ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι βασικές έννοιες

1.1 Αόριστες έννοιες, αξιώματα

> Αυτό ισχύει ακόμη και για το ίδιο μας το εγώ: το αντιλαμβανόμαστε μόνον ως εκδήλωση, όχι ως κάτι που μπορεί να υπάρχει καθ' εαυτό.
>
> *Thomas Mann, Schopenhauer*

Οι έννοιες, τουλάχιστον οι μαθηματικές, είναι σαν τις μορφές ύλης, που διασπώνται σε μόρια, αυτά σε άτομα που με τη σειρά τους διασπώνται στα στοιχειώδη σωματίδια κ.λπ. Στη γεωμετρία η διάσπαση σε ολοένα απλούστερες έννοιες καταλήγει στις λεγόμενες **αόριστες έννοιες**. Έννοιες που είναι τόσο απλές και οικείες από την εμπειρία μας, ώστε δεν μπορούμε να βρούμε πιο απλές με τη βοήθεια των οποίων να τις περιγράψουμε ([Hel76]). Τέτοιες έννοιες στην Γεωμετρία είναι το **σημείο**, το **επίπεδο**, ο **χώρος**, η **ευθεία**, η έννοια του σημείου **μεταξύ** δύο άλλων σημείων και η έννοια της **ισότητας** δύο *σχημάτων*.

Μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αυτές τις έννοιες βάσει των **ιδιοτήτων** τους ή **αξιωμάτων** που περιγράφουν κάποια χαρακτηριστικά τους και τα οποία *αποδεχόμεθα χωρίς απόδειξη*. Ξεκινάμε λοιπόν με τις αόριστες έννοιες. Περιγράφουμε τις βασικές ιδιότητες τους με αξιώματα και από 'κει και πέρα, συνδυάζοντας τις βασικές ιδιότητες με τη λογική, συμπεραίνουμε άλλες ιδιότητες, τα θεωρήματα ή προτάσεις και τα πορίσματα (άμεσες λογικές συνέπειες των θεωρημάτων). Τα μέχρις ενός σημείου αποδειχθέντα θεωρήματα μαζί με τα αξιώματα, χρησιμοποιούνται για να συμπεράνουμε νέες ιδιότητες, δηλαδή νέα θεωρήματα.

Με τον τρόπο αυτό χτίζουμε σιγά-σιγά ένα καλά οργανωμένο και δομημένο πνευματικό οικοδόμημα που συγκροτεί τη γνώση μας στην Γεωμετρία. Εάν σε κάποιο σημείο κάνουμε μια παραδοχή λ.χ. $A = B$ και, στηριζόμενοι στη λογική, καταλήξουμε ότι αυτό οδηγεί σε αντίφαση προς κάποιο αξίωμα ή εν τω μεταξύ αποδειχθέν θεώρημα, τότε λέμε ότι η υπόθεσή μας οδηγεί σε άτοπο και είμαστε υποχρεωμένοι να δεχθούμε ότι ισχύει η λογική άρνηση της ιδιότητας (στο παράδειγμα $A \neq B$). Η μέθοδος αυτή του συλλογισμού λέγεται **εις άτοπον απαγωγή** και χρησιμοποιείται κατά κόρον στην γεωμετρία.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία εξετάζει τις ιδιότητες σχημάτων στο χώρο και το επίπεδο και κυρίως αυτές που σχετίζονται με μετρήσεις. Ως **σχήμα** θεωρούμε οποιαδήποτε συλλογή σημείων του επιπέδου (επίπεδο σχήμα) ή του χώρου (σχήμα στο χώρο). Μετράμε μήκη, γωνίες και εμβαδά. Στο χώρο μετράμε και όγκους. Συνήθως το μάθημα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, που ονομάζεται **επιπεδομετρία**, εξετάζονται ιδιότητες σχημάτων του επιπέδου, όπως το τρίγωνο, το τετράγωνο, ο κύκλος κ.λπ. Στο δεύτερο μέρος, που ονομάζεται **στερεομετρία**, εξετάζονται ιδιότητες των σχημάτων του χώρου, όπως ο κύβος, η σφαίρα κ.λπ.

