

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ  
ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΤΥ (ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ):

1. Σελ. 57–58, Ασκήσεις 5.1–5.5.
2. Σελ. 70, Ασκήσεις 6.1 έως 6.3.

2. ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΕΩΣ 4/10:

1.<sup>1</sup> Έστω  $Y$  μία λεία πολλαπλότητα διάστασης  $n$  και  $X$  σύνολο τέτοιο ώστε υπάρχει μία 1–1 και επί απεικόνιση  $F : X \rightarrow Y$ . Δείξτε ότι μπορούμε να εισάγουμε διαφορίσιμη δομή στο σύνολο  $X$  από αυτήν του  $Y$ .

Προσέξτε όμως την παθολογία αυτής της κατασκευής: Για παράδειγμα, αφού η σφαίρα  $S^2$  και το  $\mathbb{R}$  είναι ισοπληθή σύνολα, υπάρχει μία 1–1 και επί απεικόνιση  $F$  από το  $\mathbb{R}$  στην  $S^1$ . Μεταφέροντας την διαφορίσιμη δομή του  $\mathbb{R}$  στην  $S^2$  μέσω της  $F$  προκύπτει ότι η  $S^2$  είναι 1-διάστατη λεία πολλαπλότητα! Η άσκηση αυτή τονίζει ότι μία πολλαπλότητα δεν είναι απλώς ένα σύνολο που του επισυνάπτουμε μία λεία δομή, αλλά το σύνολο **μαζί** με τη δομή.

2. Χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή, εφοδιάστε την  $S^n$  με άτλα αποτελούμενο από δύο χάρτες.

Δείτε και την Άσκηση 1-3, σελ. 21, από το βιβλίο του Lee. Κάνετε πρώτα την περίπτωση  $n = 2$  και μετά την γενική. Μπορούμε να βρούμε άτλα για την  $S^n$  αποτελούμενο από έναν χάρτη;

3. Άσκηση 2-3, σελ. 40, από το βιβλίο του Lee.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Η άσκηση αυτή καλό είναι να γίνει αφού διαβάσετε το Lemma 1.14 (του ενός βήματος) του Lee.

<sup>2</sup>Σας συνιστώ να διαβάσετε την πραγμάτευση του Lee για τις λείες απεικονίσεις και τις αμφιδιαφορίσιμες, σελ. 24–28.