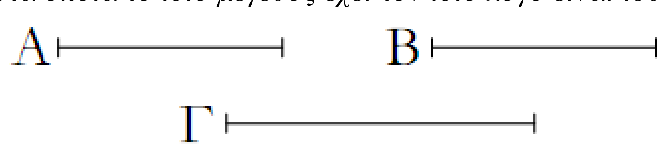
Ομοίως, με την ίδια κατασκευή μπορούμε να δείξουμε ότι το Ν υπερβαίνει το Κ και το Ν δεν υπερβαίνει το ΖΘ. Και το Ν είναι ένα πολλαπλάσιο του Δ και τα ΖΘ, Κ άλλα τυχαίο ίσα πολλαπλάσιο του ΑΒ και Γ αντίστοιχα. Άρα, το Δ έχει μεγαλύτερο λόγο προς το Γ από ότι έχει το Δ προς το ΑΒ.

Και έτσι έστω ότι το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΕΒ. Έτσι το μικρότερο, το ΕΒ, πολλαπλασιασμένο θα είναι κάποιες φορές μεγαλύτερο από το Δ. Έστω ότι (το ΕΒ) έχει πολλαπλασιαστεί, και έστω το ΗΘ είναι ένα πολλαπλάσιο του ΕΒ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το Δ. Και όσες φορές το ΗΘ είναι διαιρετό από το ΕΒ, τόσες φορές θεωρώ το ΖΗ να έχει γίνει επίσης διαιρετό από το ΑΕ, και το Κ από το Γ. Έτσι, ομοίως με τα παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι το ΖΘ και το Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ και Γ αντίστοιχα. Έτσι, ομοίως με τα παραπάνω, έστω ότι το πολλαπλάσιο του Δ, το Ν , το οποίο είναι το πρώτο πολλαπλάσιο μεγαλύτερο από το ΖΗ, που έχουν παρθεί. Έτσι το ΖΗ δεν είναι πάλι μικρότερο από το Μ. Και το ΗΘ είναι μεγαλύτερο από το Δ. Άρα, ολόκληρο το ΖΘ υπερβαίνει του Δ και του Μ, δηλαδή το Ν. Και το Κ δεν υπερβαίνει του Ν, επειδή το ΖΗ, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το ΗΘ, δηλαδή το Κ επίσης δεν υπερβαίνει το Ν. Και, συμφώνα με τα προηγούμενα επιχειρήματα, μπορούμε να συμπληρώσουμε την απόδειξη με τον ίδιο τρόπο. Ο.Ε.Δ.

Άρα των ανίσων μεγεθών το μεγαλύτερο μέγεθος έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι έχει το μικρότερο προς το ίδιο μέγεθος. Και αυτό το μέγεθος έχει μεγαλύτερο λόγο προς το μικρότερο μέγεθος από ότι προς το μεγαλύτερο.

Πρόταση 9

Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο με ένα ίδιο μέγεθος είναι ίσα μεταξύ τους. Και τα μεγέθη προς αυτά στα οποία το ίδιο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο είναι ίσα.



Διότι έστω Α και Β το καθένα που έχει τον ίδιο λόγο με το Γ. Λέγω ότι το Α είναι ίσο με το Β.

Εάν δεν ήταν, τα Α και Β δεν θα είχαν τον ίδιο λόγο με το Γ. Αλλά έχουν. Άρα το Α είναι ίσο με το Β.

Έτσι, ας έχει πάλι το Γ τον ίδιο λόγο με το καθένα από τα Α και Β. Λέγω ότι το Α είναι ίσο με το Β.

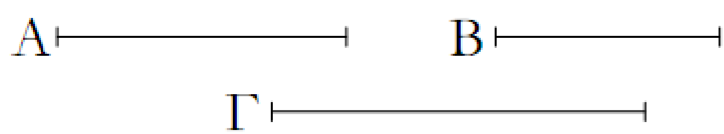
Εάν δεν ήταν, το Γ δε θα είχε τον ίδιο λόγο με καθένα από τα Α και Β. Αλλά έχει. Άρα, το Α είναι ίσο με το Β.

Άρα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο με ένα ίδιο μέγεθος είναι ίσα μεταξύ τους.

Και τα μεγέθη προς αυτά στα οποία το ίδιο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο είναι ίσα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 10

Από τα μεγέθη τα οποία έχουν ένα λόγο προς το ίδιο μέγεθος εκείνο το μέγεθος το οποίο έχει το μεγαλύτερο λόγο είναι το μεγαλύτερο. Και εκείνο το μέγεθος προς το οποίο το τελευταίο μέγεθος έχει το μεγαλύτερο λόγο είναι το μικρότερο.



Διότι, έστω ότι έχει το Α μεγαλύτερο λόγο προς το Γ από ότι το Β προς το Γ. Λέγω ότι το Α είναι μεγαλύτερο από το Β.

Εάν δεν ήταν, το Α είναι μικρότερο ή ίσο από το Β. Το Α δεν είναι ίσο με το Β, διότι τότε τα Α και Β θα είχαν το καθένα τον ίδιο λόγο με το Γ . Αλλά δεν έχουν. Άρα το Α δεν είναι ίσο με το Β. Αλλά, ούτε το Α είναι μικρότερο από το Β διότι τότε το Α θα έχει μικρότερο λόγο προς το Γ από ότι το Β προς το Γ . Αλλά δεν έχει. Άρα το Α δεν είναι μικρότερο από το Β. Και δείχθηκε ότι δεν είναι ούτε ίσα. Άρα το Α είναι μεγαλύτερο από το Β.

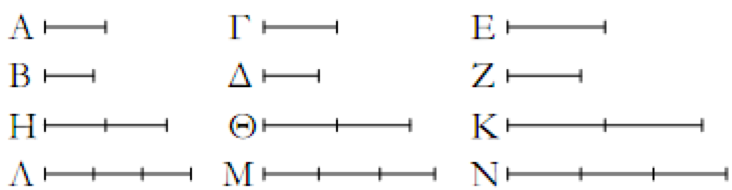
Έτσι πάλι, ας έχει το Γ μεγαλύτερο λόγο προς το Β από ότι το Γ προς το Α. Λέγω ότι το Β είναι μικρότερο από το Α.

Αν δεν ήταν, είναι μεγαλύτερο ή ίσο. Το Β δεν είναι ίσο με το Α διότι τότε το Γ θα έχει τον ίδιο λόγο με καθένα από τα Α και Β. Αλλά δεν έχει. Άρα το Α δεν είναι ίσο με το Β. Το Β δεν είναι μεγαλύτερο από το Α διότι τότε το Γ θα έχει μικρότερο λόγο προς το Β από ότι προς το Α. Αλλά δεν έχει. Άρα το Β δεν είναι μεγαλύτερο από το Α. Και έχει δειχθεί ότι δεν είναι ούτε ίσο. Επομένως το Β είναι μικρότερο από το Α.

