ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤ΄

Επιμέλεια Μετάφρασης :

Βαρίκου Ερασμία	Α.Μ 3322
Βεληβασάκη Μαρία	Α.Μ 3432
Καρανίκκη Ξένια	Α.Μ. 3537
Μετζάκη Αικατερίνη	Α.Μ 3396
Μπαλίου Ίλντα	Α.Μ. 3410
Πιλαβίδης Κρίτων (csd)	Α.Μ 2029

Ορισμοί

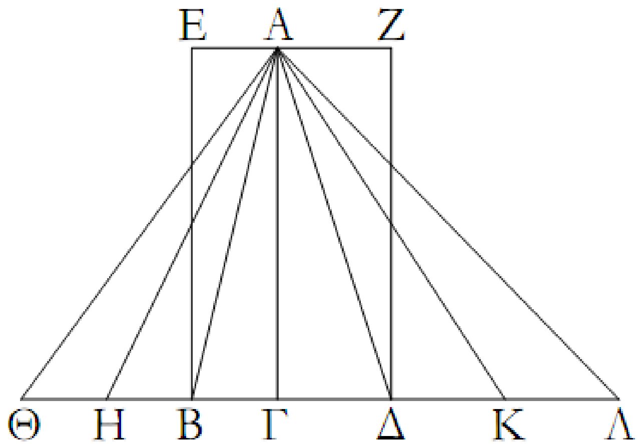
1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι όσα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες ίσες και τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες.

2. Μία ευθεία λέγεται ότι τέμνεται σε μέσο και άκρο λόγο όταν όλη προς το μεγαλύτερο τμήμα είναι όπως το μεγαλύτερο προς το μικρότερο.

3.Ύψος παντός σχήματος είναι η αγόμενη από την κορυφή κάθετος προς τη βάση.

Πρόταση 1

Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που είναι υπό το ίδιο ύψος, είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους.



Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ και ΕΓ, ΓΖ παραλληλόγραμμα υπό το ίδιο ύψος ΑΓ. Λέγω ότι όπως η βάση ΒΓ είναι προς τη βάση ΓΔ, έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΑΓΔ και το παραλληλόγραμμο ΕΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ.

Ας έχει προεκταθεί η ΒΔ και από τα δύο μέρη στα σημεία Θ και Λ και ας κείτονται προς τη βάση ΒΓ οσεσδήποτε ίσες, οι ΒΗ, ΗΘ και προς τη βάση ΓΔ οσεσδήποτε ίσες, οι ΔΚ, ΚΛ και ας έχουν ενωθεί οι ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

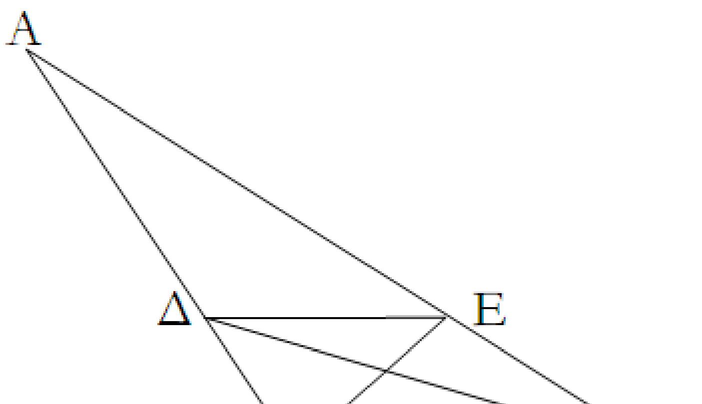
Και επειδή οι ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ είναι ίσες μεταξύ τους, ίσα είναι και τα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα μεταξύ τους. Άρα όσες φορές είναι η βάση ΘΓ πολλαπλάσια της βάσης ΒΓ, τόσες φορές είναι το τρίγωνο ΑΘΓ πολλαπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ. Από αυτά λοιπόν συνάγεται ότι όσες φορές είναι η βάση ΛΓ πολλαπλάσια της βάσης ΔΓ, τόσες φορές είναι και το τρίγωνο ΑΛΓ πολλαπλάσιο του τριγώνου ΑΓΔ. Και εάν η βάση ΘΓ είναι ίση με τη βάση ΓΛ, το τρίγωνο ΑΘΓ ίσο με το τρίγωνο ΑΓΛ και εάν η βάση ΘΓ υπερέχει της ΓΛ βάσης τότε το τρίγωνο ΑΘΓ υπερέχει του ΑΓΛ τριγώνου και εάν μικρότερη, τότε είναι μικρότερο. Λοιπόν από τέσσερα μεγέθη, δύο βάσεις ΒΓ, ΓΔ και δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, έχουν ληφθεί ίσα πολλαπλάσια της βάσης ΒΓ και του τριγώνου ΑΒΓ, η βάση ΘΓ και το τρίγωνο ΑΘΓ, και άλλα ίσα πολλαπλάσια της βάσης ΓΔ και του ΑΔΓ τριγώνου, η βάση ΛΓ και το τρίγωνο ΑΛΓ. Και έχει αποδειχθεί ότι εάν η βάση ΘΓ υπερέχει της βάσης ΓΛ τότε και το τρίγωνο ΑΘΓ υπερέχει του τριγώνου ΑΛΓ και εάν ίσες , τα τρίγωνα είναι ίσα και εάν η ΘΓ είναι μικρότερη της ΓΛ τοτε το ΑΘΓ είναι μικρότερο του ΑΛΓ. Άρα όπως είναι η βάση ΒΓ προς τη βάση ΓΔ έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΑΓΔ.

Και επειδή το παραλληλόγραμμο ΕΓ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ, το ΖΓ παραλληλόγραμμο είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΓΔ. Αυτά τα μέρη έχουν τον ίδιο λόγο όπως τα πολλαπλάσια τους, άρα όπως είναι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΑΓΔ, έτσι και το παραλληλόγραμμο ΕΓ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΖΓ. Επειδή λοιπόν αποδείχτηκε ότι όπως η βάση ΒΓ είναι προς τη ΓΔ έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΑΓΔ, όπως δε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΑΓΔ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΕΓ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ και άρα όπως η βάση ΒΓ είναι προς τη βάση ΓΔ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΕΓ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΖΓ.

Άρα τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που είναι υπό το ίδιο ύψος, είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 2

Εάν σε τρίγωνο αχθεί ευθεία παράλληλη με μία από τις πλευρές, θα τέμνει ανάλογα τις πλευρές του τριγώνου. Και εάν οι πλευρές του τριγώνου τέμνονται ανάλογα, η ευθεία που ενώνει τις τομές θα είναι παράλληλη στην λοιπή πλευρά του τριγώνου.



Διότι, ας αχθεί στο τρίγωνο ΑΒΓ παράλληλη η ΔΕ σε μια από τις πλευρές του τη ΒΓ. Λέγω ότι όπως είναι η ΒΔ προς τη ΔΑ, έτσι και η ΓΕ είναι προς την ΕΑ.

Διότι ας έχουν ενωθεί οι ΒΕ, ΓΔ.

Άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΓΔΕ, διότι είναι πάνω στη ίδια βάση ΔΕ και ανάμεσα στις παράλληλες ΔΕ, ΒΓ. Και ΑΔΕ είναι ένα άλλο τρίγωνο. Και τα ίσα με αυτό έχουν τον ίδιο λόγο. Άρα όπως είναι το ΒΔΕ τρίγωνο προς το ΑΔΕ τρίγωνο, έτσι το ΓΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ τρίγωνο. Αλλά όπως το ΒΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ, έτσι η ΒΔ είναι προς τη ΔΑ. Διότι είναι υπό το ίδιο ύψος, την αγόμενη κάθετη από το Ε στην ΑΒ, άρα είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους. Από αυτά λοιπόν συνάγεται ότι όπως το ΓΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ έτσι η ΓΕ είναι προς τη ΕΑ και άρα όπως η ΒΔ είναι προς τη ΔΑ, έτσι η ΓΕ είναι προς τη ΕΑ.

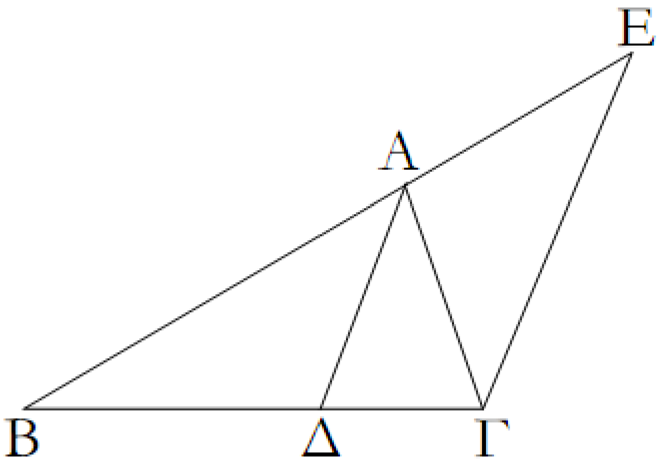
Έστω ότι οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ έχουν τμηθεί ανάλογα, όπως η ΒΔ προς τη ΔΑ, έτσι η ΓΕ προς την ΕΑ και ας έχει ενωθεί η ΔΕ. Λέγω ότι η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΒΓ.

Διότι με την ίδια κατασκευή, επειδή όπως η ΒΔ είναι προς τη ΔΑ, έτσι η ΓΕ είναι προς την ΕΑ, αλλά όπως η ΒΔ είναι προς τη ΔΑ, έτσι το ΒΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ τρίγωνο, και όπως η ΓΕ είναι προς την ΕΑ, έτσι το ΓΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ τρίγωνο. Και άρα όπως το ΒΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ τρίγωνο, έτσι το ΓΔΕ τρίγωνο είναι προς το ΑΔΕ τρίγωνο. Άρα καθένα από τα τρίγωνα ΒΔΕ, ΓΔΕ έχουν το ίδιο λόγο προς το ΑΔΕ. Άρα είναι ίσο το τρίγωνο ΒΔΕ με το ΓΔΕ τρίγωνο και είναι στην ίδια βάση τη ΔΕ. Τα ίσα τρίγωνα τα οποία είναι στην ίδια βάση είναι ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες. Άρα είναι παράλληλη η ΔΕ στη ΒΓ.

Άρα, εάν σε τρίγωνο αχθεί ευθεία παράλληλη με μία από τις πλευρές, θα τέμνει ανάλογα τις πλευρές του τριγώνου. Και εάν οι πλευρές του τριγώνου τέμνονται ανάλογα, η ευθεία που ενώνει τις τομές θα είναι παράλληλη στην λοιπή πλευρά του τριγώνου.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 3

Εάν η γωνία τριγώνου διχοτομηθεί, η τέμνουσα ευθεία τέμνει τη γωνία και τη βάση, τα τμήματα της βάσης θα έχουν τον ίδιο λόγο όπως οι λοιπές πλευρές του τριγώνου. Και εάν τα τμήματα της βάσης έχουν τον ίδιο λόγο με τις λοιπές πλευρές του τριγώνου, η ευθεία που ενώνει την κορυφή με τη τομή θα διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου.



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ας έχει διχοτομηθεί η γωνία ΒΑΓ από την ΑΔ ευθεία. Λέγω ότι όπως είναι η ΒΔ προς τη ΓΔ, έτσι η ΒΑ προς την ΑΓ.

Διότι ας έχει αχθεί η ΓΕ από το Γ παράλληλη προς τη ΔΑ και η προεκτεινόμενη ΒΑ συναντά αυτή στο Ε.

Και επειδή η ευθεία ΑΓ εμπίπτει στις παράλληλες ΑΔ, ΕΓ, άρα η γωνία ΑΓΕ είναι ίση με τη ΓΑΔ. Αλλά η γωνία ΓΑΔ είναι ίση με τη ΒΑΔ και άρα η ΒΑΔ είναι ίση με τη ΑΓΕ. Πάλι, επειδή η ευθεία ΒΑΕ ενέπεσε στις παράλληλες ΑΔ, ΕΓ, η εκτός γωνία ΒΑΔ είναι ίση με την εντός ΑΕΓ. Και αποδείχθηκε ότι η ΑΓΕ ίση με τη ΒΑΔ. Άρα και η ΑΓΕ ίση με τη γωνία ΑΕΓ .Ώστε και η πλευρά ΑΕ είναι ίση με τη πλευρά ΑΓ. Και επειδή η ΑΔ έχει αχθεί παράλληλη σε μία από τις πλευρές του τριγώνου ΒΓΕ , την ΓΕ, άρα είναι ανάλογα όπως η ΒΔ προς τη ΔΓ έτσι η ΒΑ προς τη ΔΓ, και η ΒΑ προς την ΑΓ. Άρα όπως η ΒΔ είναι προς τη ΔΓ, έτσι η ΒΑ είναι προς τη ΑΓ.

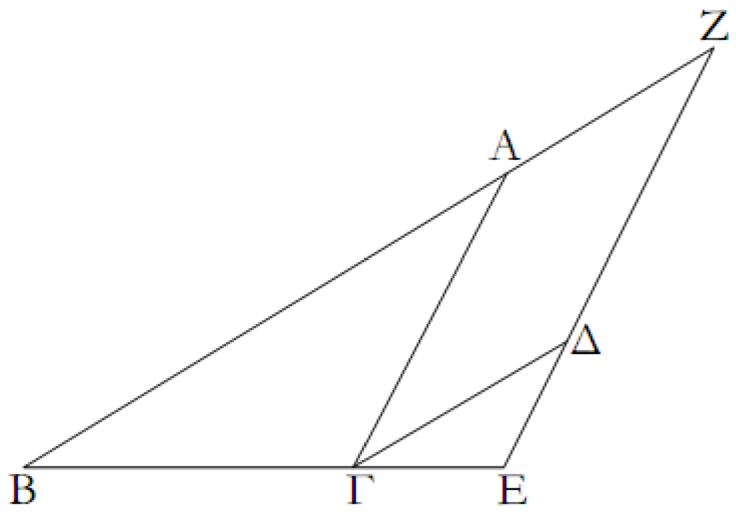
Έστω ότι όπως η ΒΔ είναι προς τη ΔΓ, έτσι η ΒΑ είναι προς τη ΑΓ και ας έχει ενωθεί η ΑΔ. Λέγω ότι η γωνία ΒΑΓ έχει διχοτομηθεί από την ευθεία ΑΔ.

Διότι με την ίδια κατασκευή, επειδή είναι όπως η ΒΔ προς τη ΔΓ, έτσι η ΒΑ προς την ΑΓ, αλλά και όπως η ΒΔ είναι προς την ΔΓ, έτσι είναι η ΒΑ προς την ΑΕ. Διότι η ΑΔ έχει αχθεί παράλληλη στην ΕΓ του τριγώνου ΒΓΕ. Άρα και όπως η ΒΑ είναι προς την ΑΓ ,έτσι η ΒΑ προς τη ΑΕ. Άρα η ΑΓ είναι ίση με την ΑΕ. Ώστε και η γωνία ΑΕΓ είναι ίση με τη ΑΓΕ. Αλλά η εξωτερική γωνία της ΑΕΓ είναι ίση με την ΒΑΔ και η ΑΕΓ γωνία είναι ίση με τη εναλλάξ γωνία ΓΑΔ. Και άρα η γωνία ΒΑΔ είναι ίση με τη ΓΑΔ. Άρα η γωνία ΒΑΓ έχει διχοτομηθεί από την ευθεία ΑΔ.

Άρα εάν η γωνία τριγώνου διχοτομηθεί η τέμνουσα ευθεία τέμνει τη γωνία και τη βάση, τα τμήματα της βάσης θα έχουν τον ίδιο λόγο όπως με τις λοιπές πλευρές του τριγώνου. Και εάν τα τμήματα της βάσης έχουν τον ίδιο λόγο με τις λοιπές πλευρές του τριγώνου, η ευθεία που ενώνει την κορυφή με τη τομή θα διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 4

Στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και κείτονται απέναντι των ίσων γωνιών ομόλογες .



