

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ  
ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΤΥ (ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ):

1. Σελ. 70, Άσκηση 6.3.
2. Σελ. 81–82, όλες. Δώστε ιδιαίτερη προσοχή στις 7.4–7.9. Η Άσκηση 7.8 περί των Γκρασμαννιανών, γενικεύει την έννοια του προβολικού χώρου.

2. ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΕΩΣ 4/10:

1. Δείξτε ότι η αντιποδική απεικόνιση  $A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $A(x) = -x$  για κάθε  $x \in S^n$  είναι αμφιδιαφόριση.<sup>1</sup>
2. Συναρτήσεις  $\psi$  ο  $\phi$  και  $\psi$  δύνανται να είναι λείες στα  $p$  και  $\phi(p)$  αντίστοιχα, αλλά η  $\phi$  να μην είναι λεία στο  $p$ . Δώστε παράδειγμα.
3. Εάν ένα πηλίκο  $M/\sim$  επιδέχεται δομή πολλαπλότητας πηλίκου  $\tilde{M}$ , τότε δείξτε ότι η δομή αυτή είναι μοναδική.<sup>2</sup>
4. Στο  $\mathbb{R}^3$  θεωρούμε περιοχές

$$U_a = \{(x_1, x_2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

και ομοιομορφισμούς

$$\phi_a : U_a \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, a) \mapsto (x_1, x_2).$$

Αφού πρώτα δείξετε ότι ο άτλας  $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a)\}$  δίνει στο  $\mathbb{R}^3$  δομή 2-διάστατης λείας πολλαπλότητας που τη συμβολίζουμε  $R$ , θεωρήστε κατόπιν στο  $R$  τη σχέση

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (w_1, w_2, w_3) \iff z_3 = w_3.$$

- (1) Δείξτε ότι η  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας.
- (2) Δείξτε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ανοικτά υποσύνολα της  $R$ .
- (3) Βρείτε την τοπολογία του πηλίκου  $\tilde{R} = R/\sim$ .
- (4) Ποιά είναι η διάσταση της  $\tilde{R}$ ;

3. ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

Μελετήστε τις παραγράφους *Smooth covering maps* και *Lie groups* από το βιβλίο του Lee.

<sup>1</sup>Χρησιμοποιήστε τους χάρτες της  $S^n$  που προκύπτουν από την στερεογραφική προβολή.

<sup>2</sup>Εάν  $M'$  μία άλλη δομή, θεωρήστε την ταυτοτική απεικόνιση  $\iota : M \rightarrow M'$ .