Άρα από τα μεγέθη τα οποία έχουν ένα λόγο προς το ίδιο μέγεθος εκείνο το μέγεθος το οποίο έχει το μεγαλύτερο λόγο είναι το μεγαλύτερο. Και εκείνο το μέγεθος προς το οποίο το τελευταίο μέγεθος έχει το μεγαλύτερο λόγο είναι το μικρότερο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 11

Λόγοι οι οποίοι είναι ίσοι με τον ίδιο λόγο είναι επίσης ίσοι μεταξύ τους.



Διότι έστω ότι όπως το Α είναι προς το Β, έτσι το Γ είναι προς το Δ, και όπως το Γ είναι προς το Δ , έτσι το Ε είναι προς το Ζ. Λέγω ότι όπως το Α είναι προς το Β είναι και το Ε είναι προς το Ζ.

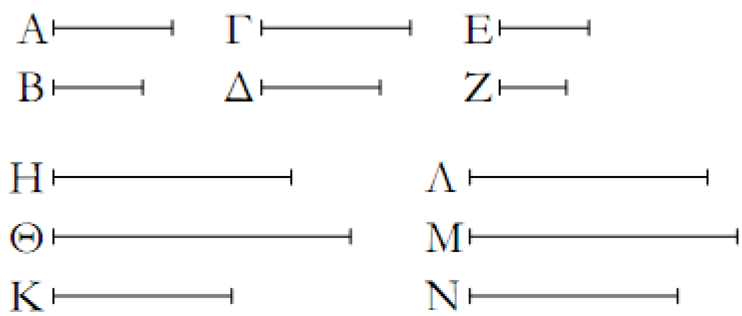
Διότι έστω τα ίσα πολλαπλάσια Η, Θ, Κ που έχουν ληφθεί των Α, Γ, Ε αντίστοιχα και τα άλλα τυχαία πολλαπλάσια Λ, Μ, Ν των Β, Δ, Ζ αντίστοιχα.

Και όπως το Α είναι προς το Β έτσι το Γ είναι προς το Δ. Και τα ίσα πολλαπλάσια Η και Θ έχουν παρθεί από τα Α και Γ αντίστοιχα, και τα άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια Λ και Μ από τα Β και Δ αντίστοιχα. Επομένως αν το Η υπερέχει του Λ τότε το Θ επίσης υπερέχει του Μ και εάν το Η είναι ίσο με το Λ τότε το Θ είναι επίσης ίσο με το Μ και αν το Η είναι μικρότερο από το Λ τότε το Θ είναι επίσης μικρότερο από το Μ . Πάλι, όπως το Γ είναι προς το Δ, έτσι το Ε είναι προς το Ζ και τα ίσα πολλαπλάσια Θ και Κ έχουν ληφθεί από τα Γ και Ε αντίστοιχα, και τα άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια Μ και Ν από τα Δ και Ζ αντίστοιχα. Επομένως αν το Θ υπερέχει του Μ τότε το Κ επίσης υπερέχει του Ν, και αν το Θ είναι ίσο με το Μ τότε το Κ είναι επίσης ίσο με το Ν, και αν το Θ είναι μικρότερο από το Μ τότε το Κ είναι επίσης μικρότερο από το Ν. Αλλά αν το Θ υπερείχε του Μ τότε το Η θα υπερείχε επίσης του Λ, και αν το Θ ήταν ίσο με το Μ τότε το Η θα ήταν επίσης ίσο με το Λ και αν το Θ ήταν μικρότερο από το Μ τότε το Η θα ήταν επίσης μικρότερο από το Λ. Και επομένως, αν το Η υπερέχει του Λ τότε το Κ επίσης υπερέχει του Ν, και αν το Η είναι ίσο με το Λ τότε το Κ είναι επίσης ίσο με το Ν και αν το Η είναι μικρότερο από το Λ τότε το Κ είναι επίσης μικρότερο από το Ν. Και τα Η και Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α και Ε αντίστοιχα, και τα Λ και Ν άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Β και Ζ αντίστοιχα. Επομένως, καθώς το Α είναι προς το Β, το Ε είναι προς το .

Συνεπώς λόγοι οι οποίοι είναι ίσοι με τον ίδιο λόγο είναι επίσης ίσοι μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 12

Εάν υπάρχει οποιοδήποτε πλήθος μεγεθών τα οποία είναι ανάλογα τότε όπως ένα από τα ηγούμενα μεγέθη είναι προς ένα από τα επόμενα, έτσι όλα τα ηγούμενα θα είναι προς όλα τα επόμενα.



Ας είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεγεθών Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ τα οποία είναι ανάλογα, έτσι ώστε όπως το Α είναι προς το Β έτσι το Γ είναι προς το Δ και το Ε προς το Ζ. Λέγω ότι όπως το Α είναι προς το Β έτσι τα Α, Γ, Ε είναι προς τα Β, Γ, Ζ.

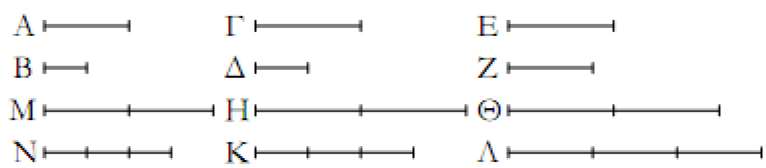
Διότι έστω ότι έχουν παρθεί από τα Α, Γ, Ε τα ίσα πολλαπλάσια Η, Θ, Κ αντίστοιχα, και τα άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια Λ, Μ, Ν από τα Β, Δ, Ζ αντίστοιχα.

Και όπως το Α είναι προς το Β, έτσι το Γ είναι προς το Δ, και το Ε προς το Ζ και τα ίσα πολλαπλάσια Η, Θ, Κ έχουν παρθεί από τα Α, Γ, Ε αντίστοιχα, και τα άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια Λ, Μ, Ν από τα Β, Δ, Ζ αντίστοιχα. Άρα, αν το Η υπερέχει του Λ τότε το Θ επίσης υπερέχει του Μ και το Κ υπερέχει του Ν, και αν το Η είναι ίσο με το Λ τότε το Θ είναι επίσης ίσο με το Μ και τότε το Θ είναι επίσης μικρότερο από το Μ και το Κ από το Ν. Και άρα αν το Η υπερέχει του Λ τότε τα Η, Θ, Κ επίσης υπερέχουν των Λ, Μ, Ν και αν το Η είναι ίσο με το Λ τότε τα Η, Θ, Κ είναι επίσης ίσα με τα Λ, Μ, Ν και αν το Η είναι μικρότερο από το Λ τότε τα Η, Θ, Κ είναι επίσης μικρότερα από τα Λ, Μ, Ν και το Η και τα Η, Θ, Κ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α και Α, Γ, Ε αντίστοιχα. Καθώς αν υπάρχει κάποιος αριθμός οποιονδήποτε μεγεθών τα οποία είναι ίσα πολλαπλάσια, αντίστοιχα, από κάποια άλλα ίσου πλήθους μεγέθη τότε όσες φορές ένα από τα πρώτα μεγέθη είναι διαιρετό από ένα από τα δεύτερα, τόσες φορές είναι όλα τα πρώτα μεγέθη επίσης διαιρετά από όλα τα δεύτερα). Έτσι, για τον ίδιο λόγο, το Λ και τα Λ, Μ, Ν είναι επίσης ίσα πολλαπλάσια των Β και Β, Δ, Ζ αντίστοιχα.