Σχόλιο-1 Τα αξιώματα που θα επιλέξουμε ως βασικές ιδιότητες και σημείο εκκίνησης της μελέτης μας, δεν είναι πραγματικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ορισμένα από αυτά είναι συνέπειες των άλλων. Επομένως, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με λιγότερα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά επαρκή για να αποδείξουμε όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες ως θεωρήματα. Αυτό ωστόσο θα είχε τη συνέπεια να χρονοτριβήσουμε σε πολύ απλές ιδιότητες, αποδεικνύοντάς τις και αυτές ως συνέπειες των λίγων αξιωμάτων μας.

Προτίμησα λοιπόν να ενσωματώσω κάποιες από αυτές τις ιδιότητες στα αξιώματα, με τη φιλοσοφία ότι η αποκάλυψη πιο κρυφών ιδιοτήτων δημιουργεί περισσότερο ενδιαφέρον από την επιβεβαίωση των προφανών. Για μια διαφορετική πορεία, όπου εξετάζεται λεπτομερώς το θέμα των αξιωμάτων, μπορεί κανείς να δει το πολύ γνωστό βιβλίο [Hil03] του Hilbert 1862-1943, που είναι αφιερωμένο εξ' ολοκλήρου στη συζήτηση των αξιωμάτων, την ανεξαρτησία τους και τη μεταξύ τους μη-αντιφατικότητα. Από αυτό το βιβλίο προέρχονται και τα περισσότερα των αξιωμάτων της ευθείας που διατυπώνω παρακάτω. Αντικαθιστώ ωστόσο μερικά από αυτά με αξιώματα από το σύστημα του Birkhoff 1884-1944 ([Bir32]), που εξασφαλίζουν το ότι οι ευθείες είναι, στην ουσία, αντίγραφα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Ας σημειωθεί πάντως, ότι η θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορεί να γίνει και με πολύ λίγα αξιώματα. Ο Hilbert, στο προαναφερθέν βιβλίο του, καθώς και ο Cairns 1904-1982 ([Cai33]), δίδουν συστήματα με τέσσερα μόνον αξιώματα. Ο Bachmann 1909-1982 ([Bac73]) δίδει ένα σύστημα πέντε αξιωμάτων. Σε όλα αυτά τα συστήματα όμως υπεισέρχονται πιο σύνθετες μαθηματικές δομές (τοπολογικοί χώροι, μετασχηματισμοί, ομάδες κ.α.).

Σχόλιο-2 Τα στοιχεία του Ευκλείδη (περίπου 325-265 π.Χ.) ([Hei85], [Hea08]) αρχίζουν με την παράθεση 23 ορισμών οι 4 πρώτοι εκ των οποίων και ο τελευταίος είναι οι εξής:

(1) Σημείον έστιν, ου μέρος ουθέν.

(2) Γραμμή δε μήκος απλατές.

(3) Γραμμής δε πέρατα σημεία.

(4) Ευθεία γραμμή εστιν, ήτις εξ ίσου τοις εφ' εαυτής σημείοις κείται.

... ...

(23) Παράλληλοι εισίν ευθείαι, αίτινες εν τω αυτώ επιπέδω ούσαι και εκβαλλόμεναι εις άπειρον εφ' εκάτερα τα μέρη επί μηδέτερα συμπίπτουσιν αλλήλαις.

Αμέσως μετά τους 23 ορισμούς ακολουθούν τα 5 **Αιτήματα**, που εμείς ονομάζουμε αξιώματα:

1. Ηιτήσθω από παντός σημείου επί παν σημείον ευθείαν γραμμήν αγαγείν.
2. Και πεπερασμένην ευθείαν κατά το συνεχές επ' ευθείας εκβαλείν.
3. Και παντί κέντρω και διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Και πάσας τας ορθάς γωνίας ίσας αλλήλας είναι.
5. Και εάν εις δύο ευθείας ευθεία εμπίπτουσα τας ενός και επί τα αυτά μέρη γωνίας δύο ορθών ελάσσονας ποιή, εκβαλλομένας τας δύο ευθείας επ' άπειρον συμπίπτειν, εφ' ά μέρη εισίν αι των δύο ορθών ελάσσονες.

