ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινο ΕΞΑΜΗΝΟ 2018–19

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8/9

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Απο το βιβλιο του Tu (για εξασκηση):

1. Σελ. 218-220, οι περισσότερες βγαίνουν από τους ορισμούς. Ενδιαφέρον έχουν οι 19.10, 19.11. Η 19.13 θα σας θυμίσει τη Φυσική του σχολείου (κάπως).

2. Σελ. 233-234, δεν επιμένω ιδιαίτερα, όλες είναι πάνω στους ορισμούς. Οι ενδιαφέρουσες είναι οι 15,7-13. Η 15.14 είναι υπολογιστική, ενώ οι 15.15-6 είναι ενδιαφέρουσες.

3. Σελ. 246. Οι περισσότερες είτε βγαίνουν από τους ορισμούς, είτε έχουν αποδειχθεί στην τάξη, είτε βγαίνουν με τυποποιημένες τεχνικές. Ενδιαφέρουσες είναι η 21.7, (σκεφτείτε την παραλληλισιμότητα-έχουμε δείξει την 21.8), 21.9 και 21.10.

2. Για παραδοση εως 6/12:

1. Άσκηση 10, σελ. 229, του Lafontaine.

2. Έστω M^m λεία πολλαπλότητα με σύνορο. Δείξτε αναλυτικά ότι η $\mathrm{Int}(M)$ είναι λεία m-πολλαπλότητα και η ∂M είναι λεία $(m-1)$-πολλαπλότητα. Δείξτε επίσης ότι η ∂M είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M.

3. Έστω
$$B = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$$
και
$$H = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n \geq 0\}.$$

α) Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : B \to H$.[1]

β) Δείξτε ότι η B είναι πολλαπλότητα με σύνορο και έχει φυσιολογική λεία δομή τέτοια ώστε το εσωτερικό της είναι η ανοικτή μπάλλα με την τυπική λεία δομή.

[1] Υπόδειξη: Έστω R_0 η ανάκλαση στην σφαίρα κέντρου $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ και ακτίνας $\sqrt{2}$:
$$R_0(\mathbf{x}) = e_{n+1} + \frac{2(\mathbf{x} - e_{n+1})}{\|\mathbf{x} - e_{n+1}\|^2}.$$
Παρατηρήστε ότι αν $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ τότε $R_0(\tilde{\mathbf{x}})$ δίνει τον τύπο της αντίστροφης στερεογραφικής προβολής. Δείξτε τώρα ότι
$$\|R_0(\mathbf{x})\|^2 = 1 + \frac{4x_{n+1}}{\|\mathbf{x} - e_{n+1}\|^2},$$
και άρα η R_0 απεικονίζει το
$$L = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n \leq 0\}$$
στην B. Ολοκληρώστε την απόδειξη παίρνοντας $R = R_0 \circ \Sigma$, όπου Σ είναι η ανάκλαση στο εποίπεδο $x_{n+1} = 0$.

4. Άσκηση 15-1, σελ. 397, της κανονικής εκδοσης του Lee. (Στην παλιά έκδοση είναι η 10-1, σελ. 265).