Άρα, εάν υπάρχει οποιοδήποτε πλήθος μεγεθών τα οποία είναι ανάλογα τότε όπως ένα από τα ηγούμενα μεγέθη είναι προς ένα από τα επόμενα, έτσι όλα τα ηγούμενα θα είναι προς όλα τα επόμενα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 13

Αν ένα πρώτο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο με ένα δεύτερο όπως και ένα τρίτο με ένα τέταρτο και το τρίτο έχει μεγαλύτερο λόγο προς το τέταρτο από ότι ένα πέμπτο προς ένα έκτο τότε το πρώτο θα έχει επίσης μεγαλύτερο λόγο προς το δεύτερο από ότι το πέμπτο προς το έκτο.



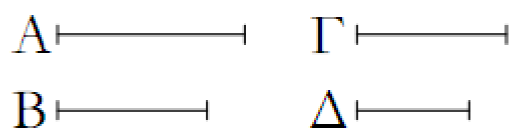
Διότι έστω ότι έχει ένα πρώτο μέγεθος Α τον ίδιο λόγο προς ένα δεύτερο Β με αυτόν που ένα τρίτο Γ έχει προς ένα τέταρτο Δ και ας έχει το τρίτο μέγεθος Γ μεγαλύτερο λόγο προς το τέταρτο Δ από ότι ένα πέμπτο Ε έχει προς ένα έκτο Ζ. Λέγω ότι το πρώτο μέγεθος Α θα έχει επίσης μεγαλύτερο λόγο προς το δεύτερο Β από ότι το πέμπτο Ε έχει προς το έκτο Ζ.

Έστω ότι υπάρχουν κάποια ίσα πολλαπλάσια του Γ και του Ε και άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια του Δ και του Ζ για τα οποία το πολλαπλάσιο του Γ υπερέχει του πολλαπλασίου του Δ και το πολλαπλάσιο του Ε δεν υπερέχει του πολλαπλασίου του Ζ. και έστω ότι αυτά έχουν ληφθεί. Και έστω Η και Θ ίσα πολλαπλάσια των Γ και Ε αντίστοιχα, και Κ και Λ άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Δ και Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε το Η να υπερέχει του Κ, αλλά το Θ να μην υπερέχει του Λ. Και όσες φορές το Η είναι διαιρετό από το Γ, τόσες φορές είναι και το Μ από το Α. Και όσες φορές είναι το Κ διαιρετό από το Δ, τόσες θα είναι και το Ν από το Β. Και όπως το Α είναι προς το Β, έτσι το Γ είναι προς το Δ και τα ίσα πολλαπλάσια Μ και Η έχουν ληφθεί από τα Α και Γ αντίστοιχα, και τα άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια Ν και Κ από τα Β και Δ αντίστοιχα. Άρα αν το Μ υπερέχει του Ν τότε το Η υπερέχει του Κ και αν το Μ είναι ίσο με το Ν τότε το η είναι επίσης ίσο με το Κ και αν το Μ είναι μικρότερο από το Ν τότε το Η είναι επίσης μικρότερο από το Κ. Και το Η υπερέχει του Κ. Επομένως και το Μ υπερέχει του Ν αλλά το Θ δεν υπερέχει του Λ. Τα Μ και Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α και Ε αντίστοιχα, τα Ν και Λ είναι άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των Β και Ζ αντίστοιχα. Άρα το Α έχει μεγαλύτερο λόγο προς το Β από ότι έχει το Ε προς το Ζ .

Άρα αν ένα πρώτο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο με ένα δεύτερο όπως ένα τρίτο έχει με ένα τέταρτο και το τρίτο έχει μεγαλύτερο λόγο προς το τέταρτο από ότι ένα πέμπτο έχει προς ένα έκτο τότε το πρώτο θα έχει επίσης μεγαλύτερο λόγο προς το δεύτερο από ότι το πέμπτο προς το έκτο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 14

Εάν ένα πρώτο μέγεθος έχει προς ένα δεύτερο τον ίδιο λόγο που έχει ένα τρίτο προς ένα τέταρτο και το πρώτο είναι μεγαλύτερο (ίσο, μικρότερο) από το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι μεγαλύτερο (ίσο, μικρότερο αντίστοιχα) από το τέταρτο.



Έστω ότι ένα πρώτο μέγεθος Α έχει προς ένα δεύτερο Β τον ίδιο λόγο που έχει ένα τρίτο Γ προς ένα τέταρτο Δ και το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ. Λέγω ότι και το Β είναι μεγαλύτερο από το Δ.

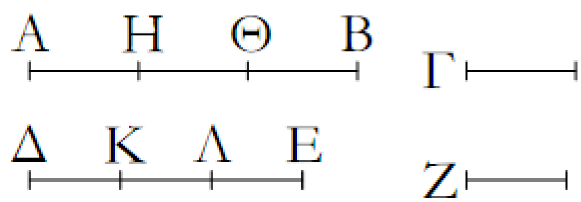
Επειδή το Α είναι μεγαλύτερο από το Γ και το Β είναι ένα τυχαίο μέγεθος, άρα το Α έχει προς το Β μεγαλύτερο λόγο από αυτόν που έχει το Γ προς το Β. Και όπως είναι το Α προς το Β έτσι είναι και το Γ προς το Δ. Άρα και το Γ έχει προς το Δ μεγαλύτερο λόγο από αυτόν που έχει το Γ προς το Β. Και εκείνο το μέγεθος προς το οποίο ένα κοινό μέγεθος έχει μεγαλύτερο λόγο είναι το μικρότερο. Άρα το Δ είναι μικρότερο από το Β. Ώστε το Β είναι μεγαλύτερο από το Δ.

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι κι αν το Α είναι ίσο με το Γ, τότε και το Β θα είναι ίσο με το Δ, κι αν το Α είναι μικρότερο από το Γ, τότε και το Β θα είναι μικρότερο από το Δ.

Άρα, εάν ένα πρώτο μέγεθος έχει προς ένα δεύτερο τον ίδιο λόγο που έχει ένα τρίτο προς ένα τέταρτο και το πρώτο είναι μεγαλύτερο (ίσο, μικρότερο) από το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι μεγαλύτερο (ίσο, μικρότερο αντίστοιχα) από το τέταρτο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 15

Τα μέρη έχουν τον ίδιο λόγο με τα ίσα πολλαπλάσια τους, αν αυτά ληφθούν κατάλληλα.



Έστω τα ίσα πολλαπλάσια ΑΒ του Γ και ΔΕ του Ζ. Λέγω πως ότι όπως είναι το Γ προς το Ζ έτσι είναι και το ΑΒ προς το ΔΕ.

Επειδή τα ΑΒ και ΔΕ είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ και Ζ αντίστοιχα, άρα όσα μεγέθη ίσα με το Γ είναι πάνω στο ΑΒ, τόσα μεγέθη ίσα με το Ζ θα είναι πάνω στο ΔΕ. Διαιρείται το ΑΒ σε μεγέθη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ίσα με το Γ και το ΔΕ σε μεγέθη ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ίσα με το Ζ. Δηλαδή τα ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ θα είναι ίσα σε πλήθος με τα ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Και επειδή τα ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ είναι ίσα μεταξύ τους και τα ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ είναι ίσα μεταξύ τους, άρα όπως είναι το ΑΗ προς το ΔΚ είναι και το ΗΘ προς το ΚΛ και το ΘΒ προς το ΛΕ. Άρα, όπως είναι ένα από τα ηγούμενα προς ένα από τα επόμενα είναι και όλα τα ηγούμενα προς όλα τα επόμενα. Άρα ότι είναι το ΑΗ προς το ΔΚ είναι και το ΑΒ προς το ΔΕ. Και το ΑΗ είναι ίσο με το Γ και το ΔΚ είναι ίσο με το Ζ. άρα ότι είναι το Γ προς το Ζ είναι και το ΑΒ προς το ΔΕ.

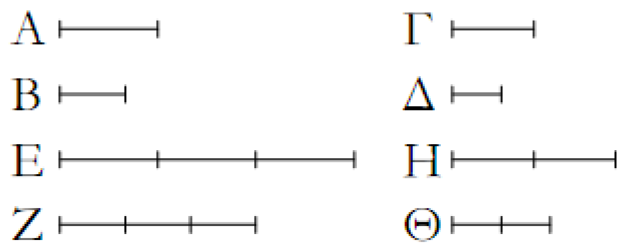
Άρα τα μέρη έχουν τον ίδιο λόγο με τα ίσα πολλαπλάσια τους, αν αυτά ληφθούν κατάλληλα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 16

Εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα θα είναι και εναλλάξ ανάλογα.

Έστω τέσσερα ανάλογα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ τέτοια ώστε όπως είναι το Α προς το Β έτσι είναι και το Γ προς το Δ. Λέγω ότι θα είναι και εναλλάξ ανάλογα, δηλαδή ότι είναι το Α προς το Γ είναι και το Β προς το Δ.

Ας έχουν ληφθεί τα ίσα πολλαπλάσια Ε, Ζ των Α, Β αντίστοιχα, και άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια Η, Θ των Γ, Δ αντίστοιχα.

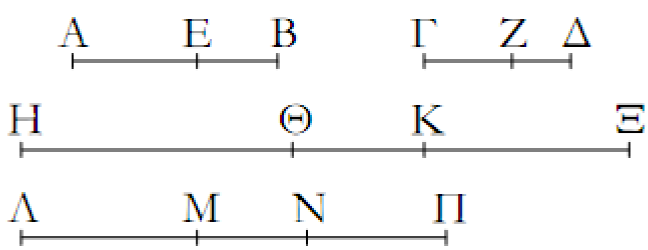


Και επειδή τα Ε, Ζ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β αντίστοιχα και τα μέρη έχουν τον ίδιο λόγο με τα πολλαπλάσια τους, άρα όπως είναι το Α προς το Β έτσι είναι και το Ε προς το Ζ. Όμως όπως είναι το Α προς το Β είναι και το Γ προς το Δ. Και άρα όπως είναι το Γ προς το Δ είναι και το Ε προς το Ζ. Πάλι, επειδή τα Η, Θ είναι ίσα πολλαπλάσια των Γ, Δ αντίστοιχα, άρα όπως είναι το Γ προς το Δ είναι και το Η προς το Θ. Όμως όπως είναι το Ε προς το Ζ είναι και το Η προς το Θ. Και αν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα και το πρώτο είναι μεγαλύτερο (ίσο, μικρότερο) από το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι μεγαλύτερο (ίσο, μικρότερο αντίστοιχα) από το τέταρτο. Άρα, αν το Ε υπερέχει (είναι ίσο, μικρότερο) του Η, τότε και το Ζ θα υπερέχει (είναι ίσο, μικρότερο αντίστοιχα) του Θ. Και τα Ε, Ζ είναι ίσα πολλαπλάσια των Α, Β αντίστοιχα και τα Η, Θ είναι άλλα πολλαπλάσια των Γ, Δ αντίστοιχα. Άρα όπως είναι το Α προς το Γ είναι και το Β προς το Δ.

Άρα, εάν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα θα είναι και εναλλάξ ανάλογα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 17

Εάν συντεθειμένα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε και χωριζόμενα θα είναι ανάλογα.



Έστω τα συντιθέμενα μεγέθη ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ τα οποία είναι ανάλογα και όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ είναι και το ΓΔ προς το ΔΖ. Λέγω ότι και χωριζόμενα θα είναι ανάλογα, δηλαδή όπως είναι το ΑΕ προς το ΕΒ είναι και το ΓΖ προς το ΔΖ.

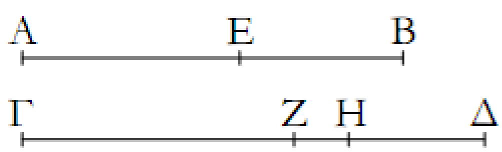
Ας έχουν ληφθεί τα ίσα πολλαπλάσια ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ , ΜΝ των ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ αντίστοιχα και άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια ΚΞ, ΝΠ των ΕΒ, ΖΔ αντίστοιχα.

