

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 13/06/2017

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. α) Βρείτε το διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v}(t)$ και το διάνυσμα επιτάχυνσης $\mathbf{a}(t)$ της καμπύλης με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε κατόπιν ότι το $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)$ βρίσκεται πάντα πάνω στο επίπεδο $z = 2$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. **(0.5)**

β) Εάν $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, και \mathbf{w} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\mathbf{v}(0) \times \mathbf{a}(0)$, τότε αποδείξτε ότι η παράγωγος της f στην κατεύθυνση του \mathbf{w} στο τυχαίο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, δεν εξαρτάται από την μεταβλητή z . **(0.5)**

2. Έστω ότι ο δίσκος $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ έχει θερμοκρασία που δίνεται από τον τύπο $T(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Αποδείξτε ότι είναι

$$0 \leq T(x, y) \leq \frac{3}{2},$$

για κάθε $(x, y) \in D$. **(3)**

3. Υπολογίστε τη μέση θερμοκρασία

$$T_m = \frac{\iint_D T(x, y) dx dy}{\text{Area}(D)},$$

όπου T και D είναι όπως στο θέμα 2. Δείξτε ότι $T_m = T(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$. Τι συμπεραίνετε για την μέγιστη, ελάχιστη και μέση θερμοκρασία του D ; **(2)**

4. Έστω $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, 2y + x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, διανυσματικό πεδίο. Αν \mathbf{r} είναι απλή κλειστή καμπύλη του \mathbb{R}^2 , τότε αποδείξτε ότι

$$\oint_{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{s} = 0.$$

Βρείτε κατόπιν την οικογένεια συναρτήσεων δυναμικού του \mathbf{F} και αποδείξτε ότι η T του θεματος 2 ανήκει σε αυτήν την οικογένεια. Δικαιολογήστε πλήρως την επιχειρηματολογία σας. **(3)**

5. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη επιχειρηματολογία, υπολογίστε χωρίς πράξεις το

$$\iiint_Q x^{2017} y^{1789} z^{1917} dx dy dz,$$

όπου $Q = [-1, 1]^3$. **(2)**

(1) Άριστα το 10.

(2) Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.