Έστω ότι τα ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ έχουν την γωνία ΑΒΓ ίση με τη ΔΓΕ και τη ΒΑΓ με τη ΓΔΕ και ακόμη την ΑΓΔ ίση με τη ΓΕΔ. Λέγω ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ οι πλευρές περι τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και κείτονται απέναντι των ίσων γωνιών ομόλογες .

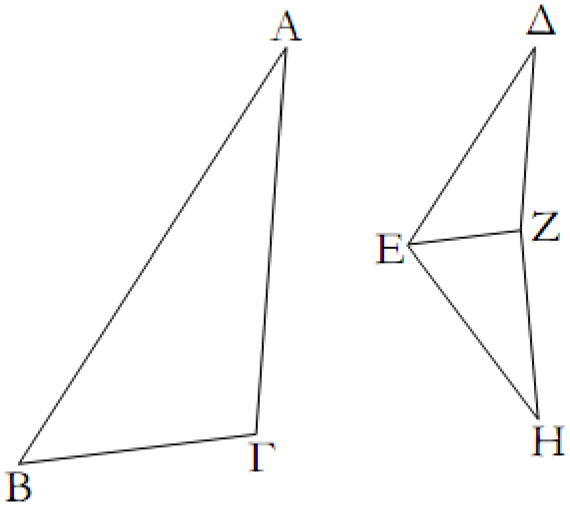
Ας κείται η ΒΓ σε ευθεία με τη ΓΕ. Και επειδή το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΓΒ είναι μικρότερο από δύο ορθές, και η ΑΓΒ είναι ίση με την ΔΕΓ, άρα το άθροισμα των ΑΒΓ, ΔΕΓ είναι μικρότερο από δύο ορθές. Άρα οι ΒΑ, ΕΔ που προεκτάθηκαν, θα συμπέσουν. Ας έχουν προεκταθεί και ας έχουν συμπέσει στο Ζ.

Και επειδή η γωνία ΔΓΕ είναι ίση με τη ΑΒΓ, η ΒΖ είναι παράλληλη στη ΓΔ. Πάλι επειδή η ΑΓΒ είναι ίση με τη ΔΕΓ,η ΑΓ είναι παράλληλη με τη ΖΕ. Άρα το ΖΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα η μεν ΖΑ ίση με τη ΔΓ, η δε ΑΓ με τη ΖΔ. Και επειδή η ΑΓ έχει αχθεί παράλληλα στη ΖΕ του τριγώνου ΖΒΕ, άρα όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΖ, έτσι και η ΒΓ προς το ΓΕ. Και η ΑΖ ίση με τη ΓΔ. Άρα όπως είναι η ΒΑ στη ΓΔ, έτσι η ΒΓ προς τη ΓΕ και εναλλάξ όπως η ΑΒ είναι προς την ΒΓ, έτσι η ΔΓ προς την ΓΕ. Πάλι , επειδή η ΓΔ είναι παράλληλη προς ΒΖ, άρα όπως η ΒΓ είναι προς ΓΕ, έτσι η ΖΔ προς τη ΔΕ .Η ΖΔ είναι ίση με τη ΑΓ, άρα όπως η ΒΓ είναι προς τη ΓΕ, έτσι η ΑΓ προς την ΔΕ και εναλλάξ όπως η ΒΓ είναι προς την ΓΑ, έτσι η ΓΕ προς την ΕΔ. Επειδή λοιπόν αποδείχθηκε ότι όπως η ΑΒ είναι προς τη ΒΓ, έτσι η ΔΓ προς την ΓΕ, και όπως η ΒΓ είναι προς τη ΓΑ έτσι η ΓΕ προς την ΕΔ, άρα εξ' ισότητας όπως η ΒΑ είναι προς την ΑΓ, έτσι η ΓΔ προς την ΔΕ.

Άρα στα ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και κείτονται απέναντι ίσων γωνιών ομόλογες .Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 5

Εάν δύο τρίγωνα έχουν ανάλογες τις πλευρές , τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που κείτονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές.



Έστω δύο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, όπως μεν τη ΑΒ προς την ΒΓ, έτσι τη ΔΕ προς την ΕΖ, όπως δε την ΒΓ προς την ΓΑ, έτσι τη ΕΖ προς την ΖΔ και ακόμη όπως τη ΒΑ προς την ΓΑ, έτσι τη ΕΔ προς την ΔΖ.Λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ και θα έχουν ίσες τις γωνίες που κείτονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές την μεν ΑΒΓ ίση με ΔΕΖ, την δε ΒΓΑ ίση με την ΕΖΔ και ακόμη την ΒΑΓ ίση με τη ΕΔΖ.

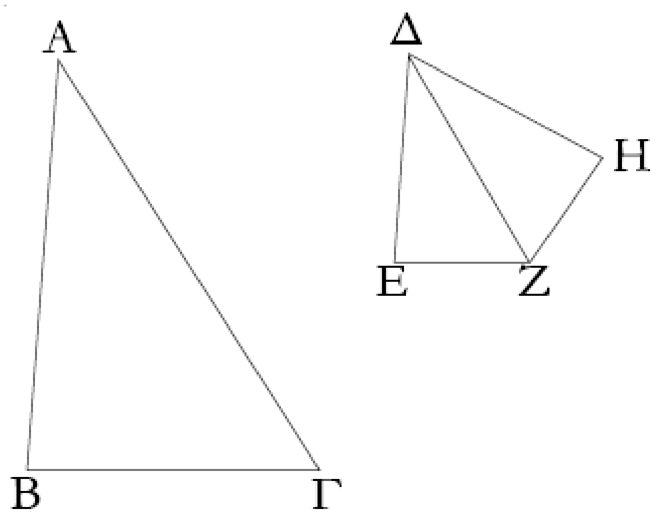
Διότι ας έχει κατασκευαστεί από την ευθεία ΕΖ και από τα σημεία της τα Ε, Ζ, η ΖΕΗ ίση με την μεν ΑΒΓ γωνία, η ΕΖΗ ίση με τη δε ΑΓΒ. Άρα,η λοιπή (γωνία) στο Α είναι ίση με τη λοιπή στο Η.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΕΗΖ. Άρα οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΕΗΖ πέρι τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και κείτονται απένατι από τις ίσες γωνίες ομόλογες .Άρα, όπως είναι η ΑΒ προς την ΒΓ, έτσι η ΗΕ προς την ΕΖ. Αλλά όπως η ΑΒ είναι προς την ΒΓ έτσι η ΔΕ προς την ΕΖ. Άρα όπως η ΔΕ είναι προς την ΕΖ, έτσι η ΗΕ προς την ΕΖ. Άρα κάθε μια από τις ΔΕ, ΗΕ έχει τον ίδιο λόγο προς τη ΕΖ. Άρα η ΔΕ είναι ίση στην ΗΕ. Λοιπόν από αυτά είναι και η ΔΖ ίση με την ΗΖ. Επειδή λοιπόν η ΔΕ είναι ίση με την ΕΗ, η ΕΖ κοινή, οι δύο ΔΕ, ΕΖ είναι ίσες με τις δύο ΗΕ, ΕΖ. Και η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΖΗ. Άρα η γωνία ΔΕΖ είναι ίση με την γωνία ΗΕΖ, και το ΔΕΖ τρίγωνο ίσο με το ΗΕΖ τρίγωνο και η λοιπές γωνίες ίσες με τις λοιπές γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές και η μεν ΔΖΕ γωνία είναι ίση με την ΗΖΕ, η δε ΕΔΖ με την ΕΗΖ. Και επειδή η ΖΕΔ είναι ίση με την ΗΕΖ ,αλλά η ΗΕΖ με την ΑΒΓ, άρα και η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την ΔΕΖ. Από αυτά είναι και η ΑΓΒ ίση με την ΔΖΕ, και ακόμη η γωνία στο Α ίση με αυτή στο Δ. Άρα είναι ισογώνιο το ΑΒΓ τρίγωνο με το ΔΕΖ τρίγωνο.

Άρα, εάν δύο τρίγωνα έχουν ανάλογες τις πλευρές,τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που κείτονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές.Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 6

Εάν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία και οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν τις γωνίες των οποίων οι ομόλογες πλευρές υποτείνονται, ίσες.



Έστω τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν την γωνία ΒΑΓ ίση με τη γωνία ΕΔΖ, οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, όπως η ΒΑ προς την ΑΓ έτσι η ΕΔ προς την ΔΖ. Λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ και θα έχουν τη γωνία ΑΒΓ ίση με τη ΔΕΖ και τη ΑΓΒ ίση με τη ΔΖΕ.

Ας έχει κατασκευαστεί λοιπόν, στην ευθεία ΔΖ και στα σημεία της Δ,Ζ γωνία ΖΔΗ ίση με καθεμία από τις γωνίες ΒΑΓ, ΕΔΖ. Η ΔΖΗ είναι ίση με την ΑΓΒ, άρα η λοιπή γωνία στο Β είναι ίση με την λοιπή γωνία στο Η.

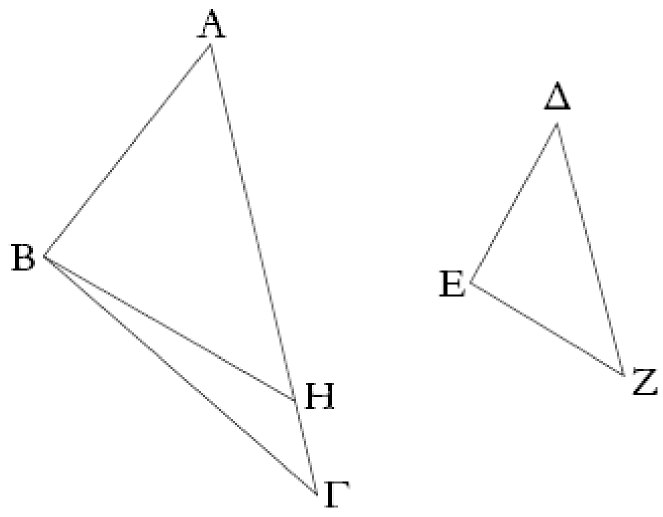
Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΗΖ, άρα ανάλογα όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ έτσι η ΗΔ είναι προς την ΔΖ και όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΓ έτσι η ΕΔ προς την ΔΖ, άρα και όπως η ΕΔ είναι προς την ΔΖ έτσι ΗΔ προς την ΔΖ. Άρα η ΕΔ ίση με την ΔΗ, και κοινή η ΔΖ.

Οι δύο ΕΔ, ΔΖ είναι ίσες με τις δύο ΗΔ, ΔΖ και η γωνία ΕΔΖ είναι ίση με τη γωνία ΗΔΖ άρα η βάση ΕΖ είναι ίση με τη βάση ΗΖ και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΗΔΖ και οι λοιπές γωνίες θα είναι ίσες με τις λοιπές γωνίες των οποίων οι πλευρές θα υποτείνονται. Άρα η γωνία ΔΖΗ είναι ίση με τη ΔΖΕ και η γωνία ΔΗΖ ίση με τη ΔΕΖ. Αλλά η γωνία ΔΖΗ είναι ίση με την ΑΓΒ και άρα η γωνία ΑΓΒ είναι ίση με την ΔΖΕ και η ΒΑΓ ίση με τη ΕΔΖ, άρα και η λοιπή στο Β είναι ίση με την λοιπή στο Ε. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Άρα εάν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία, τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες, τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν τις γωνίες, των οποίων οι αντίστοιχες πλευρές είναι υποτείνουσες, ίσες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 7

Εάν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία ,τις πλευρές περί τις άλλες γωνίες ανάλογες και κάθε μία από τις λοιπές γωνίες μικρότερη ή όχι μικρότερη της ορθής ,τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες περί των ανάλογων πλευρών.



Έστω τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ,ΔΕΖ που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία, τη ΒΑΓ με την ΕΔΖ, τις πλευρές περί τις άλλες γωνίες ΑΒΓ, ΔΕΖ ανάλογες, όπως την ΑΒ προς την ΒΓ, έτσι την ΔΕ προς την ΕΖ και αρχικά, καθεμία από τις λοιπές γωνίες στα Γ, Ζ, είναι μικρότερη της ορθής. Λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ, και η γωνία ΑΒΓ θα είναι ίση με την ΔΕΖ και δηλαδή η λοιπή γωνία στο Γ είναι ίση με τη γωνία στο Ζ.

Διότι αν η γωνία ΑΒΓ είναι άνιση με την ΔΕΖ ,μία από αυτές είναι μεγαλύτερη. Έστω ΑΒΓ η μεγαλύτερη. Και ας έχει κατασκευαστεί στην ευθεία ΑΒ από το σημείο Β η γωνία ΑΒΗ ίση με την ΔΕΖ.

Και επειδή η γωνία Α είναι ίση με τη Δ και η ΑΒΗ με την ΔΕΖ, άρα η λοιπή γωνία ΑΗΒ είναι ίση με την λοιπή ΔΖΕ, άρα το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ, άρα όπως είναι η ΑΒ προς την ΒΗ , έτσι η ΔΕ προς την ΕΖ , όπως η ΔΕ είναι προς την ΕΖ , έτσι η ΑΒ προς την ΒΓ. Άρα η ΑΒ προς καθένα από τα ΒΓ, ΒΗ έχει τον ίδιο λόγο. Άρα η ΒΓ είναι ίση με την ΒΗ ώστε και η γωνία στο Γ είναι ίση με την ΒΗΓ. Η γωνία στο Γ είναι μικρότερη της ορθής, άρα μικρότερη της ορθής είναι και η ΒΗΓ ώστε η εφεξής προς αυτή γωνία ΑΗΓ είναι μεγαλύτερη της ορθής και αποδείχθηκε ότι είναι ίση με τη γωνία στο Ζ. Άρα και η γωνία στο Ζ είναι μεγαλύτερη της ορθής και μικρότερη της ορθής ,το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν είναι άνιση η γωνία ΑΒΓ με την ΔΕΖ, άρα είναι ίση. Και η γωνία στο Α είναι ίση με αυτή στο Δ άρα και η λοιπή γωνία στο Γ είναι ίση με την λοιπή στο Ζ , άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

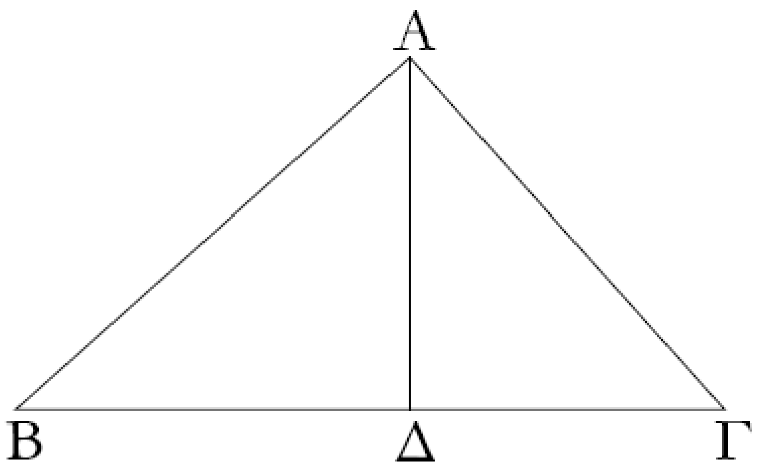
Αλλά έτσι πάλι ας είναι καθεμία από τις γωνίες στα Γ, Ζ όχι μικρότερη της ορθής. Λέγω πάλι ότι και έτσι είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ισογώνιο με το ΔΕΖ.

Από αυτά που έχουν κατασκευασθεί όμοια αποδεικνύουμε ότι η ΒΓ είναι ίση με τη ΒΗ, ώστε και η γωνία στο Γ είναι ίση με τη ΒΗ. Η γωνία στο Γ δεν είναι μικρότερη της ορθής , άρα ούτε η γωνία ΒΗΓ είναι μικρότερη της ορθής . Έτσι στο τρίγωνο ΒΗΓ οι δύο γωνίες δεν είναι μικρότερες από δύο ορθές, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα πάλι η γωνία ΑΒΓ δεν είναι άνιση με τη γωνία ΔΕΖ, άρα ίση. Είναι και η γωνία στο Α ίση με αυτή στο Δ, άρα η λοιπή γωνία στο Γ είναι ίση με την λοιπή στο Ζ, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Άρα αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία, τις πλευρές περί τις άλλες γωνίες ανάλογες, κάθε μία από τις λοιπές μικρότερη ή όχι μικρότερη της ορθής, τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και οι γωνίες περί των ανάλογων πλευρών είναι ίσες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 8

Εάν σε ορθογώνιο τρίγωνο έχει αχθεί από την ορθή γωνία κάθετος προς τη βάση, τα τρίγωνα περί την κάθετο είναι όμοια με το όλο και μεταξύ τους.



Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που έχει τη γωνία ΒΑΓ ορθή, και ας έχει αχθεί από το Α η ΑΔ κάθετη προς την ΒΓ. Λέγω ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ,ΑΔΓ είναι όμοια με το ΑΒΓ, και ακόμα, όμοια μεταξύ τους.

Επειδή λοιπόν, είναι ίση η γωνία ΒΑΓ με την ΑΔΒ, είναι ορθές, και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν κοινή τη γωνία στο Β, άρα η λοιπή γωνία ΑΓΒ είναι ίση με τη λοιπή ΒΑΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΒΔ. Άρα όπως είναι η ΒΓ υποτείνουσα της ορθής του τριγώνου ΑΒΓ προς την ΒΑ υποτείνουσα της ορθής του τριγώνου ΑΒΔ, έτσι η ΑΒ υποτείνουσα της γωνίας στο Γ του τριγώνου ΑΒΓ προς την ΒΔ υποτείνουσα της ίσης ΒΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ και ακόμα, η ΑΓ και η ΑΔ είναι υποτείνουσες προς την κοινή γωνία στο Β των δύο τριγώνων. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το ΑΒΔ και έχουν τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΔ. Ομοίως λοιπόν αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΔΓ. Άρα καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοιο με το όλο ΑΒΓ.

Λέγω ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι και μεταξύ τους όμοια.

Επειδή λοιπόν, η ορθή ΒΔΑ είναι ίση με την ορθή ΑΔΓ, αλλά όμως και η γωνία ΒΑΔ αποδείχθηκε ίση με τη γωνία στο Γ, άρα και η λοιπή στο Β είναι ίση με τη λοιπή ΔΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισογώνιο με το ΑΔΓ τρίγωνο . Άρα όπως είναι η ΒΔ υποτείνουσα της γωνίας ΒΑΔ στο τρίγωνο ΑΒΔ, στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΑ είναι υποτείνουσα της γωνίας στο Γ που είναι ίση με τη γωνία ΒΑΔ. Έτσι η ΑΔ είναι υποτείνουσα της γωνίας στο Β στο τρίγωνο ΑΒΔ. Στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΓ είναι υποτείνουσα της γωνίας ΔΑΓ που είναι ίση με τη γωνία στο Β, και ακόμα η ΒΑ προς την ΑΓ υποτείνουσες των ορθών, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΔΓ.

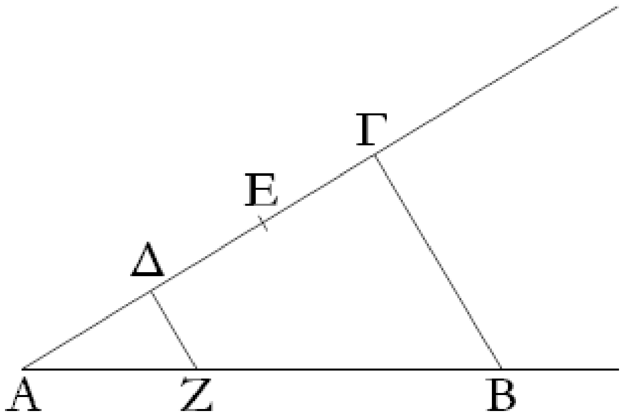
Άρα αν σε ορθογώνιο τρίγωνο από την ορθή γωνία έχει αχθεί κάθετος προς τη βάση, τα τρίγωνα περί την κάθετο είναι όμοια με το όλο και μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ.

Πόρισμα

Από αυτό λοιπόν είναι φανερό ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο από την ορθή γωνία αχθεί κάθετος στη βάση, η αχθείσα είναι μέση ανάλογος των τμημάτων της βάσης. ΟΕΔ.

Πρόταση 9

Να αφαιρεθεί το προκαθορισμένο μέρος της δοθείσης ευθείας.



Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ, πρέπει λοιπόν να αφαιρεθεί το προκαθορισμένο μέρος της ΑΒ.

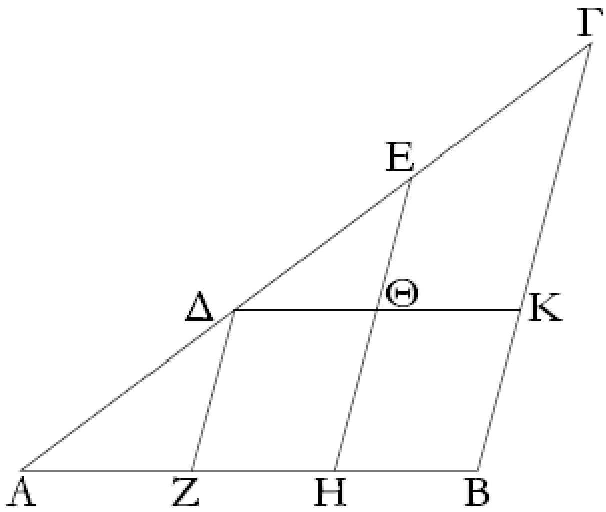
Ας έχει λοιπόν προκαθοριστεί το τρίτο μέρος. Και ας διέρχεται από το Α , ευθεία ΑΓ που να περιέχει τυχαία γωνία με την ΑΒ και ας έχει ληφθεί τυχαίο σημείο Δ επί της ΑΓ και ας κείνται τα ΔΕ,ΕΓ ίσα με την ΑΔ και ας έχει ενωθεί η ΒΓ. Και από το Δ ας αχθεί παράλληλη προς αυτή, η ΔΖ.

Επειδή λοιπόν, η ΖΔ έχει αχθεί παράλληλη προς μία από τις πλευρές ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα όπως είναι ανάλογη η ΓΔ προς την ΔΑ, έτσι η ΒΖ προς την ΖΑ, διπλάσια η ΓΔ της ΔΑ, άρα διπλάσια και η ΒΖ της ΖΑ, άρα τριπλάσια η ΒΑ της ΑΖ.

Άρα το προκαθορισμένο τρίτο μέρος ΑΖ αφαιρείται από τη δοθείσα ευθεία ΑΒ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 10

Να τμηθεί η δοθείσα άτμητη ευθεία όμοια με τη δοθείσα τετμημένη.



Έστω η μεν άτμητη δοθείσα ευθεία η ΑΒ, η δε τετμημένη η ΑΓ στα σημεία Δ, Ε και ας κείνται ώστε να περιέχουν τυχαία γωνία, και ας έχει ενωθεί η ΓΒ. Και από τα Δ, Ε ας έχουν αχθεί οι ΔΖ, ΕΗ παράλληλες προς τη ΒΓ, και από το Δ ας έχει αχθεί παράλληλη της ΑΒ η ΔΘΚ.

Άρα το καθένα από τα ΖΘ, ΘΒ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα η μεν ΔΘ είναι ίση με τη ΖΗ, η δε ΘΚ με την ΗΒ. Και επειδή η ευθεία ΘΕ έχει αχθεί παράλληλη προς μία πλευρά ΚΓ του τριγώνου ΔΚΓ, άρα όπως είναι ανάλογη η ΓΕ προς την ΕΔ έτσι η ΚΘ προς την ΘΔ, ίση η μεν ΚΘ με τη ΒΗ, η δε ΘΔ με την ΗΖ. Άρα όπως είναι η ΓΕ προς την ΕΔ έτσι η ΒΗ προς την ΗΖ. Πάλι επειδή έχει αχθεί η ΖΔ παράλληλη προς μία πλευρά ΗΕ του τριγώνου ΑΗΕ, άρα όπως είναι ανάλογη η ΕΔ προς την ΔΑ έτσι η ΗΖ προς την ΖΑ. Και αποδείχθηκε όπως είναι η ΓΕ προς την ΕΔ, έτσι η ΒΗ προς την ΗΖ. Άρα όπως είναι η μεν ΓΕ προς την ΕΔ έτσι η ΒΗ προς την ΗΖ, όπως δε η ΕΔ προς την ΔΑ, έτσι η ΗΖ προς τη ΖΑ.

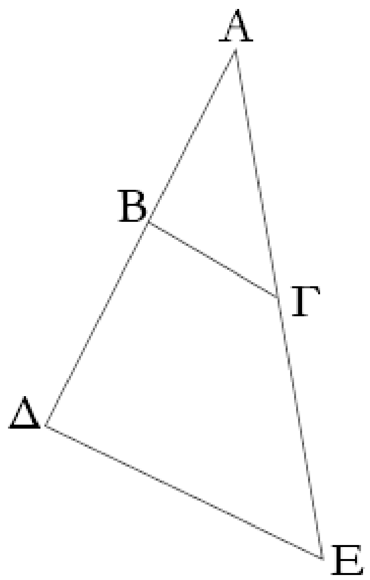
Άρα η άτμητη δοθείσα ευθεία ΑΒ έχει τμηθεί όμοια με την δοθείσα τετμημένη ΑΓ. ΟΕΠ.

Πρόταση 11

Δύο δοθεισών ευθειών να βρεθεί τρίτη ανάλογη.

Έστω δοθείσες δύο ευθείες ΒΑ,ΑΓ και ας κείνται σε τυχούσα περιεχόμενη γωνία. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί τρίτη ανάλογη των ΒΑ, ΑΓ. :Ας έχουν προεκταθεί στα σημεία Δ, Ε και ας είναι η ΒΔ ίση με την ΑΓ , και ας έχει ενωθεί η ΒΓ, και από το Δ ας έχει αχθεί η ΔΕ παράλληλη αυτής.

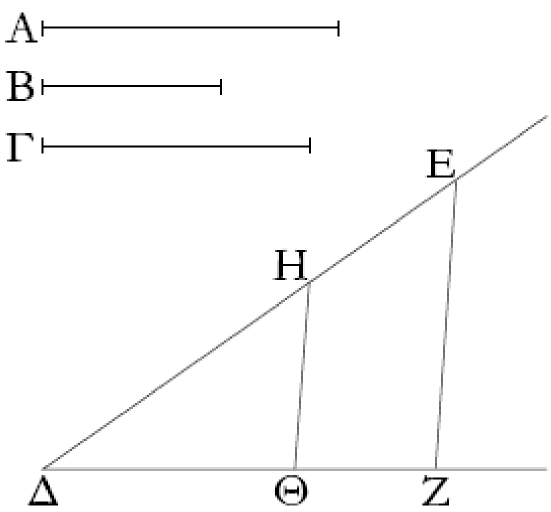
Επειδή λοιπόν η ΒΓ έχει αχθεί παράλληλη προς μία των πλευρών, την ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ, όπως είναι ανάλογη η ΑΒ προς την ΒΔ, έτσι είναι η ΑΓ προς την ΓΕ. Ίση δε η ΒΔ με την ΑΓ. Άρα όπως είναι η ΑΒ προς την ΑΓ, έτσι η ΑΓ προς την ΓΕ.



Άρα δύο δοθεισών ευθειών των ΑΒ,ΑΓ τρίτη ανάλογη προς αυτές έχει βρεθεί η ΓΕ. ΟΕΠ.

Πρόταση 12

Να βρεθεί τέταρτη ανάλογη των τριών δοθέντων ευθειών.



Έστω οι τρεις δοθείσες ευθείες Α,Β,Γ. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί τέταρτη ανάλογη των Α,Β,Γ.

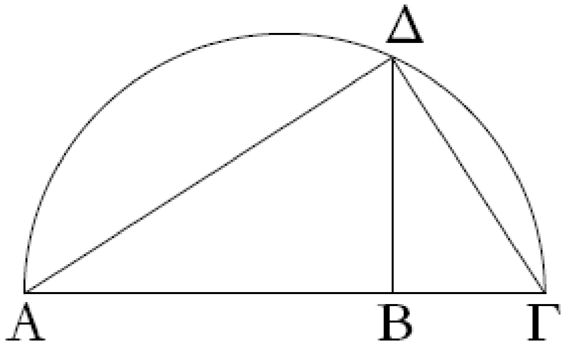
Ας κείνται δύο ευθείες οι ΔΕ, ΔΖ που περιέχουν την τυχαία γωνία ΕΔΖ και ας κείται η ΔΗ ίση με την Α, η ΗΕ ίση με την Β και ακόμα η ΔΘ ίση με τη Γ. Και ας ενωθεί η ΗΘ και ας έχει αχθεί παράλληλη προς την ΗΘ από το σημείο Ε, την ΕΖ.

Επειδή λοιπόν η ΗΘ έχει αχθεί παράλληλη προς μία πλευρά του τριγώνου ΔΕΖ, την ΕΖ, άρα όπως είναι η ΔΗ προς την ΗΕ έτσι η ΔΘ προς την ΘΖ. Ίση η ΔΗ με την Α, η ΗΕ με τη Β, η ΔΘ με τη Γ. Άρα όπως είναι η Α προς την Β έτσι η Γ προς τη ΘΖ.

Άρα από τρεις δοθείσες ευθείες Α,Β,Γ έχει βρεθεί τέταρτη ανάλογη η ΘΖ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 13

Να βρεθεί μέση ανάλογος δύο δοθεισών ευθειών.



Έστω οι δύο δοθείσες ευθείες ΑΒ, ΒΓ. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί μέση ανάλογος των ΑΒ, ΒΓ.

Ας κείνται σε ευθεία, και ας έχει γραφεί ημικύκλιο επί της ΑΓ , το ΑΔΓ, και ας έχει αχθεί ορθή ευθεία από το σημείο Β της ΑΓ την ΒΑ και ας έχουν ενωθεί οι ΑΔ, ΔΓ.

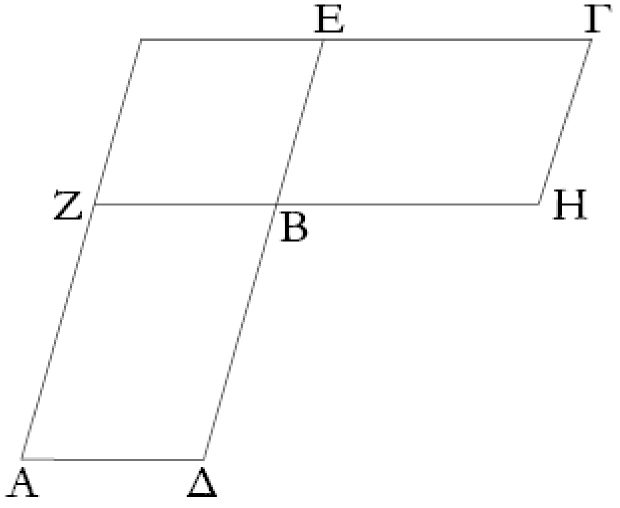
Επειδή η ΑΔΓ γωνία είναι σε ημικύκλιο, είναι ορθή. Και επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ από την ορθή γωνία προς τη βάση έχει αχθεί κάθετος η ΔΒ , άρα η ΔΒ είναι μέση ανάλογος των τμημάτων της βάσης των ΑΒ, ΒΓ.

Άρα έχει βρεθεί η ΔΒ η μέση ανάλογος των δοθεισών ευθειών ΑΒ,ΒΓ . Ο.Ε.Π.

Πρόταση 14

Οι πλευρές των ίσων και ισογώνιων παραλληλογράμμων περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, και εκείνα των ισογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα.

Έστω τα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒ , ΒΓ που έχουν στο Β τις γωνίες ίσες και ας κείνται πάνω σε ευθεία οι ΔΒ, ΒΕ. Άρα και οι ΖΒ,ΒΗ θα είναι πάνω σε ευθεία. Λέγω ότι οι πλευρές των ΑΒ,ΒΓ περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες δηλαδή ότι είναι όπως η ΔΒ προς την ΒΕ έτσι η ΗΒ προς την ΒΖ.



