ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009–10

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οδηγιες

Τα θέματα είναι με αύξουσα σειρά δυσκολίας· συνίσταται να ασχοληθείτε με αυτά στην σειρά που παρουσιάζονται. Γράψτε:

(1) Όλα τα θέματα του Μέρους 0.
(2) Τρία από τα τέσσερα θέματα του Μέρους Ι. (Υποχρεωτικά τα 1.1. και 1.2.)
(3) Δύο από τα τρία θέματα του Μέρους ΙΙ. (Υποχρεωτικά το 2.1.)
(4) Το θέμα του Μέρους ΙΙΙ μπορείτε να το αφήσετε τελευταίο.

★ Διευκρινιστικές (**και μόνο**) ερωτήσεις επί των θεμάτων, θα δέχομαι στο γραφείο μου την Πέμπτη 10/06/2010 και μέχρι τις 12:00.

★ Παραδώστε το γραπτό σας στο γραφείο μου μέχρι την Παρασκευή 11/06/2010 και ώρα 12:00 **ακριβώς**.

★ Παρακαλώ θερμώς όπως το γραπτό σας είναι τακτικό και ευανάγνωστο. Οι απαντήσεις σας να είναι το δυνατόν σύντομες μεν, ακριβείς δε.

✠ Η συνεργασία μεταξύ σας δεν ενθαρρύνεται καθόλου!

Βαθμολογια (Ενδεικτικη)

(1) Γ^-: Μέρος 0.
(2) Γ: Μέρος 0 και ένα θέμα από το Μέρος Ι
(3) Γ^+: Μέρος 0 και δύο θέματα από το Μέρος Ι.
(4) B^-: Μέρος 0 και Μέρος Ι.
(5) $B - B^+$: Μέρος 0, Μέρος Ι και ένα θέμα του Μέρους ΙΙ.
(6) $B^+ - A$: Μέρος 0, Μέρος Ι, Μέρος ΙΙ.
(7) A^+: Όλα τα Μέρη.

Μερος 0

0.1. Έστω η ειδική γραμμική ομάδα

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) : \ ad - bc = 1 \right\}.$$

Δείξτε ότι η $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ είναι 3–διάστατη πολλαπλότητα εμφυτεύοντάς την στον $\mathbb{R}^4$.

0.2. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$F(x,y,z) = (x^3 + y^3 + z^3, 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 1).$$

α) Υπολογίστε την F_* σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ γράφοντας επακριβώς τα

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad F_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad F_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

β) Προσδιορίστε τα σύνολα στάθμης της F που είναι ομαλές υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^3$.

0.3. Έστω M^n λεία πολλαπλότητα. Δείξτε τα ακόλουθα.

(1) Αν $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ τότε

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

(2) Αν $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n))$ χάρτης της M με

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

τότε στο U είναι

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

0.4.

(1) Ποιες από τις παρακάτω μορφές του $\mathbb{R}^3$ είναι κλειστές και ποιές ακριβείς;

$$\omega_1 = yzdx + xzdy + xydz, \quad \omega_2 = xy^2 dx \wedge dy + zx^2 dz \wedge dx.$$

(2) Έστω B^3 η κλειστή μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλλα, ειδωμένη σαν (προσανατολισμένη) πολλαπλότητα με σύνορο την S^2. Υπολογίστε το

$$\int_{S^2} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

0.5. Δείξτε ότι ο τυπικός άτλας του πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$ είναι προσανατολισμένος όταν ο n είναι περιττός.

Μερος I

1.1. Έστω η μοναδιαία σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = \left(\sum_{i=0}^n (x^i)^2\right)^{1/2} = 1\}$.

α) Καλύψτε την σφαίρα S^n με δύο χάρτες:

$$\phi_N : U_N = S^n \setminus \{N = (1,0,\dots,0)\} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{(x^1,\dots,x^n)}{1-x_0},$$

$$\phi_S : U_S = S^n \setminus \{S = (-1,0,\dots,0)\} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{(x^1,\dots,x^n)}{1+x_0}$$

και δείξτε ότι η συλλογή $\mathcal{A}_1 = (U_N,\phi_N),(U_S,\phi_S)$ ορίζει έναν $\mathcal{C}^\infty$ άτλαντα στην S^n.

β) Γράψτε αναλυτικά τον άτλαντα $\mathcal{A}_2$ που προκύπτει για την S^n από την συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

και δείξτε ότι οι $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1$ είναι $\mathcal{C}^\infty$ συμβατοί.