Και επειδή τα ΗΘ και ΘΚ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ και ΕΒ αντίστοιχα, άρα τα ΗΘ και ΗΚ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ και ΑΒ αντίστοιχα. Όμως τα ΗΘ και ΛΜ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ και ΓΖ αντίστοιχα. Άρα, τα ΗΚ και ΛΜ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ και ΓΖ αντίστοιχα. Πάλι, επειδή τα ΛΜ, ΜΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ και ΖΔ αντίστοιχα, άρα τα ΛΜ και ΛΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ και ΓΔ αντίστοιχα. Και τα ΛΜ και ΗΚ ήταν ίσα πολλαπλάσια των ΓΖ και ΑΒ αντίστοιχα. Άρα τα ΗΚ και ΛΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Άρα τα ΗΚ, ΛΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΒ, ΓΔ. Πάλι, επειδή τα ΘΚ και ΜΝ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ και ΖΔ αντίστοιχα, και τα ΚΞ και ΝΠ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ και ΖΔ αντίστοιχα, τότε και προστιθέμενα, τα ΘΞ και ΜΠ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ και ΖΔ αντίστοιχα. Και επειδή ότι είναι το ΑΒ προς το ΒΕ είναι και το ΓΔ προς το ΔΖ, και τα ίσα πολλαπλάσια ΗΚ, ΛΝ λήφθηκαν από τα ΑΒ, ΓΔ, και τα ίσα πολλαπλάσια ΘΞ, ΜΠ από τα ΕΒ, ΖΔ, άρα εάν το ΗΚ υπερέχει (είναι ίσο, μικρότερο) του ΘΞ, τότε και το ΛΝ υπερέχει (είναι ίσο, μικρότερο αντίστοιχα) του ΜΠ. Έστω ότι το ΗΚ υπερέχει του ΘΞ και άρα, αν αφαιρεθεί και από τα δύο το ΘΚ, άρα το ΗΘ θα υπερέχει του ΚΞ. Όμως αν το ΗΚ υπερείχε του ΘΞ, τότε και το ΛΝ θα υπερείχε του ΜΠ. Άρα και το ΛΝ υπερέχει του ΜΠ και αν αφαιρεθεί και από τα δύο το ΜΝ, τότε και το ΛΜ υπερέχει του ΝΠ. Ώστε αν το ΗΘ υπερέχει του ΚΞ, τότε και το ΛΜ υπερέχει του ΝΠ. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι αν το ΗΘ είναι ίσο με (μικρότερο από) το ΚΞ, τότε και το ΛΜ θα είναι ίσο με (μικρότερο από) το ΝΠ. Και τα ΗΘ, ΛΜ είναι ίσα πολλαπλάσια των ΑΕ, ΓΖ και τα ΚΞ, ΝΠ είναι άλλα τυχαία ίσα πολλαπλάσια των ΕΒ, ΖΔ. Άρα, ότι είναι το ΑΕ προς το ΕΒ είναι και το ΓΖ προς το ΖΔ.

Άρα, εάν συντεθειμένα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε και χωριζόμενα θα είναι ανάλογα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 18

Εάν χωριζόμενα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε θα είναι ανάλογα και τα συντεθειμένα.



Έστω χωριζόμενα μεγέθη ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, και όπως είναι το ΑΕ προς το ΕΒ, είναι και το ΓΖ προς το ΖΔ · λέγω ότι και τα συντεθειμένα θα είναι ανάλογα, όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ, είναι και το ΓΔ προς το ΖΔ.

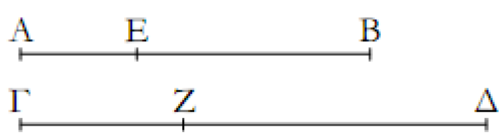
Εάν δεν είναι όπως το ΑΒ προς το ΒΕ, όσο το ΓΔ προς το ΔΖ, τότε θα είναι όπως το ΑΒ προς το ΒΕ, όσο και το ΓΔ προς κάποιο μέγεθος μικρότερο ή μεγαλύτερο του ΔΖ.

Έστω πρώτα για ΔΗ μικρότερο του ΔΖ τέτοιο ώστε όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ, είναι και το ΓΔ προς το ΔΗ. Τότε θα είναι ανάλογα και όταν χωριστούν. Έτσι, όπως είναι το ΑΕ προς το ΕΒ, είναι και το ΓΗ προς το ΗΔ. Όμως υποτέθηκε ότι όπως είναι το ΑΕ προς το ΕΒ, είναι και το ΓΖ προς το ΖΔ. Έτσι, όπως είναι το ΓΗ προς το ΗΔ, είναι και το ΓΖ προς το ΖΔ. Το πρώτο μέγεθος ΓΗ είναι μεγαλύτερο από το τρίτο ΓΖ. Άρα, το δεύτερο μέγεθος ΗΔ είναι μεγαλύτερο από το τέταρτο ΖΔ. Όμως, είναι και μικρότερο, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα δεν ισχύει ότι όπωςείναι το ΑΒ προς το ΒΕ, είναι και το ΓΔ προς κάποιο μέγεθος μικρότερο από το ΖΔ. Όμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι ούτε και για ΔΗ μεγαλύτερο από το ΔΖ ισχύει. Άρα ισχύει για το ΔΖ το ίδιο.

Άρα εάν χωριζόμενα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε και τα συντεθειμένα θα είναι ανάλογα · Ο.Ε.Δ..

Πρόταση 19

Εάν το ένα όλον προς το άλλο όλον είναι ίσο με το ένα αφαιρούμενο προς το άλλο αφαιρούμενο, τότε και το ένα λοιπό προς το άλλο λοιπό θα είναι ίσο με το ένα όλο προς το άλλο όλο.



Έστω ότι όπως είναι το όλον ΑΒ προς το όλον ΓΔ, είναι και το αφαιρεθέν ΑΕ προς το αφαιρεθέν ΓΖ · λέγω ότι και το λοιπό ΕΒ προς το λοιπό ΖΔ θα είναι όσο το όλο ΑΒ προς το όλο ΓΔ.

Αφού όπως είναι το ΑΒ προς το ΓΔ, είναι και το ΑΕ προς το ΓΖ, από εναλλάξ λόγους έχουμε ότι όπως είναι το ΒΑ προς το ΑΕ είναι και το ΔΓ προς το ΓΖ.. Αφού τα συντεθειμένα μεγέθη είναι ανάλογα τότε θα είναι ανάλογα και αν χωρισθούν, όπως είναι το ΒΕ προς το ΕΑ, είναι και το ΔΖ προς το ΓΖ · επίσης από εναλλάξ λόγους όπως είναι το ΒΕ προς το ΔΖ, είναι και το ΕΑ προς το ΖΓ. Υποτέθηκε ότι όπως είναι το ΑΕ προς το ΓΖ, είναι και το όλο ΑΒ προς το όλο ΓΔ. Άρα, λοιπόν το λοιπό ΕΒ προς το λοιπό ΖΔ θα είναι όπως το όλο ΑΒ είναι προς το όλο ΓΔ.

Άρα εάν το όλο προς το όλο είναι ίσο με το αφαιρούμενο προς το αφαιρούμενο, τότε και το λοιπό προς το λοιπό θα είναι ίσο με το όλον προς το όλον Ο.Ε.Δ..