Ας έχει συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο ΖΕ. Επειδή λοιπόν το παραλληλόγραμμο ΑΒ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΒΓ, και ΖΕ είναι ένα άλλο, άρα όπως είναι το ΑΒ προς το ΖΕ έτσι το ΒΓ προς το ΖΕ. Αλλά όπως είναι το ΑΒ προς το ΖΕ έτσι είναι η ΔΒ προς την ΒΕ και όπως το ΒΓ προς το ΖΕ έτσι η ΗΒ προς τη ΒΖ. Και άρα όπως η ΔΒ είναι προς την ΒΕ, έτσι η ΗΒ προς την ΒΖ. Άρα οι πλευρές των ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Έστω ότι όπως η ΔΒ είναι προς την ΒΕ έτσι η ΗΒ προς την ΒΖ. Λέγω ότι το ΑΒ παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το ΒΓ παραλληλόγραμμο.

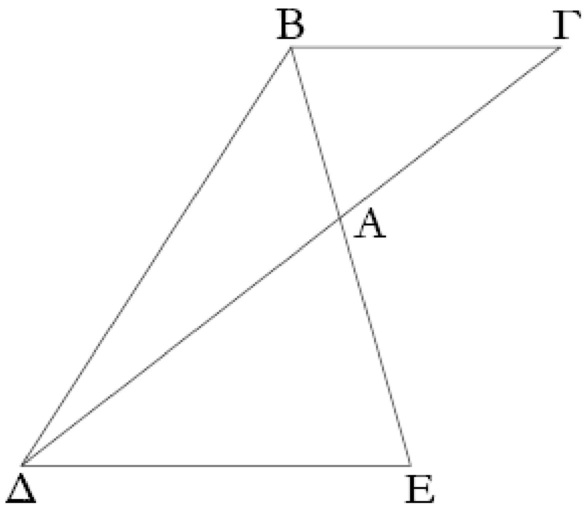
Διότι, επειδή όπως είναι η ΔΒ προς την ΒΕ έτσι η ΗΒ προς την ΒΖ , αλλά και όπως η ΔΒ προς την ΒΕ έτσι το ΑΒ παραλληλόγραμμο προς το ΖΕ παραλληλόγραμμο, και όπως η ΗΒ προς την ΒΖ έτσι το ΒΓ παραλληλόγραμμο προς το ΖΕ παραλληλόγραμμο και άρα, όπως το ΑΒ προς το ΖΕ έτσι το ΒΓ προς το ΖΕ. Άρα το ΑΒ παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το ΒΓ παραλληλόγραμμο.

Άρα στα ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και εκείνα τα ισογώνια παραλληλόγραμμα των οποίων οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 15

Σε ίσα τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και σε εκείνα τα τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία και τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες , είναι ίσα.

Έστω ίσα τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΑΔΕ που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία την ΒΑΓ με την ΔΑΕ. Λέγω ότι των ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, δηλαδή ότι όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ έτσι η ΕΑ προς την ΑΒ.



Διότι ας κείνται σε ευθεία οι ΓΑ, ΑΔ. Άρα και οι ΕΑ, ΑΒ είναι πάνω σε ευθεία και ας έχει ενωθεί η ΒΔ.

Επειδή λοιπόν το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ίσο με το ΑΔΕ τρίγωνο, και το ΒΑΔ είναι ένα άλλο τρίγωνο, άρα όπως το ΓΑΒ τρίγωνο είναι προς το ΒΑΔ τρίγωνο έτσι το ΕΑΔ τρίγωνο προς το ΒΑΔ τρίγωνο. Αλλά όπως το ΓΑΒ είναι προς το ΒΑΔ έτσι η ΓΑ προς την ΑΔ , όπως το ΕΑΔ είναι προς το ΒΑΔ έτσι η ΕΑ προς την ΑΒ. Και άρα όπως η ΓΑ είναι προς την ΑΔ έτσι η ΕΑ προς την ΑΒ. Άρα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Ας είναι αντιστρόφως ανάλογες οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ, και έστω ότι όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ, έτσι η ΕΑ είναι προς την ΑΒ. Λέγω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΔΕ.

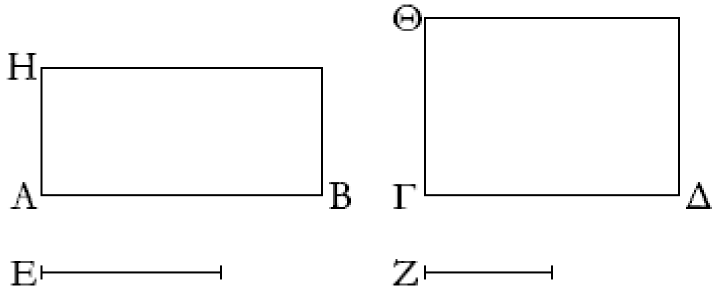
Διότι, αφού ενωθεί πάλι η ΒΔ , επειδή όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ έτσι και η ΕΑ προς την ΑΒ, αλλά όπως είναι η ΓΑ προς την ΑΔ έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΒΑΔ όπως η ΕΑ είναι προς την ΑΒ έτσι το ΕΑΔ τρίγωνο προς το ΒΑΔ τρίγωνο, άρα όπως το ΑΒΓ τρίγωνο προς το ΒΑΔ τρίγωνο έτσι το ΕΑΔ τρίγωνο προς το ΒΑΔ τρίγωνο. Άρα καθένα από τα ΑΒΓ, ΕΑΔ έχει τον ίδιο λόγο προς το ΒΑΔ. Άρα το ΑΒΓ [τρίγωνο] είναι ίσο με το ΕΑΔ τρίγωνο.

Άρα σε ίσα τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία, οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και εκείνα τα τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία και τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 16

Εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις μέσεσ και αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις μέσες , οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες.

Ας είναι τέσσερις ανάλογες ευθείες οι ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, όπως η ΑΒ είναι προς την ΓΔ έτσι η Ε προς την Ζ. Λέγω ότι το ορθογώνιο που περιέχεται υπό τις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΔ, Ε.



Διότι ας έχουν αχθεί από τα σημεία Α ,Γ κάθετοι οι ΑΗ, ΓΘ στις ευθείες ΑΒ, ΓΔ, και ας κείται η ΑΗ ίση με την Ζ , η ΓΘ ίση με την Ε. Και ας έχουν συμπληρωθεί τα ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Και επειδή είναι όπως η ΑΒ προς την ΓΔ έτσι η Ε προς την Ζ , ίση η Ε με τη ΓΘ και η Ζ με την ΑΗ, άρα είναι όπως η ΑΒ προς την ΓΔ έτσι η ΓΘ προς την ΑΗ. Άρα των ΒΗ, ΔΘ παραλληλογράμμων οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Και εκείνα τα ισογώνια παραλληλόγραμμα που οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες είναι ίσα. Άρα το ΒΗ παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το ΔΘ παραλληλόγραμμο. Και το ΒΗ είναι αυτό που περιέχεται από τις ΑΒ, Ζ, διότι η ΑΗ ίση με την Ζ . Και το ΔΘ περιέχεται από τις ΓΔ,Ε, διότι η Εείναι ίση με τη ΓΘ. Άρα το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΔ ,Ε.

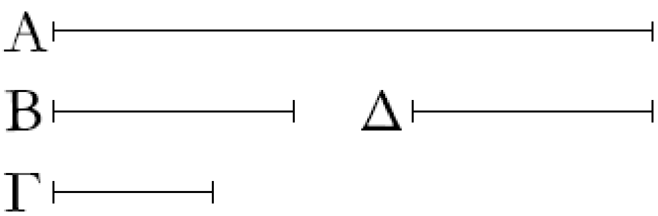
Έστω ότι το ορθογώνιο που περιέχεται σπό τις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΔ, Ε. Λέγω ότι οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες όπως η ΑΒ είναι προς την ΓΔ έτσι η Ε είναι προς την Ζ.

Διότι όπως κατασκευάστηκαν, επειδή το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΒ, Ζ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΔ,Ε και αυτό που περιέχεται από τις ΑΒ,Ζ είναι το ΒΗ διότι η ΑΗ είναι ίση με την Ζ και αυτό που περιέχεται από τις ΓΔ ,Ε είναι το ΔΘ διότι η ΓΘ ίση με την Ε. Άρα το ΒΗ είναι ίσο με το ΔΘ και είναι ισογώνια. Των ίσων και ισογωνίων παραλληλογράμμων οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Άρα είναι όπως η ΑΒ προς την ΓΔ έτσι η ΓΘ προς την ΑΗ. Και η ΓΘ είναι ίση με την Ε και η ΑΗ ίση με την Ζ. Άρα είναι όπως η ΑΒ προς την ΓΔ έτσι η Ε προς την Ζ.

Άρα εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις μέσες. Και αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις μέσες, οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 17

Εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το τετράγωνο της μέσης. Και αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το τετράγωνο της μέσης, οι τρεις ευθείες θα είναι ανάλογες.



Ας είναι τρεις ευθείες ανάλογες οι Α, Β, Γ όπως η Α προς την Β, έτσι η Β προς την Γ. Λέγω ότι το ορθογώνιο που περιέχεται *από τις* Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο της Β.

Ας κείται η Δ ίση με την Β.

Και επειδή είναι όπως η Α προς την Β έτσι η Β προς τη Γ , και η Β ίση με την Δ, άρα είναι όπως η Α προς την Β, έτσι η Δ προς την Γ. Εάν οι τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις μέσες. Άρα αυτό από τις Α, Γ είναι ίσο με αυτό από τις Β, Δ. Αλλά το από τις Β, Δ είναι το (τετράγωνο) της Β. Διότι η Β είναι ίση με την Δ, άρα το ορθογώνιο που περιέχεται από τις Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο της Β.

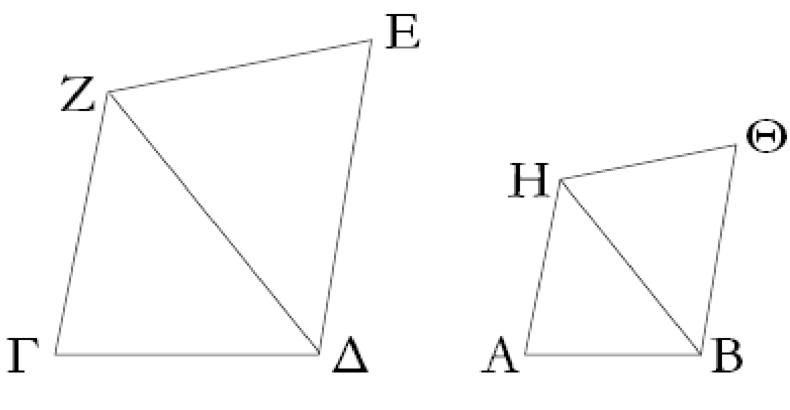
Έστω ότι το από τις Α, Γ ίσο με το τετράγωνο της Β. Λέγω ότι είναι όπως το Α προς την Β, έτσι η Β προς την Γ.

Διότι όπως αυτά κατασκευάστηκαν, επειδή το ορθογώνιο από τις Α, Γ είναι ίσο με το τετράγωνο της Β, αλλά αυτό της Β είναι το ορθογώνιο το από τις Β, Δ, διότι η Β ίση με την Δ. Άρα το από τις Α, Γ είναι ίσο με το από τις Β, Δ. Εάν το από τις άκρες είναι ίσο με το από τις μέσες, οι τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες. Άρα είναι όπως η Α προς την Β, έτσι η Δ προς την Γ. Και η Β ίση με την Δ. Άρα όπως η Α προς την Β έτσι η Β προς την Γ.

Άρα εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το τετράγωνο της μέσης. Και αν το ορθογώνιο που περιέχεται από τις άκρες είναι ίσο με το τετράγωνο της μέσης οι τρεις ευθείες θα είναι ανάλογες. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 18

Στην δοθείσα ευθεία να γραφεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.



Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ , ΓΕ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Πρέπει λοιπόν στην ευθεία ΑΒ να γραφεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το ευθύγραμμο σχήμα ΓΕ.

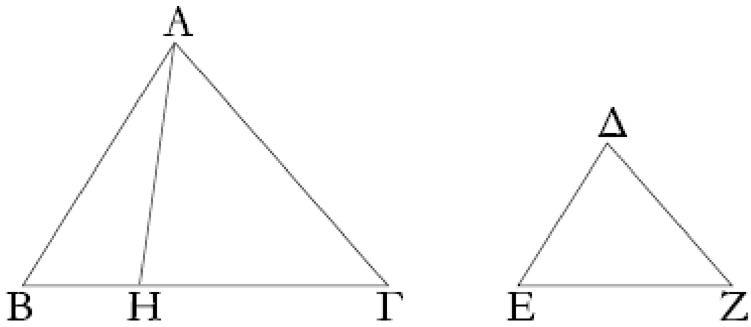
Ας έχει ενωθεί η ΔΖ, και ας έχει κατασκευασθεί προς την ευθεία ΑΒ, και από τα σημεία της Α, Β η ΗΑΒ ίση με την γωνία Γ και η ΑΒΗ ίση με την ΓΔΖ. Άρα η λοιπή ΓΖΔ είναι ίση με την ΑΗΒ. Άρα το τρίγωνο ΖΓΔ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΗΑΒ. Άρα είναι ανάλογη όπως η ΖΔ προς την ΗΒ, έτσι η ΖΓ προς την ΗΑ, και η ΓΔ προς την ΑΒ. Πάλι ας έχει κατασκευασθεί προς την ευθεία ΒΗ και από τα σημεία της, Β,Η η ΒΗΘ ίση με την γωνία ΔΖΕ και η ΗΒΘ ίση με την ΖΔΕ. Άρα η λοιπή στο Ε είναι ίση με την λοιπή στο Θ. Άρα το ΖΔΕ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΗΘΒ.

Άρα είναι ανάλογη όπως η ΖΔ προς την ΗΒ έτσι η ΖΕ προς την ΗΘ και η ΕΔ προς την ΘΒ. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι και όπως η ΖΔ είναι προς την ΗΒ, έτσι η ΖΓ προς την ΗΑ και η ΓΔ προς την ΑΒ. Άρα και όπως η ΖΓ είναι προς την ΑΗ, έτσι και η ΓΔ προς την ΑΒ και η ΖΕ προς την ΗΘ και ακόμη η ΕΔ προς την ΘΒ. Και επειδή η γωνία ΓΖΔ είναι ίση με την ΑΗΒ, και η ΔΖΕ με την ΒΗΘ, άρα όλη η ΓΖΕ είναι ίση με όλη την ΑΗΘ. Από αυτά λοιπόν και η ΓΔΕ είναι ίση με την ΑΒΘ είναι και η (γωνία) στο Γ ίση με αυτήν στο Α , και η (γωνία) στο Ε με αυτή στο Θ. Άρα το ΑΘ είναι ισογώνιο με το ΓΕ. Και έχουν τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες. Άρα το ευθύγραμμο σχήμα ΑΘ είναι όμοιο με το ευθύγραμμο σχήμα ΓΕ.

Άρα στην δοθείσα ευθεία ΑΒ έχει γραφεί το ευθύγραμμο σχήμα ΑΘ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το δοθέν ευθύγραμμο ΓΕ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 19

Τα όμοια τρίγωνα είναι μεταξύ τους σε διπλάσιο λόγο από τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους.



Έστω όμοια τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν την γωνία στο Β ίση με αυτή στο Ε, και όπως η ΑΒ είναι προς την ΒΓ, έτσι η ΔΕ προς την ΕΖ, ώστε η ΒΓ να είναι ομόλογη προς την ΕΖ. Λέγω ότι το ΑΒΓ τρίγωνο προς το ΔΕΖ τρίγωνο έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΒΓ προς την ΕΖ.

Διότι ας έχει ληφθεί τρίτη ευθεία ΒΗ ανάλογη των ΒΓ, ΕΖ, ώστε να είναι όπως η ΒΓ προς την ΕΖ έτσι η ΕΖ προς την ΒΗ. Και ας έχει ενωθεί η ΑΗ.