1.2. Έστω M_1, M_2 λείες πολλαπλότητες. Δείξτε τα ακόλουθα.

(1) Αν $F : M_1 \longrightarrow M_2$ είναι λεία, τότε και η $F_* : T(M_1) \longrightarrow T(M_2)$ είναι λεία.
(2) Η εφαπτόμενη δέσμη $T(M_1 \times M_2)$ είναι αμφιδιαφορική με το γινόμενο $T(M_1) \times T(M_2)$.
(3) Οι φυσιολογικές προβολές $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1,2$ ορίζουν 1–1 ομομορφισμούς αλγεβρών

$$\pi^* : H^*(M_i) \longrightarrow H^*(M_1 \times M_2),\ i = 1,2.$$

1.3. Χρησιμοποιείστε την απεικόνιση $F : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ όπου

$$(x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy),$$

για να αποδείξετε ότι η S^2 είναι υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^6$. Χρησιμοποιώντας την σχέση της S^2 με τον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^2$, δείξτε ότι ο $\mathbb{R}P^2$ εμφυτεύεται εντός του $\mathbb{R}^6$.

1.4. Έστω $F : M \longrightarrow M'$ μία λεία απεικόνιση λείων πολλαπλοτήτων και X, X', $F-$συσχετιζόμενα διανυσματικά πεδία των M, M' αντίστοιχα.

(1) Δείξτε ότι αν c είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X, τότε η $c' = F \circ c$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του X'.
(2) Έστω $M = \widetilde{M}/\sim$ μία πολλαπλότητα πηλίκο και $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ η κανονική προβολή (βύθιση). Αποδείξτε ότι αν $\widetilde{c}$ ολοκληρωτική καμπύλη ενός $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ τότε η $c = \pi \circ \widetilde{c}$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $X = \pi_* \widetilde{X}$.
(3) Έστω $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2$ και $M = \mathbb{R}^2/\sim$ όπου:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ αν υπάρχουν } a, b \in \mathbb{Z} : x_2 = x_1 + a,\ y_2 = y_1 + b.$$

Εφαρμόστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του $\pi_* X$, όπου

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Μερος II

2.1. Μία $n-$διάστατη λεία πολλαπλότητα M λέγεται ότι έχει *τετριμμένη εφαπτόμενη δέσμη* εάν υπάρχει αμφιδιαφόριση

$$\theta : T(M) \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n$$

τέτοια ώστε $\pi_1 \circ \theta = \pi$ ($\pi_1 : M \times \mathbb{R}^n \to M$, $\pi : T(M) \to M$ οι προβολές) και, για κάθε $p \in M$ ο περιορισμός της θ στον $T_p(M)$ είναι γραμμική απεικόνιση.

α) Δείξτε ότι M^n έχει τετριμμένη εφαπτόμενη δέσμη αν υπάρχουν n διανυσματικά πεδία $X_1, \ldots, X_n$ στην M ώστε για κάθε $p \in M$ το σύνολο των διανυσμάτων $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ αποτελεί βάση του $T_p(M)$.

β) Εφαρμόστε το α) για να δείξετε ότι η S^1 έχει τετριμμένη εφαπτόμενη δέσμη. Χρειάζεται να βεβαιώσετε μόνο (γιατι;) ότι η S^1 έχει ένα πουθενά μηδενικό διανυσματικό πεδίο X. Θεωρείστε την απεικόνιση

$$X : S^1 \longrightarrow T(S^1) \hookrightarrow T(\mathbb{R}^2)_{|S^1}, \quad v \mapsto (Av)_v$$

όπου

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

και δείξτε ότι δίδει το ζητούμενο πεδίο. Ερμηνεύστε γεωμετρικά (με σχήμα) το πεδίο X.

γ) Έστω ο $n-$τόρος $\mathbf{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. Δείξτε (και με την βοήθεια της 1.2.2) ότι η $T(\mathbf{T}^n)$ είναι αμφιδιαφορική με την $\mathbf{T}^n \times \mathbb{R}^n$.

2.2. ῝Εστω $F : M^m \longrightarrow N^n$ λεία απεικόνιση και P^p ομαλή υποπολλαπλότητα της N. Λέμε ότι η F είναι *εγκάρσια* στο P αν για κάθε $p \in F^{-1}(P)$ ισχύει

$$F_{*,p}(T_p(M)) + T_{F(p)}(P) = T_{F(p)}(N).$$

Δείξτε ότι αν $F^{-1}(P) \neq \emptyset$, τότε το $F^{-1}(P)$ είναι ομαλή υποπολλαπλότητα της M διάστασης $n-p$.