Στους ορισμούς αυτούς περιέχονται, τόσο έννοιες που εμείς περιγράψαμε ως *αόριστες* (1,2,4), όσο και κανονικοί ορισμοί, όπως τους δίνουμε και σήμερα (3,23). Τα πέντε αξιώματα του Ευκλείδη δυστυχώς δεν επαρκούν για την απόδειξη όλων των προτάσεων που ακολουθούν στο βιβλίο του. Συχνά χρησιμοποιεί κάποιες ιδιότητες που δεν προκύπτουν από τα πέντε αυτά αξιώματα, που είναι όμως σωστές. Απλά χρειάζεται η προσθήκη και άλλων αξιωμάτων, ώστε να προκύψει αυτό που σήμερα λέμε *πλήρες σύστημα αξιωμάτων*, το οποίο είναι ικανό να στηρίξει τις αποδείξεις όλων των ιδιοτήτων των σχημάτων που ανακαλύπτουμε και να τις βάλει σε μια λογική σειρά ([You17, *σ.* 36]).

Σχετικά με το λίγο χρόνο που αναλίσκει ο Ευκλείδης στους ορισμούς και τα αξιώματα συμφωνώ, γιατί κατ' επανάληψιν έχω παρατηρήσει ότι όταν ο μαθητής πολιορκείται με διασαφήσεις και ανάλυση λεπτομερειών για έννοιες των οποίων έχει μια φυσική διαίσθηση, τότε αρχίζει να αμφιβάλλει και για αυτά που ήξερε και να μπερδεύεται περισσότερο, αντί να φωτίζεται. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή, ώστε περισσότερο να ενισχυθεί η φυσική του διαίσθηση για αυτά που καταλαβαίνει με κάποιο τρόπο, παρά να αμφισβητηθεί η διαίσθησή του και οι προηγούμενες εμπειρικές γνώσεις του.

Ακολουθώντας λοιπόν τον Ευκλείδη, δεν θα σταθώ ιδιαίτερα στις αόριστες έννοιες και τα αξιώματα ([You17, *σ.* 165], [Log80]). Θα δώσω ένα σύστημα πλήρες, ικανό να στηρίξει όλες τις μετέπειτα προτάσεις μας και θεωρήματα. Εμπιστευόμενος, ωστόσο, τη διαίσθηση του αναγνώστη, δεν θα συζητήσω ιδιαίτερα τις αλληλεξαρτήσεις των αξιωμάτων αυτών και τις αόριστες έννοιες στις οποίες αυτά αναφέρονται.

1.2 Ευθεία και ευθύγραμμο τμήμα

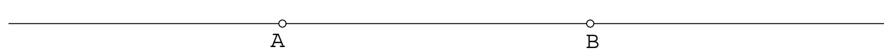
> Η ευθεία γραμμή είναι κατηγόρημα του απείρου. Επίσης ο άνθρωπος που προαισθάνεται το άπειρο το αναπαράγει στα έργα του.
>
> *Honore de Balzac, Η Ανθρώπινη Κωμωδία*

Το επίπεδο αποτελείται από **σημεία** που συμβολίζομε με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ, ... ή κεφαλαία με τόνους A', B', Γ', ... ή κεφαλαία με δείκτες A_1, A_2, ... κ.λπ. Το σημαντικότερο και ένα από τα πιο απλά σχήματα του επιπέδου είναι η **ευθεία** που συμβολίζουμε με μικρά γράμματα ε, ζ, η, ... ή

Σχήμα 1.2.1: Ευθεία ε

γράμματα με τόνους ε', ζ', ... ή γράμματα με δείκτες ε_1, ε_2, ... κ.λπ. Για τις ευθείες δεχόμαστε τις εξής αρχικές ιδιότητες (αξιώματα).