Επειδή λοιπόν είναι όπως η ΑΒ προς την ΒΓ, έτσι η ΔΕ προς την ΕΖ, άρα εναλλάξ είναι όπως η ΑΒ προς την ΔΕ έτσι η ΒΓ προς την ΕΖ. Αλλά όπως η ΒΓ προς την ΕΖ έτσι είναι η ΕΖ προς την ΒΗ, και άρα όπως η ΑΒ προς την ΔΕ έτσι η ΕΖ προς την ΒΗ. Άρα οι πλευρές, των τριγώνων ΑΒΗ, ΔΕΖ , περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Τα τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία και τις πλευρές, περί τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, είναι ίσα. Άρα το ΑΒΗ τρίγωνο είναι ίσο με το ΔΕΖ. Και επειδή είναι όπως η ΒΓ προς την ΕΖ, έτσι η ΕΖ προς την ΒΗ, και αν τρεις ευθείες είναι ανάλογες η πρώτη προς την τρίτη έχει διπλάσιο λόγο όπως προς τη δεύτερη., άρα η ΒΓ προς την ΒΗ έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΓΒ προς την ΕΖ. Και όπως η ΓΒ προς την ΒΗ, έτσι το ΑΒΓ τρίγωνο προς το ΑΒΗ τρίγωνο. Άρα και το ΑΒΓ τρίγωνο προς το ΑΒΗ έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΒΓ προς την ΕΖ και το ΑΒΗ τρίγωνο είναι ίσο με το ΔΕΖ τρίγωνο , άρα και ΑΒΓ τρίγωνο προς το ΔΕΖ τρίγωνο έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΒΖ προς την ΕΖ.

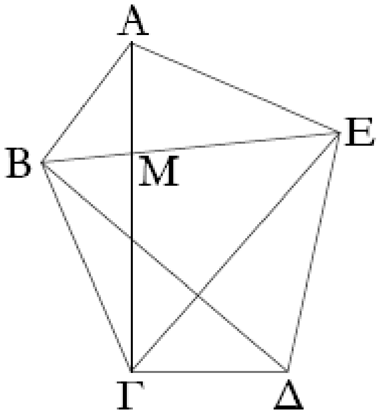
Άρα τα όμοια τρίγωνα είναι μεταξύ τους σε διπλάσιο λόγο από τον λόγο των ομολόγων πλευρών τους. Ο.Ε.Δ.

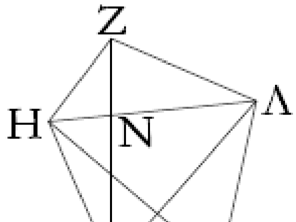
Πόρισμα

Από αυτό είναι φανερό, ότι εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη, έτσι το από την πρώτη είναι όμοιο και ομοίως αναγραφόμενο από την δεύτερη. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 20

Τα όμοια πολύγωνα διαιρούνται σε ίσο αριθμό ομοίων τριγώνων, ομόλογα με τα ολόκληρα, και το πολύγωνο προς το πολύγωνο έχει διπλάσιο λόγο, όπως η ομόλογη πλευρά προς την ομόλογη πλευρά .





Έστω όμοια πολύγωνα τα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ και έστω ΑΒ ομόλογη με την ΖΗ. Λέγω ότι τα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα διαιρούνται σε όμοια τρίγωνα, ίσα το πλήθος και ομόλογα με τα ολόκληρα, και το ΑΒΓΔΕ πολύγωνο προς το ΖΗΘΚΛ έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΑΒ προς την ΖΗ.

Ας έχουν ενωθεί οι ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Και επειδή το ΑΒΓΔΕ πολύγωνο είναι όμοιο με το ΖΗΘΚΛ πολύγωνο, είναι ίση η ΒΑΕ γωνία με την ΗΖΛ. Και όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΕ έτσι η ΗΖ προς την ΖΛ. Επειδή λοιπόν, τα ΑΒΕ, ΖΗΛ είναι δύο τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση με μία γωνία και τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες, άρα το ΑΒΕ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΖΗΛ . Ώστε είναι και όμοιο. Άρα η ΑΒΕ γωνία είναι ίση με την ΖΗΛ. Και όλη η ΑΒΓ είναι ίση με όλη την ΖΗΘ, από την ομοιότητα των πολυγώνων. Άρα η λοιπή ΕΒΓ γωνία είναι ίση με την ΛΗΘ. Και επειδή λόγω της ομοιότητας των ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων είναι όπως ΕΒ προς την ΒΑ έτσι η ΛΗ προς την ΗΖ αλλά όμως λόγω της ομοιότητας των πολυγώνων είναι όπως η ΑΒ προς την ΒΓ, έτσι η ΖΗ προς την ΗΘ άρα λόγω ισότητας είναι όπως η ΕΒ προς την ΒΓ έτσι η ΛΗ προς την ΗΘ και οι πλευρές περί τις γωνίες ΕΒΓ , ΛΗΘ είναι ανάλογες. Άρα το ΕΒΓ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το ΛΗΘ τρίγωνο. Ώστε και το τρίγωνο ΕΒΓ είναι όμοιο με το ΛΗΘ τρίγωνο. Για τους ίδιους λόγους το ΕΓΔ τρίγωνο είναι όμοιο με το ΛΘΚ τρίγωνο. Άρα τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ διαιρούνται σε όμοια τρίγωνα και σε ίσα το πλήθος.

Λέγω ότι τα τρίγωνα είναι ομόλογα με τα ολόκληρα, δηλαδή τα τρίγωνα είναι ανάλογα, και ηγούμενα είναι τα ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ και τα επόμενα απ' αυτά τα ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ και ότι το ΑΒΓΔΕ πολύγωνο προς το ΖΗΘΚΛ πολύγωνο έχει διπλάσιο λόγο όπως η ομόλογη πλευρά προς την ομόλογη πλευρά δηλαδή η ΑΒ προς την ΖΗ.

Διότι ας έχουν ενωθεί οι ΑΓ, ΖΘ και επειδή λόγω της ομοιότητας των πολυγώνων η ΑΒΓ γωνία είναι ίση με την ΖΗΘ, και είναι όπως η ΑΒ προς την ΒΓ έτσι η ΖΗ προς την ΗΘ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το ΖΗΘ τρίγωνο. Άρα είναι ίση η ΒΑΓ γωνία με την ΗΖΘ, και η ΒΓΑ με την ΗΘΖ. Και επειδή είναι ίση η ΒΑΜ γωνία με την ΗΖΝ , είναι και η ΑΒΜ ίση με την ΖΗΝ , άρα και η λοιπή ΑΜΒ είναι ίση με την λοιπή ΖΝΗ. Άρα το ΑΒΜ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το ΖΗΝ τρίγωνο. Όμοια αποδεικνύουμε ότι το ΒΜΓ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το ΗΝΘ τρίγωνο. Άρα ανάλογη είναι όπως η ΑΜ προς την ΜΒ έτσι η ΖΝ προς την ΝΗ , και όπως η ΒΜ προς την ΜΓ, έτσι η ΗΝ προς την ΝΘ. Ώστε εξ' ισότητας όπως η ΑΜ είναι προς την ΜΓ , έτσι η ΖΝ είναι προς ΝΘ. Αλλά όπως η ΑΜ είναι προς ΜΓ, έτσι το ΑΒΜ τρίγωνο είναι προς το ΜΒΓ, και το ΑΜΕ προς το ΕΜΓ. Διότι είναι μεταξύ τους όπως οι βάσεις. Και άρα όπως και των ηγουμένων προς των επομένων έτσι είναι όλων των ηγουμένων προς όλων των επόμενων. Άρα όπως το ΑΜΒ τρίγωνο προς το ΒΜΓ, έτσι το ΑΒΕ προς το ΓΒΕ. Αλλά όπως το ΑΜΒ είναι προς το ΒΜΓ, έτσι η ΑΜ προς την ΜΓ. Και άρα όπως η ΑΜ είναι προς ΜΓ, έτσι το ΑΒΕ τρίγωνο είναι προς το ΕΒΓ τρίγωνο.

Γι’ αυτούς τους λόγους λοιπόν είναι και όπως η ΖΝ προς την ΝΘ, έτσι το ΖΗΛ τρίγωνο προς το ΗΛΘ τρίγωνο. Και είναι όπως η ΑΜ προς ΜΓ, έτσι η ΖΝ προς ΝΘ. Άρα και όπως το ΑΒΕ τρίγωνο είναι προς το ΒΕΓ τρίγωνο, έτσι το ΖΗΛ τρίγωνο προς το ΗΛΘ τρίγωνο, και εναλλάξ, όπως το ΑΒΕ τρίγωνο είναι προς το ΖΗΛ τρίγωνο, έτσι το ΒΕΓ τρίγωνο είναι προς το ΗΛΘ τρίγωνο. Όμοια αποδεικνύουμε ενώνοντας τα ΒΔ, ΗΚ, ότι όπως το ΒΕΓ τρίγωνο είναι προς το ΛΗΘ τρίγωνο, έτσι και το ΕΓΔ τρίγωνο είναι προς το ΛΘΚ τρίγωνο. Και επειδή όπως το ΑΒΕ τρίγωνο είναι προς το ΖΗΛ τρίγωνο, έτσι το ΕΒΓ είναι προς το ΛΗΘ και ακόμη το ΕΓΔ είναι προς το ΛΘΚ , και άρα όπως τα ηγούμενα προς τα επόμενα έτσι όλα τα ηγούμενα προς όλα τα επόμενα. Άρα είναι όπως το ΑΒΕ τρίγωνο είναι προς το ΖΗΛ τρίγωνο, έτσι το ΑΒΓΔΕ πολύγωνο είναι προς το ΖΗΘΚΛ πολύγωνο. Αλλά το ΑΒΕ τρίγωνο προς το ΖΗΛ τρίγωνο έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΑΒ ομόλογος πλευρά είναι προς την ΖΗ ομόλογο πλευρά.

Διότι τα όμοια τρίγωνα έχουν διπλάσιο λόγο από των ομόλογων πλευρών. Άρα και το ΑΒΓΔΕ πολύγωνο προς το ΖΗΘΚΛ πολύγωνο έχει διπλάσιο λόγο όπως η ΑΒ ομόλογος πλευρά προς την ΖΗ ομόλογο πλευρά.

Άρα τα όμοια πολύγωνα διαιρούνται σε όμοια τρίγωνα, σε ίσα το πλήθος και ομόλογα με τα ολόκληρα, και το πολύγωνο προς το πολύγωνο έχει διπλάσιο λόγο όπως η ομόλογη πλευρά προς την ομόλογη πλευρά. Ο.Ε.Δ.

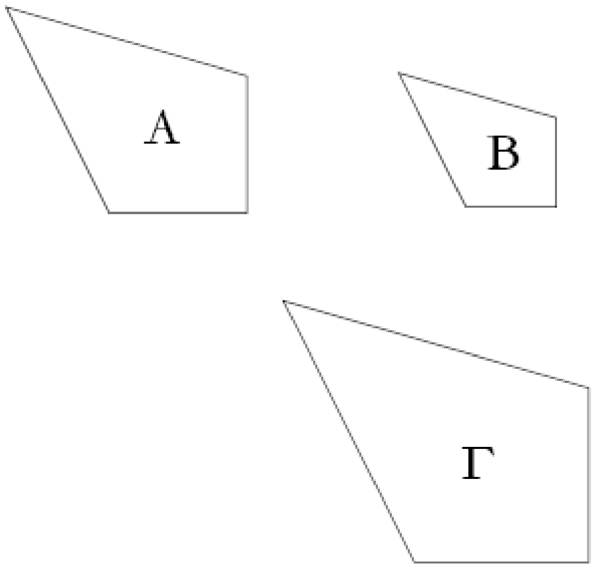
Πόρισμα

Και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται για [όμοια] τετράπλευρα ότι είναι σε διπλάσιο λόγο με τις ομόλογες πλευρές. Έχει αποδειχθεί και για τρίγωνα. Ώστε και τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι μεταξύ τους σε διπλάσιο λόγο με τις ομόλογες πλευρές.

Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 21

Τα ευθύγραμμα σχήματα που είναι όμοια με το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι και μεταξύ τους όμοια.

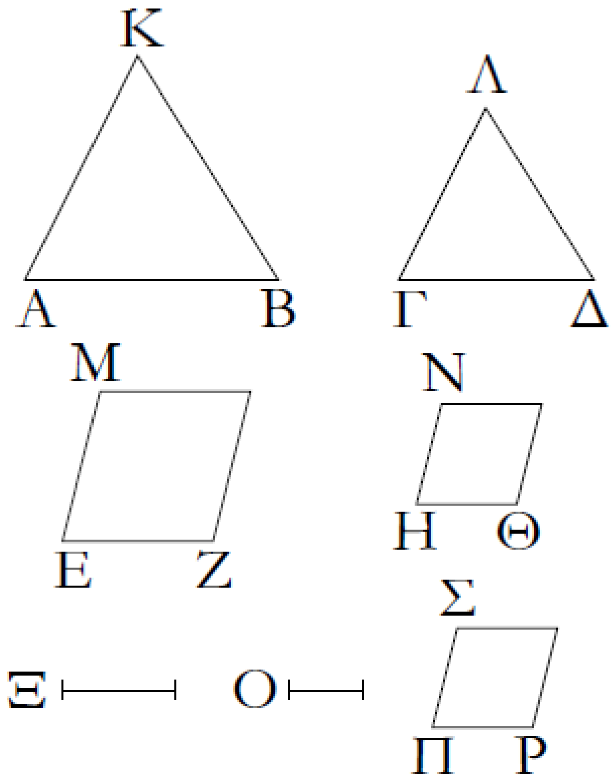


Διότι έστω καθένα από τα Α, Β ευθύγραμμα σχήματα είναι όμοιο με το Γ. Λέγω ότι και το Α είναι όμοιο με το Β.

Διότι επειδή το Α είναι όμοιο με το Γ, είναι ισογώνιο με αυτό και έχουν τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες. Πάλι, επειδή το Β είναι όμοιο με το Γ , είναι ισογώνιο με αυτό, και έχουν τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες. Άρα καθένα από τα Α,Β είναι ισογώνιο με το Γ και έχουν τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες ώστε και το Α είναι ισογώνιο με το Β και έχουν τις πλευρές περί τις ίσες γωνίες ανάλογες. Άρα το Α είναι όμοιο με το Β. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 22

Εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες και όμοια και ομοίως σχεδιασμένα ευθύγραμμα σχήματα από αυτές θα είναι ανάλογα. Και αν τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα ευθύγραμμα είναι ανάλογα τότε και οι ευθείες τους θα είναι ανάλογες.



Ας είναι τέσσερις ευθείες ανάλογες οι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, όπως η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΗΘ, και ας έχουν σχεδιαστεί από τις ΑΒ, ΓΔ τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα ευθύγραμμα σχήματα ΚΑΒ, ΛΓΔ και από τις ΕΖ, ΗΘ, τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα ευθύγραμμα σχήματα ΜΖ, ΝΘ. Λέγω ότι όπως είναι το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι το ΜΖ είναι προς το ΝΘ.

Ας έχει ληφθεί μία τρίτη η Ξ ανάλογη των ΑΒ, ΓΔ και μια τρίτη η Ο ανάλογη των ΕΖ, ΗΘ. Και επειδή όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι και η ΕΖ προς την ΗΘ, όπως η ΓΔ προς την Ξ, έτσι η ΗΘ προς την Ο, άρα εξ' ισότητας όπως είναι η ΑΒ προς την Ξ, έτσι η ΕΖ προς την Ο. 'Αλλά όπως η ΑΒ είναι προς την Ξ, έτσι και το ΚΑΒ είναι προς το ΛΓΔ, όπως η ΕΖ είναι προς την Ο, έτσι το ΜΖ είναι προς το ΝΘ. Και άρα όπως το ΚΑΒ είναι προς το ΛΓΔ, έτσι το ΜΖ προς το ΝΘ.

Έστω ότι είναι όπως το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι το ΜΖ προς το ΝΘ. Λέγω ότι, και όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ είναι προς την ΗΘ. Δηλαδή εάν δεν είναι όπως η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΗΘ, έστω ότι όπως η ΑΒ είναι προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ είναι προς την ΠΡ. Και ας έχει σχεδιασθεί στην ΠΡ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο το ευθύγραμμο ΣΡ σε καθένα από τα ΜΖ, ΝΘ.

Επειδή λοιπόν, είναι όπως η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΠΡ, και έχουν σχεδιαστεί απο τις ΑΒ, ΓΔ όμοια και ομοίως τοποθετημένα τα ΚΑΒ, ΛΓΔ, από τις ΕΖ, ΠΡ τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα ΜΖ, ΣΡ, άρα όπως είναι το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι και το ΜΖ προς το ΣΡ, και είναι όπως το ΚΑΒ προς το ΛΓΔ, έτσι και το ΜΖ προς το ΝΘ. Και άρα όπως το ΜΖ είναι προς το ΣΡ, έτσι το ΜΖ προς το ΝΘ. Άρα το ΜΖ έχει τον ίδιο λόγο με καθένα από τα ΝΘ, ΣΡ. Άρα το ΝΘ είναι ίσο με το

ΣΡ και είναι όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με αυτό. Άρα η ΗΘ είναι ίση με την ΠΡ. Και επειδή όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΠΡ, η ΠΡ ίση με την ΗΘ. Άρα όπως είναι η ΑΒ προς τη ΓΔ, έτσι η ΕΖ προς την ΗΘ.

Άρα εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες και όμοια και ομοίως σχεδιασμένα με αυτές ευθύγραμμα σχήματα θα είναι ανάλογα. Και αν τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα ευθύγραμμα σχήματα είναι ανάλογα τότε και οι ευθείες τους θα είναι ανάλογες. Ο.Ε.Δ.

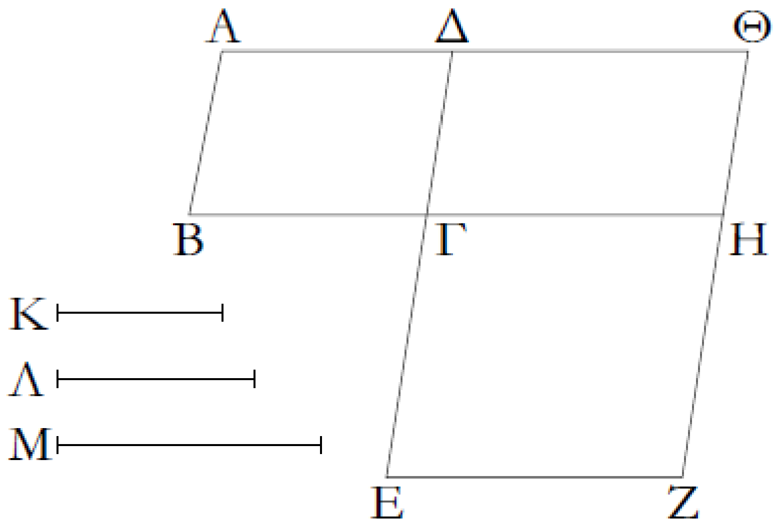
Πρόταση 23

Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν το ένα με το άλλο το συγκείμενο λόγο από τις πλευρές.

Έστω ισογώνια παραλληλόγραμμα τα ΑΓ, ΓΖ που έχουν τη γωνία ΒΓΔ ίση με τη ΕΓΗ. Λέγω ότι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ έχει το συγκείμενο λόγο από τις πλευρές.

Ας κείται λοιπόν η ΒΓ ώστε να είναι σε ευθεία με τη ΓΗ. Άρα σε ευθεία είναι και η ΔΓ με τη ΓΕ και ας έχει συμπληρωθεί το ΔΗ παραλληλόγραμμο, και ας έχουν τοποθετηθεί ευθείες Κ και ας γίνει όπως η ΒΓ είναι προς τη ΓΗ, έτσι η Κ να είναι προς τη Λ, και όπως η ΔΓ είναι προς τη ΓΕ, έτσι η Λ να είναι προς τη Μ.

Άρα οι λόγοι και της Κ προς τη Λ και της Λ προς τη Μ είναι ίδιοι με τους λόγους των πλευρών, της ΒΓ προς τη ΓΗ και της ΔΓ προς τη ΓΕ. Αλλά ο λόγος της Κ προς τη Μ αποτελείται από το λόγο της Κ προς τη Λ και της Λ προς τη Μ, ώστε και η Κ προς τη Μ αποτελείται από το λόγο των πλευρών. Και επειδή όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΗ έτσι είναι το παραλληλόγραμμο ΑΓ προς το ΓΘ, αλλά όπως η ΒΓ προς τη ΓΗ, έτσι η Κ προς τη Λ και άρα έτσι η Κ προς τη Λ, όπως το ΑΓ προς το ΓΘ. Πάλι, επειδή όπως είναι η ΔΓ προς τη ΓΕ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΓΘ είναι προς το ΓΖ, αλλά όπως η ΔΓ είναι προς τη ΓΕ, έτσι η Λ είναι προς τη Μ και άρα όπως η Λ είναι προς τη Μ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΓΘ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ. Επειδή, λοιπόν αποδείχθηκε, ότι όπως είναι η Κ προς τη Λ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΓ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΓΘ, όπως η Λ είναι προς τη Μ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΓΘ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΓΖ, άρα εξ' ισότητας όπως είναι η Κ προς τη Μ, έτσι το ΑΓ είναι προς το ΓΖ παραλληλόγραμμο. Λοιπόν η Κ προς τη Μ αποτελείται από το λόγο των πλευρών και το ΑΓ προς το ΓΖ αποτελείται από το λόγο των πλευρών.



Άρα τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν το ένα με το άλλο το συγκείμενο λόγο από τις πλευρές.

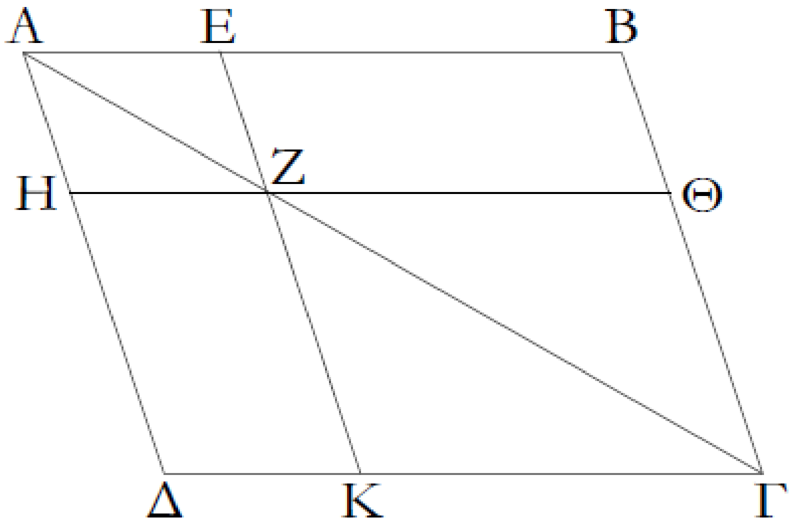
Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 24

Για κάθε παραλληλόγραμμο, τα παραλληλόγραμμα περί τη διαγώνιο είναι όμοια με το όλο και μεταξύ τους.

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΑΓ η διαγώνιος του και έστω τα παραλληλόγραμμα ΕΗ, ΘΚ περί την ΑΓ. Λέγω ότι το καθένα από τα ΕΗ, ΘΚ παραλληλόγραμμα είναι όμοιο με όλο το ΑΒΓΔ και μεταξύ τους.

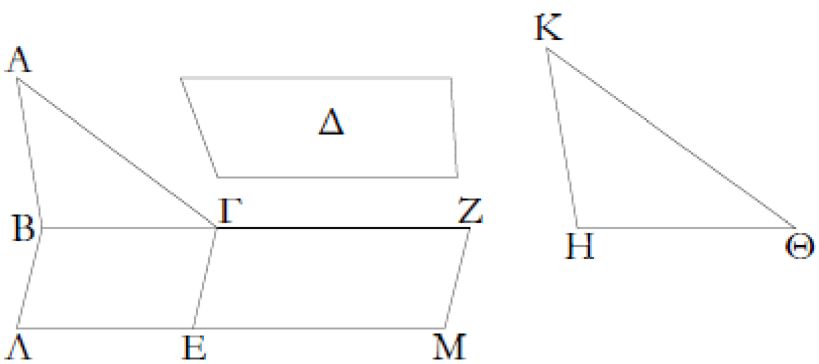
Ας έχει αχθεί στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΖ παράλληλη σε μία από τις πλευρές, τη ΒΓ. Τότε ανάλογα όπως είναι η ΒΕ προς την ΕΑ, έτσι η ΓΖ είναι προς τη ΖΑ. Πάλι στο τρίγωνο ΑΓΔ ας έχει αχθεί η ΖΗ παράλληλη σε μία από τις πλευρές , τη ΓΔ. Τότε ανάλογα όπως είναι η ΓΖ προς τη ΖΑ, έτσι η ΔΗ είναι προς την ΗΑ. Αλλά όπως η ΓΖ είναι προς τη ΖΑ, έτσι αποδείχθηκε και η ΒΕ είναι προς την ΕΑ. Και άρα όπως είναι η ΒΕ προς την ΕΑ, έτσι η ΔΗ είναι προς την ΗΑ και άρα όπως είναι η ΒΑ με την ΑΕ, έτσι η ΔΑ με την ΑΗ, και εναλλάξ όπως η ΒΑ είναι με την ΑΔ, έτσι η ΕΑ είναι με την ΑΗ. Άρα οι πλευρές περί την κοινή γωνία ΒΑΔ των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΗ είναι ανάλογες. Και αφού η ΗΖ είναι παράλληλη με τη ΔΓ, η γωνία ΑΖΗ είναι ίση με τη γωνία ΔΓΑ και η γωνία ΔΑΓ είναι κοινή στα τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΗΖ. Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΗΖ. Από αυτά συνάγεται ότι και το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΑΖΕ, και όλο το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο είναι ισογώνιο με το ΕΗ. Άρα ανάλογα όπως είναι η ΑΔ προς τη ΔΓ, έτσι η ΑΗ είναι προς την ΗΖ, όπως η ΔΓ είναι προς τη ΓΑ, έτσι η ΗΖ είναι προς τη ΖΑ, και όπως είναι η ΑΓ προς τη ΓΒ, έτσι η ΑΖ είναι προς τη ΖΕ. Και ακόμα όπως η ΓΒ είναι προς τη ΒΑ, έτσι η ΖΕ είναι προς την ΕΑ. Και επειδή αποδείχθηκε ότι όπως η ΔΓ είναι προς τη ΓΑ, έτσι η ΗΖ είναι προς τη ΖΑ, όπως η ΑΓ είναι προς τη ΓΒ, έτσι η ΑΖ είναι προς τη ΖΕ, άρα εξ' ισότητας, όπως η ΔΓ είναι προς τη ΓΒ, έτσι η ΗΖ είναι προς τη ΖΕ. Άρα οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΗ είναι ανάλογες. Άρα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΕΗ. Από αυτά συνάγεται ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΚΘ, άρα το καθένα από τα παραλληλόγραμμα ΕΗ, ΘΚ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και αυτά είναι όμοια με το ευθύγραμμο σχήμα και μεταξύ τους. Και άρα το παραλληλόγραμμο ΕΗ είναι όμοιο με το παραλληλόγραμμο ΘΚ.



Άρα τα παραλληλόγραμμα περί την διαγώνιο κάθε παραλληλογράμμου είναι όμοια με το όλο και μεταξύ τους. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 25

Να κατασκευασθεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο με δοθέν και ίσο με άλλο δοθέν.



Έστω ΑΒΓ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Πρέπει λοιπόν να κατασκευασθεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο με το ΑΒΓ και ίσο με το Δ.

Ας έχει εφαρμοσθεί το παραλληλόγραμμο ΒΕ στη ΒΓ ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ και το παραλληλόγραμμο ΓΜ στη ΓΕ, ίσο με το Δ στη γωνία ΖΓΕ, η οποία είναι ίση με τη ΓΒΛ. Άρα η ΒΓ είναι σε ευθεία με τη ΓΖ και η ΛΕ με την ΕΜ. Και ας έχει ληφθεί ΗΘ η μέση ανάλογος των ΒΓ, ΓΖ και ας έχει γραφεί στην ΗΘ το ΚΗΘ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το ΑΒΓ.

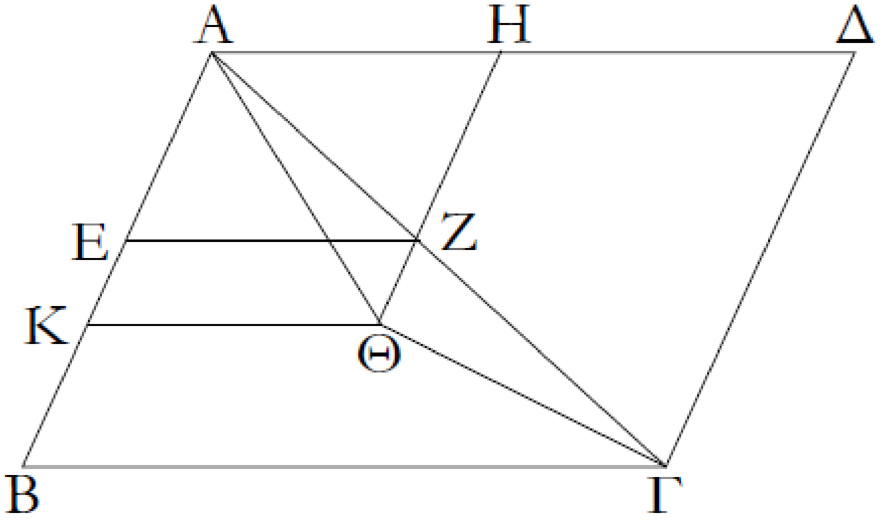
Και επειδή όπως είναι η ΒΓ προς την ΗΘ, έτσι η ΗΘ είναι προς τη ΓΖ. Και εάν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, τότε όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη, έτσι είναι το σχήμα από την πρώτη με το όμοιο και ομοίως σχεδιασμένο από τη δεύτερη. Άρα όπως είναι η ΒΓ προς τη ΓΖ, έτσι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΚΗΘ, αλλά και όπως η ΒΓ είναι προς τη ΓΖ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΒΕ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΕΖ και άρα όπως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το τρίγωνο ΚΗΘ, έτσι το παραλληλόγραμμο ΒΕ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΕΖ. Άρα εναλλάξ, όπως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΒΕ, έτσι το τρίγωνο ΚΗΘ είναι προς το παραλληλόγραμμο ΕΖ, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΒΕ. Άρα και το τρίγωνο ΚΗΘ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΕΖ, αλλά το παραλληλόγραμμο ΕΖ είναι ίσο με το Δ. Άρα και το ΚΗΘ είναι ίσο με το Δ και το ΚΗΘ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

Άρα το ΚΗΘ έχει κατασκευασθεί όμοιο με το δοθέν ευθύγραμμο ΑΒΓ και ίσο με το άλλο δοθέν Δ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 26

Εάν από παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το όλο, έχοντας μια κοινή γωνία με αυτό, τότε η διαγώνιος του είναι περί την ίδια διαγώνιο με το όλο.

Δηλαδή ας έχει αφαιρεθεί από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο ΑΖ, το οποίο είναι όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το ΑΒΓΔ, έχοντας κοινή γωνία με αυτό, την ΔΑΒ. Λέγω ότι το ΑΒΓΔ είναι περί την ίδια διαγώνιο με το ΑΖ.



Διότι εάν όχι, αλλά είναι δυνατόν, έστω η διαγώνιός τους ΑΘΓ και ας έχει αχθεί από το Θ προεκτεινόμενη η ΗΖ και ας έχει αχθεί η ΘΚ από το Θ παράλληλη είτε στην ΑΔ είτε στη ΒΓ.

