

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ  
ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ TU:

1. Δείτε τις ασκήσεις του 20ου κεφαλαίου.

- Μία γενίκευση της 20.4 θα βρείτε στον Lee στις σελίδες 235–237. (Orientations of hypersurfaces). Η παράγραφος αυτή έχει μεγάλο ενδιαφέρον. Συνιστώ να την μελετήσετε, προσέχοντας όμως τους διαφορετικούς ορισμούς του Lee. Μία καλή άσκηση είναι να ξαναγράψετε την παράγραφο, σύμφωνα με το τυπικό του Tu.
- Η 20.5 μπορεί να παραλειφθεί, διότι προκύπτει από την 20.6.
- Η 20.6 εμπεριέχει την έννοια της παραλληλίσμιμης πολλαπλότητας που περιέργως, δεν υπάρχει στο βιβλίο.

**Ορισμός.** Ένα διατεταγμένο σύνολο  $n$  γραμμικά ανεξάρτητων λείων διανυσματικών πεδίων  $\{X_1, \dots, X_n\}$  επάνω σε ένα ανοικτό σύνολο  $U$  μίας λείας πολλαπλότητας  $M^n$  λέγεται **παραλληλία** στο  $U$ . Για κάθε  $p, q \in U$  ο ισομορφισμός  $T_p(M) \rightarrow T_q(M)$  που δίδεται από την  $(X_i)_p \rightarrow (X_i)_q$  γενικεύει ακριβώς την έννοια της παραλληλίας στο  $\mathbb{R}^n$ . Μία πολλαπλότητα που επιδέχεται ολικής παραλληλίας καλείται **παραλληλίσμιμη**.

Δοθείσης μίας ολικής παραλληλίας  $\{X_1, \dots, X_n\}$  στην  $M^n$  μπορούμε τώρα να ορίσουμε προσανατολισμό στην  $M$  από την  $n$ -μορφή  $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  όπου  $\omega_i$  είναι οι 1-μορφές ορισμένες παντού πάνω στην  $M$  από την σχέση

$$\omega_i(X_j) = \delta_{ij}.$$

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

- Η 20. 7 δίδει ένα κάπως αναπάντεχο αποτέλεσμα. Εξετάστε το πρόσημο της ιακωβιανής ορίζουσας των απεικονίσεων μετάβασης και κατόπιν χρησιμοποιείστε την Πρόταση 20.9.

2. Δείτε τις ασκήσεις του 21ου κεφαλαίου (οι περισσότερες είναι λυμένες).

2. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ LEE:

1. Ο Lee ορίζει ελαφρώς διαφορετικά τον προσανατολισμό οπότε να είστε προσεκτικοί όταν διαβάζετε. Επίσης ακολουθεί διαφορετικές συνθήκες από αυτές του Tu στην παράγραφο που ασχολείται με πολλαπλότητες με σύνορο.

Από τις ασκήσεις της σελ. 265 δείτε τις 10–1, και 10–6.