Αξίωμα 1.2.1 *Δύο διαφορετικά σημεία A, B ορίζουν μία ακριβώς ευθεία που συμβολίζομε με AB.*



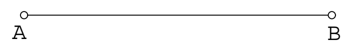
Σχήμα 1.2.2: Ευθεία AB

Αξίωμα 1.2.2 *Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία. Για κάθε ευθεία υπάρχουν άπειρα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε αυτήν. Για κάθε σημείο υπάρχουν άπειρες ευθείες που δεν διέρχονται από αυτό.*

Αξίωμα 1.2.3 *Κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη που λέγονται* **ημιεπίπεδα***, τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία με την ευθεία. Μία ευθεία που έχει δύο σημεία A και B σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας ε τέμνει την ευθεία ε (το πρώτο θεώρημα παρακάτω λέει ότι υπάρχει τότε ένα ακριβώς σημείο τομής της ε με την ευθεία AB). Συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη* **μεριά** *της ευθείας, εννοώντας ένα από τα δύο ημιεπίπεδα αυτής.*

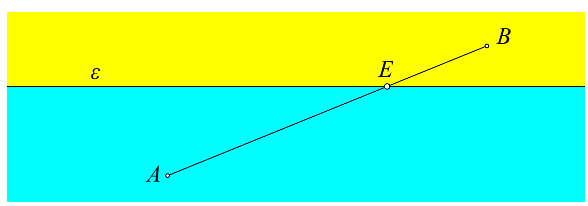
Σχήμα 1.2.3: Ημιεπίπεδα οριζόμενα από μία ευθεία

Αξίωμα 1.2.4 *Δύο σημεία A, B μιας ευθείας ε ορίζουν ένα* **ευθύγραμμο τμήμα** *που συμβολίζουμε επίσης με AB. Το AB αποτελείται από τα A, B καθώς και όλα τα σημεία που ευρίσκονται* **μεταξύ** *του A και του B. Τα A και B λέγονται* **άκρα** *του ευθυγράμμου τμήματος. Τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος, εκτός των άκρων, λέμε ότι αποτελούν το* **εσωτερικό** *του ευθυγράμμου τμήματος.*



Σχήμα 1.2.4: Ευθύγραμμο τμήμα AB

Αξίωμα 1.2.5 *Αν τα σημεία A και B ευρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας ε, τότε και όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος AB περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Αν τα σημεία A και B ευρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας ε, τότε το σημείο τομής E της ευθείας ε και της ευθείας AB ευρίσκεται μεταξύ των A και B.*



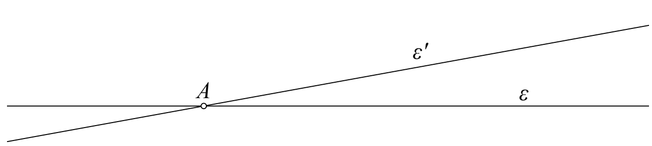
Σχήμα 1.2.5: A και B σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ε

Σχόλιο-1 Στο Αξίωμα 1.2.4 η λέξη **μεταξύ** είναι αόριστη. Θα γίνει σαφής όμως στην επόμενη παράγραφο με τη βοήθεια της έννοιας του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος.

Σχόλιο-2 Η χρήση του ιδίου συμβόλου AB για το ευθύγραμμο τμήμα καθώς και την ευθεία που ορίζεται από τα A και B δεν πρέπει να μας παραπλανά. Κάθε φορά η σημασία του συμβόλου θα προκύπτει από τα συμφραζόμενα. Συχνά θα γράφουμε για την ευθεία $\varepsilon = AB$, θεωρώντας ότι αυτό το σύμβολο αντιπροσωπεύει τη φράση **η ευθεία** ε **που ορίζεται από τα σημεία** A **και** B. Συχνά επίσης θα θεωρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB καθορίζει μια **κατεύθυνση** επί της ευθείας AB και ότι το A είναι η **αρχή** και το B είναι το **πέρας** (ή τέλος) του τμήματος AB.

Σχήμα 1.2.6: Παράλληλες AB και $A'B'$

Παράλληλες ονομάζουμε δύο ευθείες που δεν τέμνονται. Συχνά την ευθεία, στην οποία περιέχεται ένα ευθύγραμμο τμήμα, ονομάζουμε **φορέα** του ευθυγράμμου τμήματος. **Παράλληλα** λέμε δύο ευθύγραμμα τμήματα των οποίων οι φορείς είναι ευθείες παράλληλες. **Τέμνουσα**της ευθείας ε λέμε μία ευθεία ε', διαφορετική της ε, που τέμνει την ε.

