

**Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ
ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5**

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΤU (ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ):

1. Σελ. 139. Οι περισσότερες είναι υπολογιστικές και συμπληρώνουν την απόδειξη του Tu για το ότι η εφαπτόμενη δέσμη είναι πολλαπλότητα. Στο μάθημα ακολουθήσαμε άλλη απόδειξη και δείξαμε την Άσκηση 12.2. Δείτε πάντως την Πρόταση 12.9 και την αντίστοιχη Άσκηση 12.3, έχει κάποιο ενδιαφέρον.
2. Σελ. 161, 14.1 και ιδίως η 14.2-συγκρίνατε με το Θεώρημα Τριχωτής Μπάλλας. 14.10 έως και 14.14.

2. ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΕΩΣ 8/11:

1. Ασκήσεις 3-4, 3-5 και 3-6 σελ. 64, του Lee. Για την 3-4, έστω (u, v) οι συντεταγμένες της στερεογραφικής προβολής από τον βόρειο πόλο N . Πάρτε το διανυσματικό πεδίο $\partial/\partial u$ (ή το $\partial/\partial v$). Αυτό αρχικά ορίζεται μόνο στην $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Υπολογίστε τώρα την έκφραση του πεδίου αυτού ως προς τις στερεογραφικές συντεταγμένες $(\hat{u}, \hat{v})$ του νοτίου πόλου S . Παρατηρήστε ότι το πεδίο μηδενίζεται στο 0 που αντιστοιχεί στον νότιο πόλο S . Άρα, μπορείτε να επεκτείνετε το $\partial/\partial u$ σε ένα καλά ορισμένο διανυσματικό πεδίο όλης της σφαίρας που μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο.

2. Έστω M^m πολλαπλότητα και $\mathcal{X}(M)$ ο χώρος των λείων διανυσματικών της πεδίων. Ένας τελεστής $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, λέγεται (αφφινική) συνοχή της M αν για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$ και $X, X', Y, Y' \in \mathcal{X}(M)$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$(1) \nabla_{fX+gX'} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_{X'} Y.$$

$$(2) \nabla_X (fY + gY') = f\nabla_X Y + g\nabla_X Y' + (Xf)Y + (Xg)Y'.$$

Σε ένα M ανοικτό του $\mathbb{R}^m$ κάθε διανυσματικό πεδίο αντιστοιχεί σε μία λεία απεικόνιση $M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Εάν λοιπόν $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ και Y αντιστοιχεί στην απεικόνιση $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορίζουμε την αφφινική συνοχή ως μιμούμενοι τον ορισμό της κατά κατεύθυνση παραγώγου σε κάθε $p \in M$:

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + tF(p)) - X(p)}{t}.$$

Δείξτε ότι το παραπάνω είναι όντως συνοχή. Μπορείτε να εντοπίσετε τα προβλήματα γενίκευσης του ορισμού αυτού σε τυχούσα πολλαπλότητα;