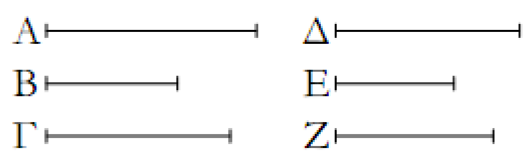
[Αφού δείξαμε ότι όπως είναι το ΑΒ προς το ΓΔ είναι και το ΕΒ προς το ΖΔ και από εναλλάξ λόγους όπως είναι το ΑΒ προς το ΒΕ είναι και το ΓΔ προς το ΖΔ, συντεθειμένα άρα τα μεγέθη είναι ανάλογα · δείξαμε ότι όπως είναι το ΒΑ προς το ΑΕ τόσο είναι και το ΔΓ προς το ΓΖ · το τελευταίο είναι αντίστροφο του προηγουμένου.]

Πόρισμα

Από αυτό είναι φανερό ότι εάν συντεθειμένα μεγέθη είναι ανάλογα τότε θα είναι ανάλογα και όταν αντιστραφούν · Ο.Ε.Δ..

Πρόταση 20

Εάν έχουμε τρία μεγέθη, και άλλα ισοπληθή μεγέθη, λαμβάνοντάς τα ανά δύο ανάλογα με ίδιο λόγο έχουμε ότι εάν το πρώτο μέγεθος εξ' ισότητας είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το τρίτο, τότε και το τέταρτο θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το έκτο αντίστοιχα.



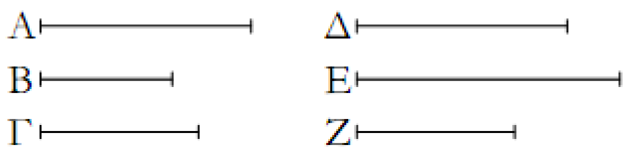
Έστω τρία μεγέθη Α, Β, Γ, και άλλα μεγέθη ισοπληθή τα Δ, Ε, Ζ, λαμβανόμενα ανά δύο ανάλογα με ίδιο λόγο, όπως είναι το Α προς το Β, είναι και ο Δ προς το Ε και όπως είναι το Β προς το Γ, είναι και το Ε προς το Ζ. Έστω και το Α εξ' ισότητας μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το Γ · λέγω ότι και το Δ θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το Ζ αντίστοιχα.

Αφού Α μεγαλύτερο από το Γ, και Β ένα άλλο μέγεθος και το μεγαλύτερο έχει μεγαλύτερο λόγο από ότι το μικρότερο προς το ίδιο μέγεθος, άρα ο λόγος Α προς Β είναι μεγαλύτερος του λόγου Β προς Γ. Αλλά αφού το Α προς το Β είναι όπως το Δ προς Ε και αντίστροφα ισχύει το ότι όπως είναι το Γ προς Β, είναι και το Ζ προς το Ε . Άρα ο λόγος Δ προς Ε είναι μεγαλύτερος από το Ζ προς Ε. Το μέγεθος που έχει μεγαλύτερο λόγο προς ίδιο μέγεθος είναι και το μεγαλύτερο. Άρα το Δ είναι μεγαλύτερο από το Ζ. Όμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι και εάν είναι ίσα τα Α, Γ, θα είναι ίσα και τα Δ, Ζ, και εάν τέλος είναι μικρότερο το Α από το Γ, τότε και το Δ θα είναι μικρότερο από το Ζ.

Άρα εάν έχουμε τρία μεγέθη, και άλλα ισοπληθή μεγέθη, λαμβάνοντάς τα ανά δύο ανάλογα με ίδιο λόγο έχουμε ότι εάν το πρώτο μέγεθος μέσω ισότητας είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το τρίτο, τότε και το τέταρτο θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το έκτο αντίστοιχα· Ο.Ε.Δ..

Πρόταση 21

Εάν έχουμε τρία μεγέθη και άλλα ισοπληθή μεγέθη, λαμβάνοντάς τα ανά δύο ανάλογα με ίδιο λόγο και εάν η αναλογία είναι διαταραγμένη, έχουμε ότι εάν το πρώτο μέγεθος εξ' ισότητας είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το τρίτο, τότε και το τέταρτο θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το έκτο αντίστοιχα.



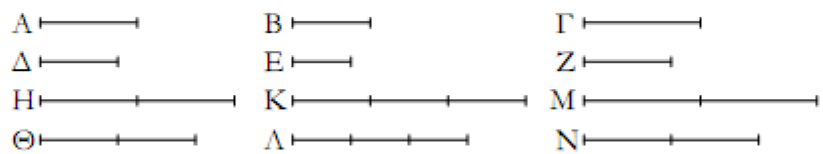
Έστω τρία μεγέθη Α, Β, Γ, και άλλα μεγέθη ισοπληθή τα Δ, Ε, Ζ, λαμβανόμενα ανά δύο ανάλογα με ίδιο λόγο, με διαταραγμένη αναλογία έτσι ώστε όπως είναι το Α προς το Β, είναι και το Ε προς το Ζ και όπως είναι το Β προς το Γ είναι και το Δ προς το Ε. Έστω και εξ' ισότητας το Α μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το Γ · λέγω ότι και το Δ θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο του Ζ αντίστοιχα.

Αφού Α μεγαλύτερο από το Γ, και Β ένα άλλο μέγεθος, άρα Α έχει μεγαλύτερο λόγο προς το Β από το Γ προς το Β . Όμως όπως είναι το Α προς το Β, είναι και το Ε προς το Ζ, και αντίστροφα ισχύει το ότι όπως είναι το Γ προς το Β, είναι και το Ε προς το Δ. Άρα το Ε επίσης έχει μεγαλύτερο λόγο προς το Ζ από ότι έχει το Ε προς το Δ · μικρότερο μέγεθος από τα δύο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο τον λόγο κάποιου άλλου ίδιου μεγέθους προς αυτό. Άρα το Ζ είναι μικρότερο του Δ. Άρα το Δ είναι μεγαλύτερο του Ζ. Όμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι και εάν είναι ίσα τα Α, Γ, θα είναι ίσα και τα Δ, Ζ, και εάν τέλος είναι μικρότερο το Α από το Γ, τότε και το Δ θα είναι μικρότερο από το Ζ.

Άρα εάν έχουμε τρία μεγέθη και άλλα ισοπληθή μεγέθη, λαμβάνοντάς τα ανά δύο ανάλογα με ίδιο λόγο και εάν οι αναλογία είναι διαταραγμένη, έχουμε ότι εάν το πρώτο μέγεθος μέσω ισότητας είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το τρίτο, τότε και το τέταρτο θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο ή μικρότερο από το έκτο αντίστοιχα· Ο.Ε.Δ..

Πρόταση 22

Δοθέντων μεγεθών τα οποία μεγέθη και ισοπληθών μεγεθών που έχουν τον ίδιο λόγο ανά δύο, τότε θα έχουν και τον ίδιο λόγο εξ' ισότητας.