(Υπόδειξη: Μπορείτε να περιοριστείτε στην περίπτωση όπου $M = \mathbb{R}^m$ και $N = \mathbb{R}^m$. Αν $p \in F^{-1}(P)$ πάρτε έναν προσαρμοσμένο χάρτη της N για το γύρω από το $F(p)$. Κατόπιν θεωρείστε την κανονική βύθιση

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$$

και δείξτε με τον κανόνα της αλυσσίδας ότι το 0 είναι ομαλή τιμή της $H = \pi \circ F$.)

2.3.

(1) Αποδείξτε ότι η ξένη ένωση $\mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n$ δύο αντιγράφων του $\mathbb{R}^n$ είναι συσταλτή, αποδεικνύοντας ότι έχει τον ίδιο ομοτοπικό τύπο με τυχόν σημείο.

(2) Μία λεία πολλαπλότητα M λέγεται ότι έχει ένα *απλό κάλυμμα* $U_\alpha, \alpha \in I$ αριθμήσιμο, αν είναι τοπικά πεπερασμένο, και κάθε μη κενή πεπερασμένη τομή

$$U = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$$

είναι συσταλτή με $H^*(U) = H^*(\mathbb{R}^n)$.

Αποδείξτε ότι

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n \\ 0 & \text{αλλού}, \end{cases}$$

για κάθε $n \geq 1$.

Μερος III

3.1. Ο *αστρικός ισομορφισμός του Hodge* $* : \Omega^k(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται μέσω της απεικόνισης των στοιχείων των βάσεων

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \mapsto \mathrm{sign}(\sigma) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}}$$

όπου $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_{n-k}$ και σ η μετάταξη $(1, 2, \ldots n) \mapsto (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$.

α) Υπολογίστε την $*\omega$ όπου

$$\omega = a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega(\mathbb{R}^3).$$

Ποια είναι η $*\omega$ αν $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^4)$;

β) Επεκτείνετε με τον αστρικό ισομορφισμό του Hodge στην περίπτωση των λείων n–πολλαπλοτήτων M: Δοθείσης μιας $\omega \in \Omega^k(M)$ ορίστε την $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$.

★: Τα υπόλοιπα αφορούν μόνο την περίπτωση $\dim(M) = 2$:

γ) Αφού γράψετε την δράση του $*$ τοπικά στα στοιχεία της τυχούσας βάσης, αποδείξτε ότι ο $*$ έχει τις εξής ιδιότητες: για ω, ϕ είναι $k-$μορφές και f 0–μορφή (συνάρτηση) ισχύουν τα

(1) $*(\omega + \phi) = *\omega + \ *\phi$, $*(f\omega) = f(*\omega)$,
(2) $**\omega = (-1)^{3k}\omega$,
(3) $\omega \wedge *\phi = \phi \wedge *\omega$,
(4) $\omega \wedge *\omega = 0$ αν και μόνο αν $\omega = 0$.

δ) Δείξτε επίσης ότι αν $\omega \in \Omega^1(M)$ έχει μία τοπική έκφραση της μορφής

$$\omega = P dx + Q dy,$$

τότε $*(d\omega) = d(*\omega) = 0$ αν και μόνο αν

$$Q_x = P_y \text{ και } Q_y = -P_x.$$

ε) Για κάθε $k-$μορφή ω ορίζουμε το *συν-διαφορικό* της $\delta\omega$ (που είναι $(k-1)$–μορφή) από την

$$\delta\omega = (-1)^{2k+3} * d * \omega.$$

Αν ω, ϕ είναι $k-$μορφές τότε δείξτε ότι

(1) $\delta(\omega + \phi) = \delta\omega + \delta\phi$,
(2) $\delta\delta\omega = 0$,
(3) $*\delta\omega = (-1)^k d * \omega$, $d\omega = (-1)^{k+1}\delta * \omega$.

στ) Δώστε τον ορισμό της συν-κλειστής και συν-ακριβούς μορφής. Δείξτε ότι μία συν-ακριβής μορφή είναι συν-κλειστή και κατόπιν θεωρείστε τους διανυσματικούς χώρους

$$\bar{H}^k(M) = \bar{Z}^k(M)/\bar{B}^k(M), \ k = 0, 1, 2,$$

όπου $\bar{Z}^k(M)$, $\bar{B}^k(M)$ είναι οι χώροι των συν-κλειστών και συν-ακριβών μορφών τάξης k αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι η επαγόμενη συνομολογία είναι ισόμορφη με την συνομολογία deRham της M.