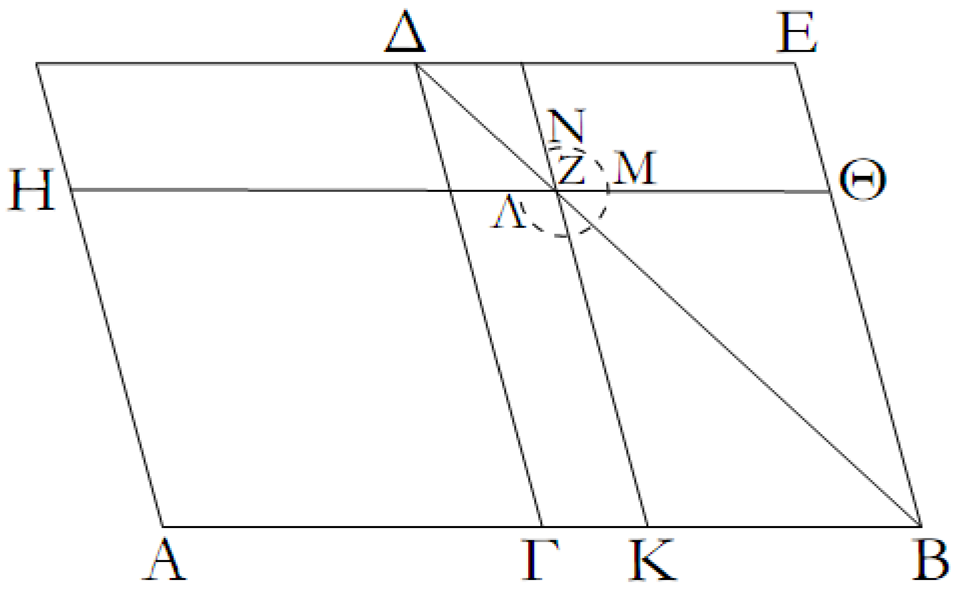
Επειδή λοιπόν το ΑΒΓΔ είναι περί την ίδια διαγώνιο με το ΚΗ, άρα όπως είναι η ΔΑ προς την ΑΒ, έτσι η ΗΑ είναι προς την ΑΚ. Και λόγω ομοιότητας των ΑΒΓΔ και ΕΗ, όπως είναι η ΔΑ προς την ΑΒ, έτσι η ΗΑ είναι προς την ΑΕ, και άρα όπως η ΗΑ είναι προς την ΑΚ, έτσι η ΗΑ είναι προς την ΑΕ. Άρα η ΗΑ έχει τον ίδιο λόγο με καθένα από τα ΑΚ, ΑΕ, άρα η ΑΕ είναι ίση με την ΑΚ, η μικρότερη με τη μεγαλύτερη, το οποίο είναι αδύνατον. Άρα δεν ισχύει οτι το ΑΒΓΔ δεν είναι περί την ίδια διαγώνιο με την ΑΖ. Άρα το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι περί την ίδια διαγώνιο με το παραλληλόγραμμο ΑΖ.

Άρα, εάν από παραλληλόγραμμο, αφαιρεθεί ένα παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το όλο, έχοντας μια κοινή γωνία με αυτό, τότε είναι περί την ίδια διαγώνιο με το όλο. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 27

Από όλα τα παραλληλόγραμμα που είναι εφαρμοσμένα στην ίδια ευθεία, και υπολείπονται σχηματικά από όμοια και ομοίως τοποθετημένα παραλληλόγραμμα, σε αυτό που είναι σχεδιασμένο στη μισή ευθεία, μέγιστο είναι αυτό το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στην μισή ευθεία το οποίο είναι όμοιο με αυτό που υπολείπεται.

Έστω η ευθεία ΑΒ και ας έχει διχοτομηθεί στο Γ, και ας έχει εφαρμοσθεί στην ευθεία ΑΒ το ΑΔ παραλληλόγραμμο που υπολείπεται σχηματικά από το παραλληλόγραμμο ΔΒ το οποίο έχει εφαρμοσθεί στο μισό της ΑΒ, δηλαδή της ΓΒ. Λέγω ότι από όλα τα παραλληλόγραμμα που εφαρμόζονται στην ΑΒ και υπολείπονται σχηματικά από όμοια και ομοίως τοποθετημένα παραλληλόγραμμα στο ΔΒ, μεγαλύτερο είναι το ΑΔ. Ας έχει εφαρμοσθεί λοιπόν στην ευθεία ΑΒ το παραλληλόγραμμο ΑΖ που υπολείπεται σχηματικά από το παραλληλόγραμμο ΖΒ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο στο ΔΒ. Λέγω ότι το ΑΔ είναι μεγαλύτερο του ΑΖ.



Επειδή λοιπόν το ΔΒ παραλληλόγραμμο είναι όμοιο με το ΖΒ παραλληλόγραμμο, βρίσκονται περί την ίδια διαγώνιο. Ας έχει αχθεί η διαγώνιος τους ΔΒ και ας έχει καταγραφεί το σχήμα.

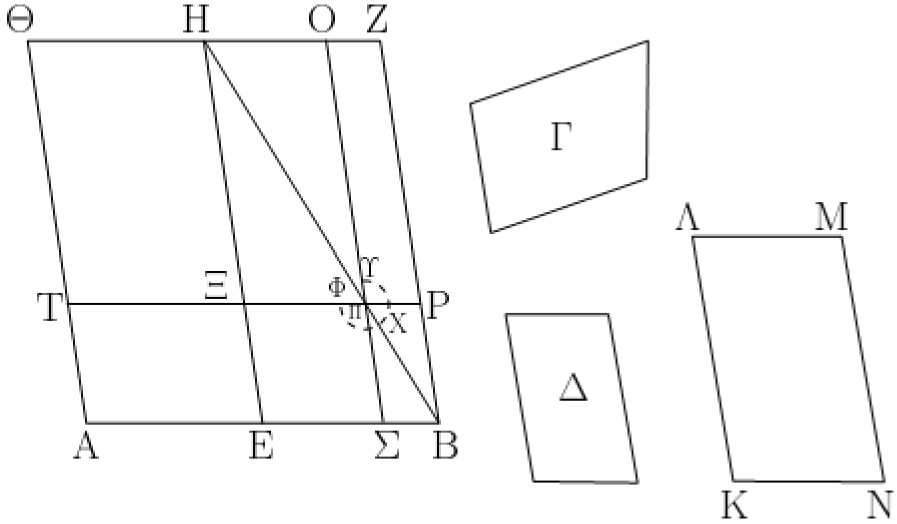
Επειδή πράγματι, το ΓΖ είναι ίσο με το ΖΕ, και το ΖΒ είναι κοινό, άρα όλο το ΓΘ είναι ίσο με όλο το ΚΕ. Αλλά το ΓΘ είναι ίσο με το ΓΗ επειδή και η ΑΓ είναι ίση με τη ΓΒ. Αρα και το ΗΓ είναι ίσο με το ΕΚ. Και ας έχει προστεθεί το κοινό παραλληλόγραμμο ΓΖ. Άρα όλο το ΑΖ είναι ίσο με το ΛΜΝ γνώμονα, ώστε το ΔΒ παραλληλόγραμμο, δηλαδή το ΑΔ, είναι μεγαλύτερο από το παραλληλόγραμμο ΑΖ.

Άρα από όλα τα παραλληλόγραμμα που είναι εφαρμοσμένα στην ίδια ευθεία και υπολείπονται σχηματικά από όμοια και ομοίως τοποθετημένα παραλληλόγραμμα, σε αυτό που είναι σχεδιασμένο στη μισή ευθεία, μέγιστο είναι το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στην μισή ευθεία, το οποίο είναι όμοιο με αυτό που υπολείπεται. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 28

Σε δοθείσα ευθεία να εφαρμοσθεί παραλληλόγραμμο ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα από το οποίο υπολείπεται σχήμα παραλληλόγραμμο όμοιο με το δοθέν. Πρέπει το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα στο οποίο πρέπει να εφαρμοσθεί το ίσο, να μην είναι μεγαλύτερο του σχεδιασμένου παραλληλογράμμου στο μισό της ευθείας και όμοιο με το υπολειπόμενο, δηλαδή το σχεδιασμένο στο μισό της ευθείας και από το οποίο πρέπει να υπολείπεται το όμοιο.

Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ και το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα το οποίο πρέπει να είναι ίσο με αυτό που εφαρμόσθηκε στην ΑΒ, το Γ να μην είναι μεγαλύτερο του σχεδιασμένου από το μισό της ΑΒ και όμοιο με το υπολειπόμενο προς το οποίο δεν πρέπει να λείπει όμοιο με το Δ. Πρέπει λοιπόν να εφαρμοσθεί παραλληλόγραμμο πάνω στην ευθεία ΑΒ, ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ, υπολειπόμενο από ένα παραλληλόγραμμο όμοιο με το Δ.



Ας έχει διχοτομηθεί η ΑΒ στο σημείο Ε και ας έχει σχεδιασθεί στην ΕΒ το ΕΒΖΗ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το Δ. Και ας έχει συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο ΑΗ.

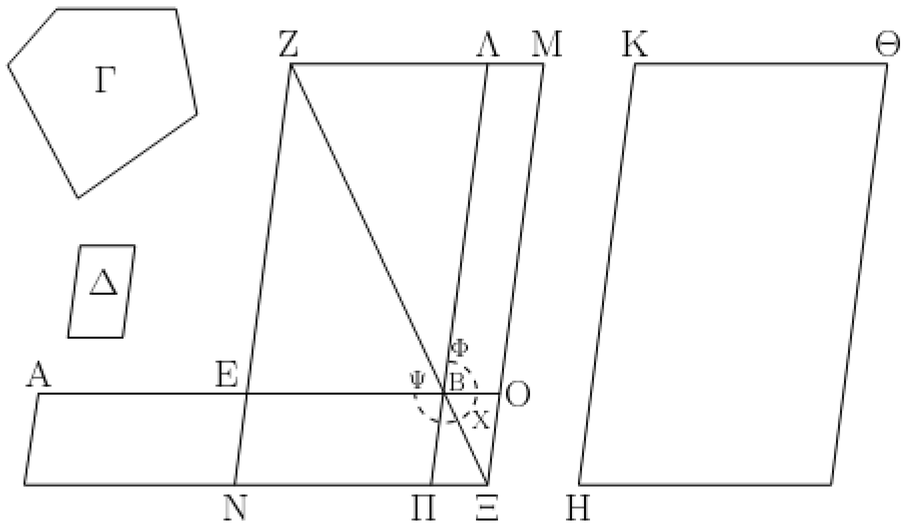
Λοιπόν, εάν το ΑΗ είναι ίσο με το Γ, τότε το ζητούμενο είναι γεγονός. Διότι το παραλληλόγραμμο ΑΗ είναι ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ που έχει εφαρμοσθεί στη δοσμένη ευθεία ΑΒ, από το οποίο λείπει σχήμα παραλληλόγραμμο το ΗΒ όμοιο με το Δ. Και εάν όχι, ας είναι το ΘΕ μεγαλύτερο του Γ. Το ΘΕ είναι ίσο με το ΗΒ. Άρα και το ΗΒ είναι μεγαλύτερο του Γ. Όσο μεγαλύτερο είναι το ΗΒ του Γ, ίσο με αυτή την υπεροχή, όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το Δ ας έχει κατασκευασθεί το ΚΛΜΝ. Αλλά το Δ είναι όμοιο με το ΗΒ. Και άρα το ΚΜ είναι όμοιο με το ΗΒ. Πράγματι έστω ότι η ΚΛ ομόλογη της ΗΕ, και η ΛΜ της ΗΖ. Και επειδή το ΗΒ είναι ίσο με τα Γ, ΚΜ, άρα το ΗΒ είναι μεγαλύτερο του ΚΜ, αρα η ΗΕ είναι μεγαλύτερη της ΚΛ, και η ΗΖ της ΛΜ. Και ας κείται η ΗΞ ίση με την ΚΛ, η ΗΟ ίση με την ΛΜ και ας έχει συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο ΞΗΟΠ. Άρα το ΗΠ είναι ίσο και όμοιο με το ΚΜ . Αλλά το ΚΜ είναι όμοιο με το ΗΒ. Άρα και το ΗΠ είναι όμοιο με το ΗΒ. Άρα το ΗΠ και το ΗΒ είναι περί την ίδια διαγώνιο. Έστω η διαγώνιός τους ΗΠΒ και ας έχει καταγραφεί το σχήμα.

Επειδή λοιπόν το ΒΗ είναι ίσο με τα Γ, ΚΜ των οποίων το ΗΠ είναι ίσο με το ΚΜ, άρα ο υπόλοιπος γνώμονας ΥΧΦ είναι ίσος με το υπολειπόμενο Γ. Και επειδή το ΟΡ είναι ίσο με το ΞΣ, ας έχει προστεθεί το κοινό ΠΒ. Άρα όλο το ΟΒ είναι ίσο με όλο το ΞΒ, αλλά το ΞΒ είναι ίσο με το ΤΕ και επειδή η πλευρά ΑΕ είναι ίση με την πλευρά ΕΒ, άρα και το ΤΕ είναι ίσο με το ΟΒ. Ας έχει προστεθεί το κοινό ΞΣ. Άρα όλο το ΤΣ είναι ίσο με όλο το γνώμονα ΦΧΥ, αλλά ο γνώμονας ΦΧΥ αποδείχθηκε ίσος με το Γ. Άρα και το ΤΣ είναι ίσο με το Γ.

Άρα στη δοθείσα ευθεία ΑΒ έχει εφαρμοσθεί το παραλληλόγραμμο ΣΤ ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο Γ από του οποίου υπολείπεται σχήμα παραλληλόγραμμο το ΠΒ όμοιο με το Δ, επειδή το ΠΒ είναι όμοιο με το ΗΠ. Ο.Ε.Π

Πρόταση 29

Σε δοθείσα ευθεία να εφαρμοσθεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο να υπερβάλλει κατά σχήμα παραλληλόγραμμο όμοιο με δοθέν παραλληλόγραμμο.



Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία και Γ το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα το οποίο πρέπει να είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο που εφαρμόζεται στην ΑΒ, και Δ το όμοιο παραλληλόγραμμο προς το οποίο πρέπει να υπερβάλλει. Πρέπει λοιπόν να εφαρμοσθεί στην ευθεία ΑΒ παραλληλόγραμμο ίσο με το ευθύγραμμο Γ, το οποίο να υπερβάλλει κατά σχήμα παραλληλόγραμμο όμοιο με το Δ.

Ας έχει διχοτομηθεί η ΑΒ στο Ε και ας έχει γραφεί στη ΕΒ το παραλληλόγραμμο ΒΖ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το Δ. Και ας έχει κατασκευασθεί το ΗΘ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο με το Δ και ίσο με το άθροισμα των ΒΖ και Γ. Έστω η ΚΘ ομόλογη της ΖΛ και η ΚΗ της ΖΕ. Και επειδή το ΗΘ είναι μεγαλύτερο του ΖΒ άρα και η ΚΘ είναι μεγαλύτερη της ΖΛ και η ΚΗ της ΖΕ. Ας έχουν προεκταθεί οι ΖΛ, ΖΕ και έστω ότι η ΖΛΜ είναι ίση με τη ΚΘ και η ΖΕΝ ίση με την ΚΗ. Και ας έχει συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο ΜΝ. Άρα το ΜΝ είναι ίσο και όμοιο με το ΗΘ. Αλλά το ΗΘ είναι όμοιο με το ΕΛ, άρα και το ΜΝ είναι όμοιο με το ΕΛ. Άρα το ΕΛ είναι περί την ίδια διαγώνιο με το ΜΝ. Ας έχει αχθεί η διαγώνιός του, η ΖΞ και ας έχει καταγραφεί το σχήμα.