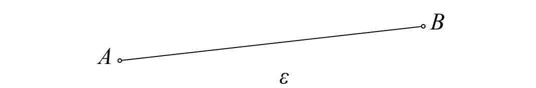


Σχήμα 1.2.7: Τεμνόμενες ευθείες ε και ε'

Πρόταση 1.2.1 *Δύο διαφορετικές ευθείες ή είναι παράλληλες ή τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.*

Απόδειξη: Στην Πρόταση 1.13.1 θα δούμε ότι υπάρχουν όντως παράλληλες ευθείες. Αν οι δύο ευθείες ε και ε' δεν τέμνονται, τότε είναι εξ ορισμού παράλληλες. Αν τέμνονται, τότε θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο A. Τούτο διότι, αν είχαν και δεύτερο σημείο τομής B, διαφορετικό του A, θα είχαμε δύο διαφορετικές ευθείες ε και ε' διερχόμενες από τα δύο σημεία A και B, που είναι αδύνατον διότι αντιφάσκει στο Αξίωμα 1.2.1, ο.ε.δ.

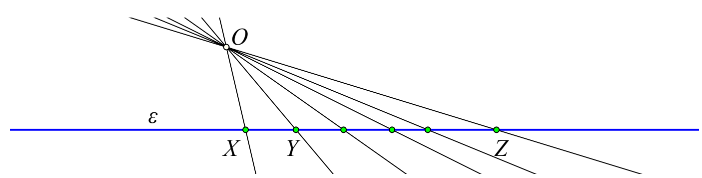
Άσκηση 1.2.1 *Δίδεται ευθεία ε. Δείξε ότι, αν το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν τέμνει την ευθεία ε, τότε τα σημεία A και B περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.*



Σχήμα 1.2.8: A, B από την ίδια μεριά της ε

Υπόδειξη: Χρήση της εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε ότι το AB δεν τέμνει την ε και τα A, B περιέχονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ε. Τότε, κατά το Αξίωμα 1.2.5, το ευθύγραμμο τμήμα AB θα τέμνει την ε σε ένα σημείο E, αντιφάσκοντας στην υπόθεση.

Άσκηση 1.2.2 *Δείξε ότι για κάθε σημείο O του επιπέδου υπάρχουν άπειρες ευθείες διερχόμενες από αυτό.*



Σχήμα 1.2.9: Απειρία ευθειών δια του O

Υπόδειξη: Θεώρησε μία ευθεία ε που δεν διέρχεται από το O. Κατά το Αξίωμα 1.2.2, υπάρχει μία τέτοια ευθεία. Όρισε κατόπιν τις ευθείες OX, OY, ... κ.λπ. που διέρχονται από το O και ένα σημείο αντίστοιχα X, Y,..., Z της ε. Και πάλι κατά το Αξίωμα 1.2.2, υπάρχουν άπειρα σημεία X, Y,..., Z επί της ε και κάθε ένα από αυτά ορίζει μια διαφορετική ευθεία που διέρχεται από το O.

1.3 Μήκος, απόσταση

> Μίλησα στην αρχή για ορισμούς. Για να τελειώσω, θα ήθελα να πω ότι κάνουμε ένα πολύ συνηθισμένο λάθος, όταν θεωρούμε πως δεν γνωρίζουμε κάτι επειδή δεν είμαστε ικανοί να το ορίσουμε.
>
> *Jorge Luis Borges, Η τέχνη του στίχου*

Τα αξιώματα αυτής της παραγράφου συνδέουν τις ευθείες με τους **πραγματικούς αριθμούς** μέσω της έννοιας της *απόστασης* δύο σημείων, αποσαφηνίζουν την έννοια του *σημείου μεταξύ δύο άλλων σημείων*, καθώς και την έννοια του ευθυγράμμου τμήματος AB, που αποτελείται από όλα τα σημεία μεταξύ των A, B.

