ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινο ΕΞΑΜΗΝΟ 2018–19

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Απο το βιβλιο του Tu (για εξασκηση):

1. Σελ. 161, 14.3-14.9. Ουσιαστικά πρόκειται περί ασκήσεων συνήθων διαφορικών εξισώσεων, με την εξαίρεση της ενδιαφέρουσας 14.6. Φρεσκάρετε τις γνώσεις σας!
2. Σελ. 174,, οι ενδιαφέρουσες είναι οι 15,7-13. Η 15.14 είναι υπολογιστική, ενώ οι 15.15-6 είναι ενδιαφέρουσες.
3. Σελ. 187. Οι περισσότερες είτε βγαίνουν από τους ορισμούς είτε με τυποποιημένες τεχνικές. Ενδιαφέρουσες είναι η 16.9, 16.11 και σε δεύτερο βαθμό η 16.12.

2. Για παραδοση εως 15/11:

1. Έστω X λείο διανυσματικό πεδίο πολλαπλότητας M^m. Μιά μη-μηδενική $f \in C^\infty(M)$ λέγεται *ιδιοσυνάρτηση* του X αν $Xf = af$, για κάποιο πραγματικό $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος καλείται και *ιδιοτιμή* .

α) Αποδείξτε ότι αν c είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X και $f \in C^\infty(M)$ τότε
$$\frac{d}{dt}(f \circ c) = (Xf) \circ c.$$

β) Δείξτε ότι η $f \in C^\infty(M)$ είναι ιδιοσυνάρτηση του X με αντίστοιχη ιδιοτιμή a αν και μόνο αν
$$f \circ c = f(c(0))\dot{e}^{at},$$
όπου c ολοκληρωτική καμπύλη του X.

γ) Δείξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του
$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$
είναι θετικές ομογενείς συναρτήσεις βαθμού a, όπου a είναι η ιδιοτιμή της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης.

2. Θεωρήστε το σύνολο $\mathfrak{H}$ των πινάκων της μορφής
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Δείξτε ότι είναι ομάδα Lie και προσδιορίστε μία βάση για την Lie άλγεβρά της.

3. Προσδιορίστε επακριβώς την Lie άλγεβρα της
$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$$

όπου

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Εδώ, I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.