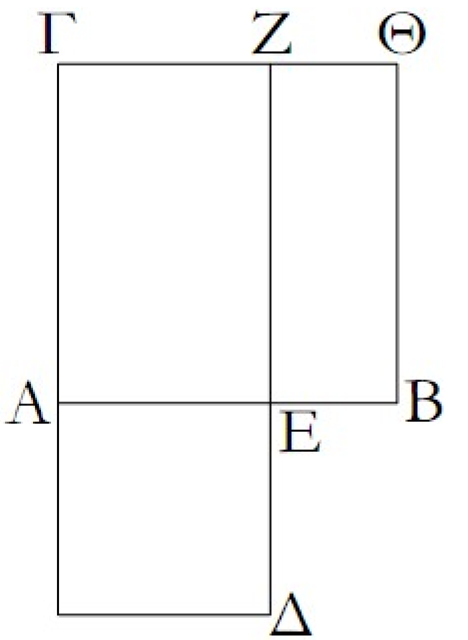
Επειδή το ΗΘ είναι ίσο με τα ΕΛ, Γ, αλλά και το ΗΘ είναι ίσο με το ΜΝ, άρα και το ΜΝ είναι ίσο με τα ΕΛ, Γ. Ας έχει αφαιρεθεί το κοινό ΕΛ. Άρα ο λοιπός γνώμονας

ΨΧΦ είναι ίσος με το Γ, και επειδή η ΑΕ είναι ίση με την ΕΒ, ίσο είναι και το ΑΝ με το ΝΒ, δηλαδή με το ΛΟ. Ας έχει προστεθεί το κοινό ΕΞ. Άρα όλο το ΑΞ είναι ίσο με το γνώμονα ΦΧΨ. Αλλά ο γνώμονας ΦΧΨ είναι ίσος με το Γ. Άρα και το ΑΞ είναι ίσο με το Γ.

Άρα σε δοθείσα ευθεία ΑΒ έχει εφαρμοσθεί το παραλληλόγραμμο ΑΞ ίσο με το δοσμένο ευθύγραμμο Γ, το οποίο υπερβάλλει κατά σχήμα παραλληλόγραμμο το ΠΟ, το οποίο είναι όμοιο με το Δ, επειδή και το ΟΠ είναι όμοιο με το ΕΛ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 30

Δοθείσα πεπερασμένη ευθεία να τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο.



Έστω ΑΒ η δοσμένη πεπερασμένη ευθεία. Πρέπει λοιπόν να τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο.

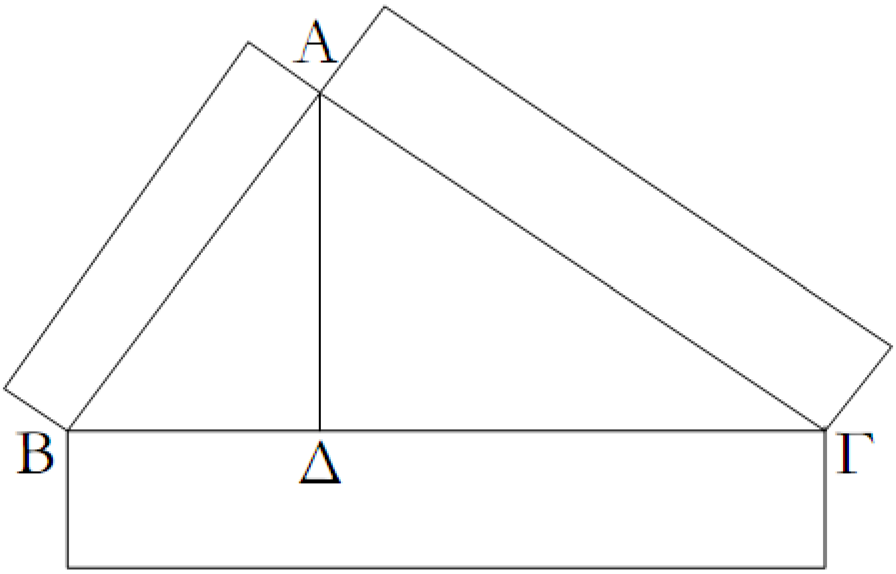
Ας έχει σχεδιασθεί από την ΑΒ το τετράγωνο ΒΓ και ας έχει εφαρμοσθεί στην ΑΓ το παραλληλόγραμμο ΓΔ ίσο με το ΒΓ, το οποίο να υπερβάλλει κατά σχήμα παραλληλόγραμμο το ΑΔ, όμοιο με το ΒΓ.

Το ΒΓ είναι τετράγωνο. Άρα και το ΑΔ είναι τετράγωνο και επειδή το ΒΓ είναι ίσο με το ΓΔ, ας έχει αφαιρεθεί το κοινό ΓΕ. Άρα το λοιπό ΒΖ είναι ίσο με το λοιπό ΑΔ, είναι και ισογώνιο με αυτό. Άρα οι πλευρές των ΒΖ και ΑΔ περί τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Άρα όπως είναι η ΖΕ προς την ΕΔ, έτσι η ΑΕ είναι προς την ΕΒ. Η ΖΕ είναι ίση με την ΑΒ και η ΕΔ είναι ίση με την ΑΕ. Άρα όπως είναι η ΒΑ προς την ΑΕ, έτσι η ΑΕ είναι προς την ΕΒ. Η ΑΒ είναι μεγαλύτερη από την ΑΕ. Άρα και η ΑΕ είναι μεγαλύτερη από την ΕΒ.

Άρα η ευθεία ΑΒ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο στο Ε και το μεγαλύτερό της τμήμα είναι το ΑΕ. Ο.Ε.Π.

Πρόταση 31

Σε ορθογώνια τρίγωνα, το σχήμα που είναι σχεδιασμένο από την υποτείνουσα πλευρά της ορθής γωνίας είναι ίσο με τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα σχήματα από τις πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία.



Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ορθή τη γωνία ΒΑΓ . Λέγω ότι το σχήμα από τη ΒΓ είναι ίσο με τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα σχήματα από τις ΒΑ, ΑΓ.

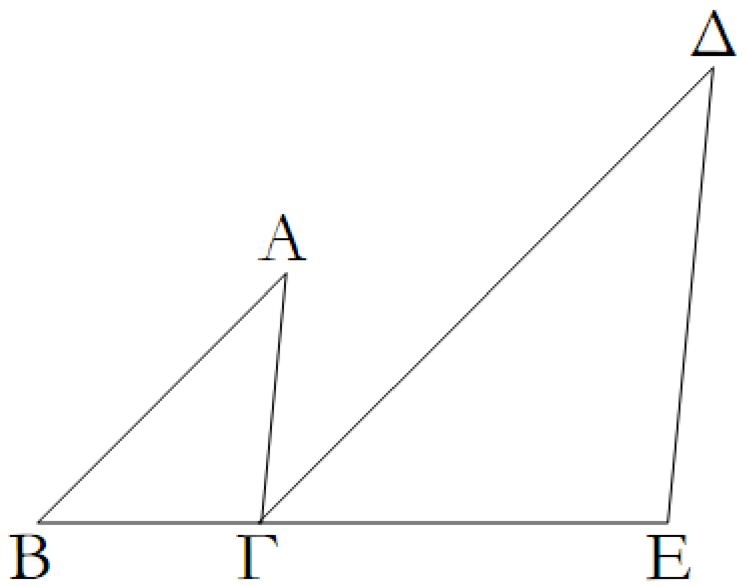
Ας έχει αχθεί η κάθετος ΑΔ.

Επειδή λοιπόν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει αχθεί η ΑΔ από την ορθή γωνία στο Α κάθετη στη βάση ΒΓ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι προς την κάθετο όμοια με όλο το ΑΒΓ και μεταξύ τους, και επειδή το ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΔ, άρα όπως η ΓΒ είναι προς την ΒΑ έτσι η ΑΒ είναι προς την ΒΔ. Και επειδή όταν τρεις ευθείες είναι ανάλογες, όπως είναι η πρώτη προς την τρίτη, έτσι το σχήμα της πρώτης είναι προς το όμοιο και ομοίως σχεδιασμένο της δεύτερης. Άρα όπως η ΓΒ είναι προς την ΒΔ, έτσι το σχήμα της ΓΒ είναι προς το όμοιο και ομοίως σχεδιασμένο της ΒΑ. Από αυτά λοιπόν συνάγεται ότι και όπως είναι η ΒΓ προς την ΓΔ έτσι το σχήμα της ΒΓ είναι προς αυτό της ΓΑ ώστε και όπως η ΒΓ είναι προς τις ΒΔ, ΔΓ, έτσι το σχήμα της ΒΓ είναι προς τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα των ΒΑ, ΑΓ. Η ΒΓ είναι ίση με τις ΒΔ, ΔΓ. Άρα και το σχήμα της ΒΓ είναι ίσο με τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα σχήματα των ΒΑ, ΑΓ.

Άρα σε ορθογώνια τρίγωνα, το σχήμα που είναι σχεδιασμένο από την υποτείνουσα πλευρά της ορθής γωνίας είναι ίσο με τα όμοια και ομοίως σχεδιασμένα σχήματα από τις πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία. Ο.Ε.Δ

Πρόταση 32

Εάν δύο τρίγωνα που έχουν δυο πλευρές ανάλογες με τις δύο πλευρές, είναι τοποθετημένα κατά μία γωνία ώστε οι ομόλογες πλευρές τους να είναι και παράλληλες, τότε οι λοιπές πλευρές των τριγώνων θα βρίσκονται σε ευθεία.



Έστω τα δυο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ που έχουν τις δύο πλευρές ΒΑ, ΑΓ ανάλογες με τις δύο πλευρές ΔΓ, ΔΕ, όπως η ΑΒ είναι προς την ΑΓ, έτσι η ΔΓ είναι προς την ΔΕ, η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΔΓ, η ΑΓ είναι παράλληλη με την ΔΕ. Λέγω ότι η ΒΓ είναι σε ευθεία με την ΓΕ.

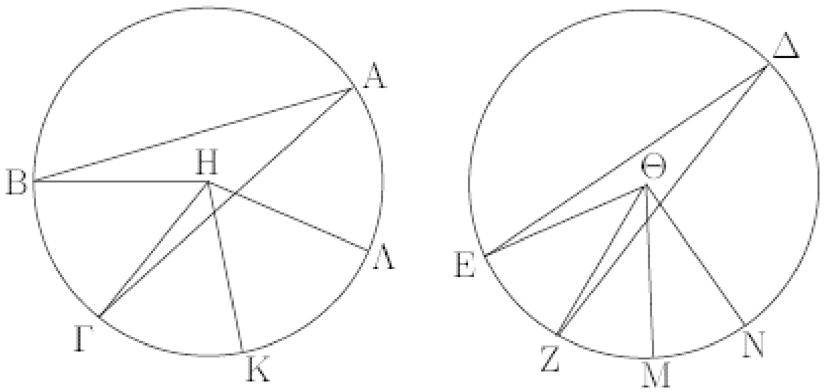
Επειδή λοιπόν η ΑΒ είναι παράλληλη με τη ΔΓ και τέμνονται από την ευθεία ΑΓ, οι εναλλάξ γωνίες ΒΑΓ, ΑΓΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Από αυτά λοιπόν συνάγεται ότι και η ΓΔΕ είναι ίση με την ΑΓΔ, ώστε και η ΒΑΓ είναι ίση με την ΓΔΕ. Και επειδή τα ΑΒΓ, ΔΓΕ είναι δύο τρίγωνα που έχουν τη μία γωνία στο Α ίση με την μία γωνία στο Δ και οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, όπως η ΒΑ είναι προς την ΑΓ έτσι η ΓΔ είναι προς τη ΔΕ, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο

ΔΓΕ. Άρα η γωνία ΑΒΓ είναι ίση με την ΔΓΕ. Και αποδείχθηκε ότι η ΑΓΔ είναι ίση με την ΒΑΓ. Άρα όλη η ΑΓΕ είναι ίση με τις δύο ΑΒΓ, ΒΑΓ. Ας έχει προστεθεί η κοινή ΑΓΒ. Άρα το άθροισμα των ΑΓΕ, ΑΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ. Αλλά το άθροισμα των ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές, άρα και το άθροισμα των ΑΓΕ, ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές. Οι δύο ευθείες ΒΓ και ΓΕ που δεν είναι από την ίδια πλευρά, σχηματίζουν με την ευθεία ΑΓ στο σημείο Γ τις εφεξής γωνίες ΑΓΕ, ΑΓΒ πού έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές. Άρα η ΒΓ είναι σε ευθεία με την ΓΕ.

Άρα εάν δύο τρίγωνα, που έχουν δυο πλευρές ανάλογες με δύο πλευρές είναι τοποθετημένα κατά μία γωνία ώστε οι ομόλογες πλευρές είναι και παράλληλες, τότε οι λοιπές πλευρές των τριγώνων θα είναι σε ευθεία. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 33

Σε ίσους κύκλους, οι γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο με τις περιφέρειες στις οποίες βρίσκονται, είτε αυτές βρίσκονται στα κέντρα, είτε στις περιφέρειες.



Ας είναι οι ΑΒΓ, ΔΕΖ ίσοι κύκλοι, και ας είναι οι ΒΗΓ και ΕΘΖ γωνίες στα κέντρα τους Η, Θ και ΒΑΓ, ΕΔΖ στις περιφέρειες. Λέγω ότι, όπως είναι η ΒΓ περιφέρεια προς την ΕΖ περιφέρεια, έτσι και η ΒΗΓ γωνία είναι προς την ΕΘΖ και η ΒΑΓ είναι προς την ΕΔΖ.

Διότι, ας κείνται οσεσδήποτε ίσες με την περιφέρεια ΒΓ, οι ΓΚ, ΚΛ και οσεσδήποτε ίσες με την περιφέρεια ΕΖ οι ΖΜ, ΜΝ και ας έχουν ενωθεί οι ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Επειδή λοιπόν οι περιφέρειες ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ είναι μεταξύ τους ίσες και οι γωνίες ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα όσες φορές είναι η ΒΛ πολλαπλάσια της ΒΓ, τόσες φορές είναι και η ΒΗΛ γωνία πολλαπλάσια της ΒΗΓ και από αυτά λοιπόν συνάγεται ότι όσες φορές είναι η περιφέρεια ΝΕ πολλαπλάσια της ΕΖ, τόσες φορές είναι και η γωνία ΝΘΕ πολλαπλάσια της ΕΘΖ. Άρα εάν η περιφέρεια ΒΛ είναι ίση με την περιφέρεια ΕΝ και η γωνία ΒΗΛ είναι ίση με την ΕΘΝ, και εάν η περιφέρεια ΒΛ είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια ΕΝ, και η ΒΗΛ γωνία είναι μεγαλύτερη από την ΕΘΝ, και εάν η ΒΛ είναι μικρότερη από την ΕΝ, και η ΒΗΛ είναι μικρότερη από την ΕΘΝ. Λοιπόν υπάρχουν τέσσερα μεγέθη, δύο περιφέρειες, οι ΒΓ, ΕΖ και δύο γωνίες οι ΒΗΓ, ΕΘΖ. Και έχουν ληφθεί ίσα πολλαπλάσια της περιφέρειας ΒΓ και της γωνίας ΒΗΓ, περιφέρειας ΒΛ και γωνίας ΒΗΛ και της περιφέρειας ΕΖ και της γωνίας ΕΘΖ, περιφέρειας ΕΝ και γωνίας ΕΘΝ. Και έχει αποδειχθεί ότι εάν η περιφέρεια ΒΛ υπερέχει της περιφέρειας ΕΝ τότε και η γωνία ΒΗΛ υπερέχει της γωνίας ΕΘΝ, και εάν ίση, ίση και αν μικρότερη, μικρότερη. Άρα όπως η περιφέρεια ΒΓ είναι προς την ΕΖ, έτσι η γωνία ΒΗΓ είναι προς την ΕΘΖ. Αλλά όπως η γωνία ΒΗΓ είναι προς την ΕΘΖ, έτσι η ΒΑΓ είναι προς την ΕΔΖ. Λοιπόν, κάθε μία είναι διπλάσια καθεμιάς. Άρα και όπως η ΒΓ περιφέρεια είναι προς την ΕΖ περιφέρεια, έτσι η ΒΗΓ γωνία είναι προς την ΕΘΖ και η ΒΑΓ προς την ΕΔΖ.

Άρα σε ίσους κύκλους, οι γωνίες έχουν τον ίδιο λόγο με τις περιφέρειες στις οποίες βρίσκονται, είτε αυτές βρίσκονται στα κέντρα, είτε στις περιφέρειες. Ο.Ε.Δ.

-