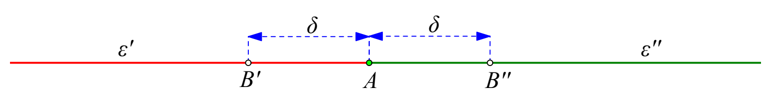
Αξίωμα 1.3.1 *Για κάθε ζεύγος σημείων A και B ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός $|AB| \geq 0$ που ονομάζουμε* **απόσταση** *των σημείων και ικανοποιεί τις ιδιότητες $|AB| = |BA|$ και $|AB| = 0$ τότε και μόνον, όταν τα σημεία αυτά ταυτίζονται.*

Σχήμα 1.3.1: $|AB| = |AE| + |EB|$

Δοθέντων δύο σημείων A και B, λέμε ότι το σημείο E ευρίσκεται **μεταξύ** των ή **ανάμεσα** στα A και B (Σχήμα 1.3.1), όταν περιέχεται στην ευθεία των A, B και ισχύει

$$|AE| + |EB| = |AB|.$$

Αξίωμα 1.3.2 *Για κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων A, B και E της ίδιας ευθείας, ένα εκ των τριών είναι ανάμεσα στα άλλα δύο. Αν το E είναι μεταξύ των A και B, τότε $|AB| = |AE| + |EB|$. Και αντίστροφα, αν ισχύει αυτή η σχέση, τότε το E είναι μεταξύ των A και B.*



Σχήμα 1.3.2: Σημεία σε απόσταση δ από το άκρο αντικειμένων ημιευθειών

Αξίωμα 1.3.3 *Ένα σημείο A ευθείας ε χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη ε' και ε'' που έχουν μοναδικό κοινό σημείο το A και λέγονται* **ημιευθείες** *με* **άκρο** *ή* **αρχή** *το A. Για κάθε θετικό αριθμό δ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο B' στην ε' με $|B'A| = \delta$ και ένα ακριβώς σημείο B'' στην ε'' με $|B''A| = \delta$. Το A είναι το* **μέσον** *του ευθυγράμμου τμήματος $B'B''$.*

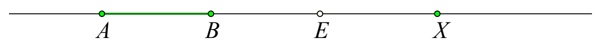
Εάν τα σημεία A, B' και B'' περιέχονται στην ίδια ευθεία ε και ε', ε'' συμβολίζουν τις ημιευθείες της ε με άκρο το A, λέμε ότι τα B', B'' είναι σε **διαφορετικές μεριές** του A όταν το ένα περιέχεται στην ε' και το άλλο στην ε'' (Σχήμα 1.3.2). Λέμε ότι τα B' και B'' είναι από την **ίδια μεριά** του A όταν περιέχονται και τα δύο σε μία από τις ε' και ε''.

Μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζουμε την απόσταση $|AB|$ των άκρων του. Λέμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ της ίδιας ευθείας ή διαφορετικών ευθειών είναι **ίσα** όταν έχουν το ίδιο μήκος.

Οι δύο ημιευθείες που ορίζονται από το σημείο A επί της ευθείας ε λέγονται **αντικείμενες**. **Παράλληλες** ονομάζουμε δύο ημιευθείες που περιέχονται σε παράλληλες ευθείες.

Σχόλιο Το Αξίωμα 1.3.3 των ευθειών σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα οποιουδήποτε μήκους θέλουμε. Η πρακτική κατασκευή λ.χ. περιοριζόμενοι μόνο στα δύο όργανα σχεδίασης του κανόνα (χάρακα) και του διαβήτη, όπως συνηθίζεται, είναι ένα άλλο θέμα που θα μας απασχολήσει κατά καιρούς. Π.χ. η κατασκευή του μέσου M ενός δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος AB με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη απαιτεί γνώση των ιδιοτήτων του κύκλου που δεν έχουμε μάθει ακόμη. Ωστόσο η απόδειξη της ύπαρξης του M βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων είναι απλή.

Άσκηση 1.3.1 *Έστω ότι B και E είναι δύο σημεία στην ίδια ημιευθεία AX με άκρο το A. Δείξε ότι η $|AE| > |AB|$ συνεπάγεται ότι το B είναι μεταξύ των A και E. Και αντίστροφα, αν το B είναι ανάμεσα στο A και το E, τότε ισχύει η προηγούμενη σχέση.*



Σχήμα 1.3.3: Το B ανάμεσα στο A και το E

Υπόδειξη: Έστω ότι το B δεν είναι μεταξύ των A και E. Τότε ή το B θα ταυτίζεται με το E και συνεπώς, $|AB| = |AE|$, που είναι άτοπο, ή το E θα είναι μεταξύ των A και B οπότε, κατά το Αξίωμα 1.3.2, θα ισχύει $|AE| + |EB| = |AB|$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $|AB| > |AE|$, αντίθετα με την υπόθεση.

Άσκηση 1.3.2 *(Διπλασιασμός ευθυγράμμου τμήματος) Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα AB. Δείξε ότι στην ευθεία AB υπάρχουν δύο σημεία E και Z έτσι ώστε το B να είναι το μέσον του AE και το A να είναι το μέσον του ZB.*

Σχήμα 1.3.4: Διπλασιασμός του AB

Υπόδειξη: Πάρε το E επί της ημιευθείας με άκρο το B που δεν περιέχει το A και σε απόσταση $|AB|$ από το B. Ανάλογα πράξε για το Z.

Άσκηση 1.3.3 *Δείξε ότι, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB, υπάρχει ένα ακριβώς σημείο M (το μέσον του AB) έτσι ώστε $|AM| = |MB|$.*

Υπόδειξη: Αν $|AB| = \lambda$, τότε το σημείο M σε απόσταση $\lambda/2$ από το A προς τη μεριά του B, που εξασφαλίζεται από το Αξίωμα 1.3.3, είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 1.3.4 *Δείξε ότι, αν δύο σημεία A και B είναι από την ίδια μεριά ευθείας ε, τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν τέμνει την ε.*

Υπόδειξη: Αν το AB έτεμνε την ε, τότε το σημείο τομής Γ θα ήταν διαφορετικό των A και B, άρα θα ήταν μεταξύ αυτών και θα είχαμε αντίφαση στο Αξίωμα 1.2.5.

Άσκηση 1.3.5 *Δείξε ότι μία ευθεία ε' είναι παράλληλος της ε τότε και μόνον, όταν ένα εκ των δύο ημιεπιπέδων της ε περιέχει κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων της ε'.*

Υπόδειξη: Αν υπάρχουν δύο σημεία A και B της ε' περιεχόμενα σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ε, τότε κατά το Αξίωμα 1.2.5, η ε' θα τέμνει την ε. Αντίστροφα, αν ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της ε περιέχει όλα τα δυνατά ζεύγη σημείων της ε', τότε αυτή δεν μπορεί να τέμνει την ε. Αν την έτεμνε στο σημείο A, τότε το A θα όριζε δύο αντικείμενες ημιευθείες επί της ε' και επιλέγοντας από ένα σημείο σε κάθε ημιευθεία θα βρίσκαμε δύο σημεία της ε' σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ε.

Άσκηση 1.3.6 *Δείξε ότι τα σημεία B και Γ της ευθείας ε είναι από την ίδια μεριά του σημείου A της ε, τότε και μόνον, όταν $|B\Gamma| = ||AB| - |A\Gamma||$.*

Υπόδειξη: Αν τα B, Γ είναι στην ίδια ημιευθεία του A, τότε ή το B θα είναι μεταξύ του A και Γ, οπότε $|A\Gamma| = |AB| + |B\Gamma|$, ή το Γ θα είναι μεταξύ των A και B, οπότε $|AB| = |A\Gamma| + |\Gamma B|$. Συνεπώς, και στις δύο περιπτώσεις $|B\Gamma| = ||AB| - |A\Gamma||$, δηλαδή το ζητούμενο. Παρόμοιος συλλογισμός αποδεικνύει και το αντίστροφο.