Έστω τα μεγέθη Α, Β ,Γ και άλλα τόσα μεγέθη Δ, Ε, Ζ τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο ανά δυο, δηλαδή όπως το Α είναι προς Β έτσι το Δ είναι προς το Ε και όπως το Β είναι προς το Γ έτσι το Ε είναι προς το Ζ. Λέγω τότε ότι θα έχουν και τον ίδιο λόγο εξ' ισότητας, δηλαδή όπως το Α είναι προς το Γ έτσι Δ είναι προς το Ζ.

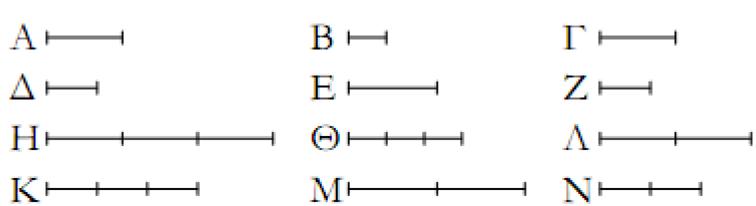
Έστω τα ίσοπολλαπλάσια Η, Θ των Α και Δ και τα ίσοπολλαπλάσια Κ, Λ των Β και Ε και ακόμα τα ισοπολλαπλάσια Μ, Ν των Γ και Ζ.

Και αφού όπως το Α είναι προς το Β έτσι Δ είναι προς το Ε και τα ίσοπολλαπλάσια Η, Δ των Α, Δ και τα πολλαπλάσια Κ, Λ των Β, Ε, τότε όπως το Η είναι προς Κ έτσι το Θ προς Λ. Και όμοια, για τον ίδιο λόγο, όπως το Κ είναι προς το Μ έτσι Λ είναι προς Ν. Επειδή τα Η, Κ, Μ είναι τρία μεγέθη και τα Θ, Λ, Ν άλλα ίσου πλήθους μεγέθη τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο ανά δυο, άρα εξ' ισότητας εάν το Η είναι μεγαλύτερο από το Μ, τότε είναι και μεγαλύτερο το Θ από το Ν, εάν είναι ίσο, τότε ίσο, και εάν είναι μικρότερο , τότε είναι και το άλλο μικρότερο [πρόταση 5.20]. Και τα μεγέθη Η, Θ είναι ίσοπολλαπλάσια των Α,Δ, και τα μεγέθη Μ, Ν είναι ίσοπολλαπλάσια των Γ,Ζ . Άρα όπως είναι το Α προς το Γ έτσι είναι το Δ προς το Ζ.

Άρα, δοθέντων μεγεθών και ισοπληθών μεγεθών, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο ανά δυο ότε θα έχουν και τον ίδιο λόγο εξ' ισότητας.

Πρόταση 23

Εάν υπάρχουν τρία μεγέθη, και κάποια άλλα τρία, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο ανά δυο, και αν η αναλογία τους είναι διαταραγμένη, τότε θα έχουν και τον ίδιο λόγο εξ' ισότητας.



Έστω τρία μεγέθη Α,Β,Γ και άλλα τρία μεγέθη, Δ,Ε,Ζ τα οποία ανά δυο έχουν τον ίδιο λόγο. Και έστω ότι η αναλογία τους είναι διαταραγμένη, δηλαδή όπως το Α είναι προς το Β έτσι το Ε είναι προς Ζ και όπως το Β είναι προς το Γ έτσι το Δ είναι προς το Ε. Λέγω ότι όπως το Α είναι προς το Γ έτσι το Δ είναι προς το Ζ.

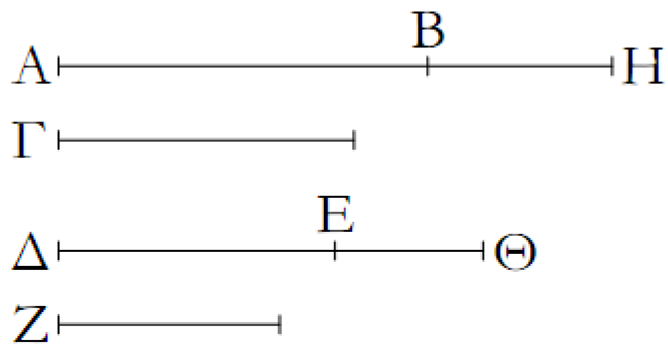
Ας έχουν ληφθεί τα ισοπολλαπλάσια Η, Θ, Κ των Α, Β, Δ και τα ίσοπολλαπλάσια Λ, Μ, Ν των Γ, Ε, Ζ.

Και επειδή τα Η,Θ είναι ίσοπολλαπλάσια των Α,Β, και τα μέρη αυτών έχουν τον ίδιο λόγο ως ίσοπολλαπλάσια, έτσι όπως το Α είναι προς το Β έτσι το Η είναι προς το Θ. Και όμοια, για τον ίδιο λόγο όπως το Ε είναι προς το Ζ έτσι το Μ είναι προς το Ν. Και όπως το Α είναι προς Β έτσι το Ε είναι προς το Ζ. Άρα, όπως το Η είναι προς το Θέτσι το Μ είναι προς το Ν. Και αφού όπως το Β είναι προς το Γ έτσι το Δ είναι προς το Ε και εναλλάξ, όπως το Β είναι προς το Δ έτσι το Γ είναι προς το Ε. Και αφού τα Θ, Κ είναι ίσοπολλαπλάσια των Β, Δ, τα μέρη τους θα έχουν τον ίδιο λόγο. Και έτσι όπως το Β είναι προς το Δ έτσι το Θ είναι προς το Κ. Αλλά, όπως το Β είναι προς το Δ έτσι το Γ είναι προς το Ε και άρα όπως το Θ είναι προς το Κ έτσι το Γ είναι προς το Ε. Πάλι, αφού τα Λ ,Μ είναι ίσοπολλαπλάσια των Γ, Ε, όπως το Γ είναι προς το Ε έτσι το Λ είναι προς το Μ. Αλλά όπως το Γ είναι προς το Ε έτσι το Θ είναι προς το Κ και άρα όπως το Θ είναι προς το Κ έτσι το Λ είναι προς το Μ και εναλλάξ όπως το Θ είναι προς το Λ έτσι το Κ είναι προς το Μ. Δείχθηκε ότι ο όπως το Η είναι προς το Θ έτσι το Μ είναι προς Ν. Άρα αφού τα Η, Θ, Λ και τα Κ, Μ, Ν έχουν τον ίδιο λόγο ανά δύο, και η αναλογία τους είναι διαταραγμένη, άρα εξ' ισότητας, εάν το Η είναι μεγαλύτερο μέγεθος από το Λ, τότε και το μέγεθος Κ είναι μεγαλύτερο από το Ν αν το Η είναι ίσο με το Λ, τότε και το Κ είναι ίσο με το Ν και ανάλογα αν είναι μικρότερο [πρόταση 5.21]. Και τα Η, Κ είναι ίσοπολλαπλάσια των Α, Δ και τα Λ, Ν των Γ, Ζ. Άρα όπως το Α είναι προς το Γ έτσι το Δ είναι προς το Ζ).

