ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009–10

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Απο το βιβλιο τον Tu:

1. Δείτε τις ασκήσεις του 8ου κεφαλαιου. Σε πρώτη φάση μπορείτε να παραλείψετε την 8.8.

2. Απο το βιβλιο τον Lee:

Δείτε την ελαφρώς διαφορετική διαπραγμάτευση του εφαπτόμενου χώρου, σελ. 41–57.

3. Διαφορες

1. Έστω $F : N \longrightarrow M$ μια $\mathcal{C}^\infty$ απεικόνιση και $p \in N$.
   (1) Η απεικόνιση
   $$F_p^* : \mathcal{C}_{F(p)}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}_p^\infty(N), \quad F_p^*(f) = (f \circ F)(p)$$
   είναι ομομορφισμός αλγεβρών. (Αυτή είναι η απεικόνιση *έλκυση-πίσω (pull-back)* της F στο p.
   (2) Συμπεράνατε ότι το διαφορικό $(F_*)_p : T_p(N) \longrightarrow T_{F(p)}(M)$ προκύπτει από την F_p^* ως ομομορφισμός των δυϊκών διανυσματικών χώρων. Η $(F_*)_p$ λέγεται και *ώθηση-εμπρός (push-forward)* της F στο p.
2. Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στα παρακάτω.
   (1) Αν p ομαλό σημείο της f, υπαρχει χάρτης $(U, \phi = (y^1, \dots, y^n))$ γύρω από το p τέτοιος ώστε $\phi(p) = 0$ και $f = f(p) + y^1$. Πράγματι, αφού το p είναι ομαλό, έχουμε για κάθε σύστημα συντεταγμένων $x^1, \dots, x^n$ γύρω από το p ότι $\partial f/\partial x^i(p) \neq 0$. Αριγμώντας ξανά αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\partial f/\partial x^1(p) \neq 0$. Θέτουμε
   $$y^1 = f - f(p),\ y^i = x^i - x^i(p),\ i = 2, \dots, n.$$

Το μόνο που χρειάζεται να υπολογίσετε τώρα είναι τον (Ιακωβιανό) πίνακα αλλαγής συντεταγμένων $\frac{D(y^1,\ldots,y^n)}{D(x^1,\ldots,x^n)}$ στο p για να δείξετε ότι το $y^1,\ldots,y^n$ είναι σύστημα συντεταγμένων γύρω από το p.

(2) (Η Εσσιανή). Έστω p κρίσιμο σημείο της f. Για $X_p, Y_p \in T_p(M)$ ορίζουμε

$$\mathrm{Hess}_f(X_p, Y_p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) X_p^i Y_p^j$$

όπου $x^1,\ldots,x^n$ τοπικό σύστημα συνταταγμένων γύρω από το p και

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p),\ Y_p = \sum_{i=1}^{n} Y_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$

Δείξτε ότι η Εσσιανή δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη και ότι ορίζει μία συμμετρική μορφή στο $T_p(M) \times T_p(M)$.

Εάν ο πίνακας της $\mathrm{Hess}_f(X_p, Y_p)$ είναι μή ιδιάζων, το p καλείται μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο της f. Θεωρείστε τώρα γνωστό το παρακάτω αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας: *Αν G μη εκφυλισμένη συμμετρική μορφή σε έναν $n-$διάστατο δ.χ. V, τότε υπάρχει βάση $\{e_i\}$ του V τέτοια ώστε αν $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ τότε*

$$G(u,u) = (u^1)^2 + \cdots + (u^r)^2 - (u^{r+1})^2 - \cdots - (u^n)^2.$$

Το παρακάτω θεώρημα, γνστό ως *Λήμμα του* Morse είναι ιδιαίτερα σημαντικό:

Αν p μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο της f, υπάρχει τοπικός χάρτης $y^1,\ldots,y^n$ γύρω από το p με $y^i(p) = 0$ και

$$f = f(p) + (y^1)^2 + \cdots + (y^r)^2 - (y^{r+1})^2 - \cdots - (y^n)^2.$$

Ο αριθμός $n - r$ καλείται *δείκτης του p.*

Η απόδειξή του δεν είναι απλή. Συνιστά όμως την απαρχή της Θεωρίας του Morse, δείτε λ.χ και εδώ

http://en.wikipedia.org/wiki/Morse_theory