

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
16/09/15

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Έστω η καμπύλη:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(at), \sin(at), bt), \quad t \in (0, 2\pi), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

- (1) **(0.25)** Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας \mathbf{v} και το διάνυσμα επιτάχυνσης \mathbf{a} της \mathbf{r} είναι μεταξύ τους κάθετα.
- (2) **(0.5)** Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα \mathbf{v} , \mathbf{a} .
- (3) **(1.25)** Εάν $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, τότε δείξτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας ότι η $f \circ \mathbf{r}$ έχει σταθερή παράγωγο. Αν η f είναι συνάρτηση που παριστάνει τη θερμοκρασία του χώρου, τι μπορείτε να πείτε για τη μεταβολή της επάνω στην καμπύλη \mathbf{r} ; Δικαιολογήστε.

2. Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = y^3 + x^2y$.

- (1) **(0.75)** Εξασφαλίζει το κριτήριο της Εσσιανής την ύπαρξη τοπικών ακροτάτων της f ;
- (2) **(1.25)** Υπολογίστε τα με όποιον τρόπο μπορείτε τα ολικά ακρότατα της f υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_T (x^2 + y^2) dx dy,$$

- (1) **(1.5)** όταν T είναι το τρίγωνο που ορίζουν τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 0)$ και
- (2) **(1.5)** όταν T είναι ο μοναδιαίος δίσκος $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Έστω $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ η πυκνότητα μάζας ανά μονάδα όγκου του κύβου $Q = [-1, 1]^3$ και M η μάζα του:

$$M = \iiint_Q \delta dx dy dz.$$

- (1) **(1.5)** Αν $\delta_1(x, y, z) = x^2$, $\delta_2(x, y, z) = y^2$, $\delta_3(x, y, z) = z^2$ είναι πυκνότητες του κύβου, με αντίστοιχες μάζες M_1, M_2, M_3 , τότε δείξτε ότι $M_1 = M_2 = M_3 = M/3$. Κατόπιν, υπολογίστε (σε μία γραμμή) την M .
- (2) **(1.5)** Χωρίς πράξεις, δείξτε ότι οι πρώτες ροπές του κύβου

$$M_{yz} = \iiint_Q x \delta dx dy dz, \quad M_{xz} = \iiint_Q y \delta dx dy dz, \quad M_{xy} = \iiint_Q z \delta dx dy dz,$$

είναι ίσες. Δικαιολογήστε γιατί τό κέντρο μάζας του Q είναι το $(0, 0, 0)$.

Οδηγίες

- (1) Υπάρχουν 10 μονάδες. Άριστα το 10.
- (2) Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά.