

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΠΡΟΤΥΠΟ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. α) Δείξτε ότι το ταχύτητας \mathbf{v} και το διάνυσμα επιτάχυνσης \mathbf{a} της καμπύλης με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 3t), \quad t \in (0, 2\pi),$$

είναι μεταξύ τους κάθετα και υπολογίστε το $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$. **(0.75)**

β) Εάν $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, τότε βρείτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας την παράγωγο της $f \circ \mathbf{r}$. Δικαιολογήστε: αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς την κατακόρυφη συνιστώσα είναι μηδενικός, τότε η $f \circ \mathbf{r}$ είναι σταθερή. **(1.25)**

2. Έστω η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = x^2 - x + y$.

α) **(0.75)** Βρείτε αν υπάρχουν τα τοπικά ακρότατα της f στο \mathbb{R}^2 .

β) **(1.25)** Αφού δικαιολογήσετε γιατί τα ολικά ακρότατα της f ορισμένης πάνω στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο ευρίσκονται αναγκαστικά επάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, κατόπιν υπολογίστε τα με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

όπου f είναι η συνάρτηση του θέματος 2 όταν:

α) D είναι το τρίγωνο που ορίζουν τα σημεία $(0, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 0)$, **(1.75)**

β) D είναι ο μοναδιαίος κλειστός δίσκος $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. **(1.75)**

5. Έστω $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 1, 1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, διανυσματικό πεδίο.

α) Άν \mathbf{r} είναι απλή κλειστή καμπύλη του \mathbb{R}^2 , τότε αποδείξτε ότι

$$\oint_{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{s} = 0.$$

με χρήση του Θεωρήματος Green. **(1.75)**.

β) Βρείτε την οικογένεια συναρτήσεων δυναμικού του \mathbf{F} και αποδείξτε ότι η f του θέματος 2 ανήκει σε αυτήν την οικογένεια. **(1.75)**

(1) Υπάρχουν 11 μονάδες. Άριστα το 10.

(2) Διάρκεια εξέτασης: 100 λεπτά.