ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009–10

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Απο το βιβλιο του Tu:

1. Δείτε τις ασκήσεις του 17ου κεφαλαίου.
2. Δείτε τις ασκήσεις του 18ου κεφαλαίου (πλην της 18.8).
3. Δείτε τις ασκήσεις του 19ου κεφαλαίου. Ιδιαίρερο ενδιαφέρον από την σκοπιά της Φυσικής έχει 19.12.

Η 19.9 μας ζητά να αποδείξουμε την σχέση

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]),$$

για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ και $\omega \in \Omega^1(M)$. Έστω $\dim(M) = n$. Πάρτε σε ένα χάρτη $(U, x^1, \dots, x^n)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} c_i dx^i.$$

και παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial c_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\partial c_j}{\partial x^i} - \frac{\partial c_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Κατόπιν,

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\partial c_j}{\partial x^i} - \frac{\partial c_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{l=1}^{n} b_l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

2. Απο το βιβλιο του Lee:

1. Το κεφάλαιο 9 είναι πολύ αναλυτικό όσον αφορά τις διαφορικές μορφές. Μπορείτε σε πρώτη φάση να παραλείψετε την παράγραφο 9, αν και έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Δείτε τις ασκήσεις 9.1–9.8.