

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ  
04/06/15

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. α) **(0.75)** Δείξτε ότι το ταχύτητας  $\mathbf{v}$  και το διάνυσμα επιτάχυνσης  $\mathbf{a}$  της καμπύλης με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t), \cos(2t), 2t), \quad t \in (0, 2\pi),$$

είναι μεταξύ τους κάθετα και υπολογίστε το  $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$ .

β) **(1.25)** Εάν  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , τότε δείξτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας ότι η  $f \circ \mathbf{r}$  έχει σταθερή παράγωγο. Αν η  $f$  είναι συνάρτηση που παριστάνει τη θερμοκρασία του χώρου, τι μπορείτε να πείτε για τη μεταβολή της επάνω στην  $\mathbf{r}$ ;

2. Έστω η  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με τύπο  $f(x, y) = x^2 - xy$ .

α) **(0.75)** Βρείτε αν υπάρχουν τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

β) **(1.25)** Αφού δικαιολογήσετε γιατί τα ολικά ακρότατα της  $f$  ορισμένης πάνω στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο ευρίσκονται αναγκαστικά επάνω στον μοναδιαίο κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ , κατόπιν υπολογίστε τα με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange.

3. **(1.75)** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_T (x^2 - y) dx dy$$

όπου  $T$  είναι το τρίγωνο που ορίζουν τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  και  $(1, 0)$  (σχεδιάστε).

4. **(1.75)** Δείξτε ότι αν  $m > -1$ , τότε

$$\iint_D (x^2 + y^2)^m dx dy = \frac{\pi}{m+1}.$$

Όπου,  $D$  είναι ο μοναδιαίος κλειστός δίσκος  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

5. Έστω  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $Q = [-1, 1]^3$ ,  $B$  η μοναδιαία σφαίρα  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

α) **(1.75)** Δείξτε ότι

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = 8.$$

(Δέν χρειάζεται να κάνετε πολλές πράξεις, εκμεταλλευτείτε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος).

β) **(1.75)** Υπολογίστε με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz.$$

### Οδηγίες

:

- (1) Υπάρχουν 11 μονάδες. Άριστα το 10.
- (2) Όσοι κρατούν τον βαθμό της προόδου, **το σημειώνουν επάνω στην κόλλα τους και γράφουν μόνο** από τα θέματα 3–5. Διάρκεια εξέτασης: 60 λεπτά.
- (3) Διάρκεια εξέτασης για τους υπολοίπους: 100 λεπτά.