Άρα, εάν υπάρχουν τρία μεγέθη, και άλλα τρία, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο, ανά δύο λαμβανόμενα, και η αναλογία τους είναι διαταραγμένη τότε θα έχουν και τον ίδιο λόγο εξ' ισότητας Ο.Ε.Δ..

Πρόταση 24

Εάν κάποιο πρώτο μέγεθος με ένα δεύτερο έχουν τον ίδιο λόγο με ένα τρίτο μέγεθος προς ένα τέταρτο μέγεθος και ένα πέμπτο μέγεθος προς το δεύτερο μέγεθος έχουν τον ίδιο λόγο που έχει ένα έκτο μέγεθος προς το τέταρτο μέγεθος, τότε ο λόγος του πρώτου μεγέθους συντεθειμένο με το πέμπτο μέγεθος προς το δεύτερο μέγεθος είναι ίσος με τον λόγο του τρίτου μεγέθους συντεθειμένο με το έκτο μέγεθος προς το τέταρτο μέγεθος.



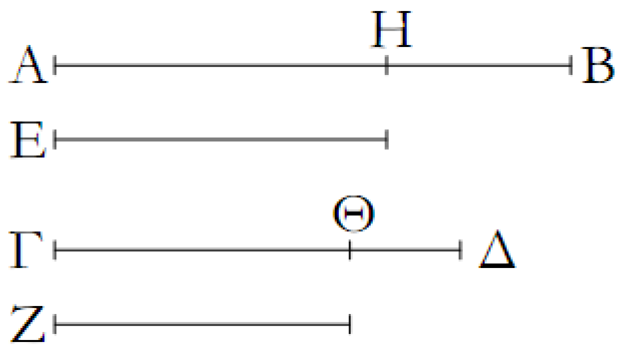
Έστω ότι ο λόγος του πρώτου μεγέθους ΑΒ προς το δεύτερο Γ είναι ίσος με τον λόγο του τρίτου ΔΕ προς το τέταρτο μέγεθος Ζ. Και έστω ο λόγος του πέμπτου μεγέθους ΒΗ προς το δεύτερο μέγεθος Γ είναι ίσος με τον λόγο του έκτου μεγέθους ΕΘ προς το τέταρτο μέγεθος Ζ. Λέγω τότε ότι ο λόγος του πρώτου μεγέθους συντιθέμενο στο πέμπτο, δηλαδή το μέγεθος ΑΗ προς το δεύτερο μέγεθος Γ, είναι ίσος με τον λόγο του τρίτου συντιθέμενου στο έκτο, δηλαδή το μέγεθος ΔΘ προς το τέταρτο μέγεθος Ζ.

Αφού όπως το ΒΗ είναι προς το Γ έτσι το ΕΘ είναι προς Ζ τότε όπως το Γ είναι προς το ΒΗ έτσι το Ζ είναι προς το ΕΘ. Άρα, αφού όπως το ΑΒ είναι προς το Γ όπως το ΔΕ προς το Ζ και αφού όπως το Γ είναι προς το Βηόπως το Ζ προς το ΕΘ, άρα εξ' ισότητας, όπως το ΑΒ είναι προς το ΒΗ έτσι το ΔΕ είναι προς το ΕΘ. Και αφού αν χωριζόμενα μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο τότε και συντεθειμένα θα έχουν τον ίδιο λόγο, όπως το ΑΗ είναι προς το ΒΗ έτσι το Δθείναι προς το ΕΘ. Επίσης όπως το ΒΗ είναι προς το Γ έτσι το ΕΘ είναι προς το Ζ. Άρα εξ' ισότητας όπως το ΑΗ είναι προς τον Γέτσι το ΔΘ είναι προς το Ζ.

Έτσι εάν ο λόγος του πρώτου μεγέθους προς το δεύτερο είναι ίσος με τον λόγο του τρίτου προς το τέταρτο και ο λόγος του πέμπτου προς το δεύτερο είναι ίσος με τον λόγο του έκτου προς τον τέταρτο τότε ο λόγος του πρώτου συντιθέμενου στο πέμπτο προς το δεύτερο είναι ίσος με τον λόγο του τρίτου συντιθέμενο στο έκτο μέγεθος προς το τέταρτο. Ο.Ε.Δ..

Πρόταση 25

Εάν τέσσερα μεγέθη είναι σε αναλογία, τότε το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο λοιπών μεγεθών.



Έστω ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ τέσσερα μεγέθη σε αναλογία έτσι ώστε όπως το ΑΒ είναι προς το ΓΔ έτσι το Ε είναι προς το Ζ. Και έστω ΑΒ το μεγαλύτερο μέγεθος και Ζ το μικρότερο. Λέγω ότι το άθροισμα των ΑΒ και Ζ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των ΓΔ και Ε.

Διότι έστω ότι το ΑΗ είναι ίσο με το Ε και το Ζ με το ΓΘ. Αφού όπως το ΑΒ είναι προς το ΓΔ έτσι το Ε είναι προς το Ζ και το Ε είναι ίσο με το ΑΗ και το Ζ είναι ίσο με το ΓΘ, τότε όπως το ΑΒ είναι προς το ΓΔ έτσι το ΑΗ είναι προς το ΓΘ. Και αφού όπως το ΑΒ είναι προς το ΓΔ όπως το ΑΗ είναι προς το ΓΘ, όπως το λοιπό ΗΒ είναι προς το λοιπό Θ έτσι το ΑΒ είναι προς το ΓΔ.. Και το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Άρα μεγαλύτερο και το ΗΒ από το ΘΔ. Και αφού το ΑΗ είναι ίσο με το Ε , και το ΓΘ με το Ζ τότε το άθροισμα των ΑΗ και Ζ είναι ίσο με το άθροισμα των ΓΘ και Ε. Και αφού, ίσα μεγέθη όταν προστεθούν σε άνισα μεγέθη, τότε τα προκύπτοντα μεγέθη είναι άνισα και άρα αν προστεθούν στο ΗΒ τα ΑΗ και Ζ και στο ΘΔ τα ΓΘ και Ε, με το ΗΒ άνισο του ΘΔ και το ΗΒ μεγαλύτερο, συνάγεται ότι το ΑΒ προστιθέμενο στο Ζ είναι μεγαλύτερο από το Ε προστιθέμενο στο ΓΔ.

Έτσι αν τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα, τότε το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο λοιπών μεγεθών. Ο.Ε.Δ.