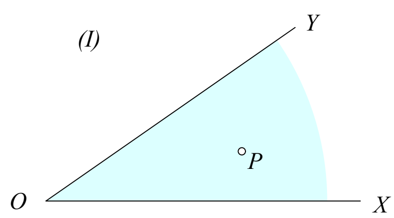
Άσκηση 1.3.7 *Έστω M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB. Δείξε ότι, αν το σημείο mg είναι στο εσωτερικό του AB, τότε η απόσταση $|\Gamma M| = \frac{1}{2}||\Gamma A| - |\Gamma B||$. Εάν το Γ είναι στην ευθεία AB αλλά εκτός του τμήματος AB, τότε $|\Gamma M| = \frac{1}{2}(|\Gamma A| + |\Gamma B|)$.*

1.4 Γωνίες

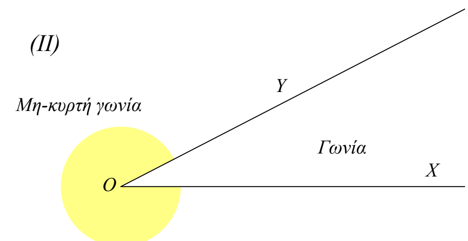
Είπε ο Διδάσκαλος: Όποιος δεν φλέγεται απ' το ζήλο, δεν τον φωτίζω. Όποιος δεν πάσχει να εκφραστεί, δεν τον κατατοπίζω. Αν σε κάποιον αποκαλύψω τη μία γωνία και δεν μου επιστρέψει με τις άλλες τρεις, δεν του επαναλαμβάνω το μάθημα.

Κομφούκιος, Ανάλεκτα 7.8

Δύο ημιευθείες OX, OY με κοινό άκρο O και μη-περιεχόμενες στην ίδια ευθεία, χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη και ορίζουν μία **κυρτή γωνία** ή απλά **γωνία** και μία **μη-κυρτή γωνία**. **Κυρτή γωνία**



Σχήμα 1.4.1: Γωνία $\widehat{XOY}$

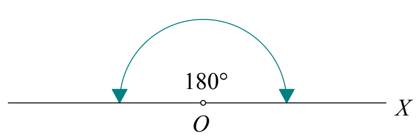


Μη-κυρτή γωνία $\widehat{XOY}$

ή απλά **γωνία** λέγεται το σχήμα που συμβολίζουμε με $\widehat{XOY}$ και αποτελείται από τις δύο ημιευθείες OX και OY μαζί με το ένα από τα δύο μέρη του επιπέδου που λέγεται εσωτερικό της γωνίας. Το **εσωτερικό** της γωνίας (Σχήμα 1.4.1-I) είναι το μέρος του επιπέδου που αποτελείται από τα σημεία P που ικανοποιούν τις δύο ιδιότητες:

1. το P και η ημιευθεία OY είναι από την ίδια μεριά της ευθείας OX,
2. το P και η ημιευθεία OX είναι από την ίδια μεριά της ευθείας OY.

Το σημείο O λέγεται **κορυφή** της γωνίας. Οι ημιευθείες OX, OY λέγονται **πλευρές της γωνίας** . **Μη-κυρτή γωνία** λέγεται το σχήμα που ορίζεται πάλι από τις ημιευθείες OX και OY και συνίσταται από το υπόλοιπο μέρος του επιπέδου εκτός του εσωτερικού της γωνίας $\widehat{XOY}$ και των ημιευθειών που την ορίζουν (Σχήμα 1.4.1-II). Το υπόλοιπο αυτό μέρος του επιπέδου ονομάζουμε **εσωτερικό** της μη-κυρτής γωνίας $\widehat{XOY}$, ή **εξωτερικό** της κυρτής γωνίας $\widehat{XOY}$.
Συχνά θα μιλάμε για γωνίες χωρίς να κάνουμε διάκριση για το αν είναι κυρτή ή μη-κυρτή. Το ακριβές νόημα, δηλαδή αν πρόκειται για κυρτή ή μη-κυρτή, θα προκύπτει τότε από τα συμφραζόμενα. Στην περίπτωση που οι δύο ημιευθείες περιέχονται στην ίδια ευθεία ορίζουμε τις επόμενες ειδικές γωνίες.



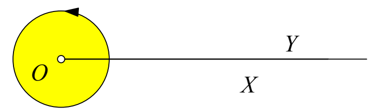
Σχήμα 1.4.2: Πεπλατυσμένη γωνία

Μηδενική γωνία

Πεπλατυσμένη γωνία ή **ευθεία γωνία** ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο αντικείμενες ημιευθείες. Οποιοδήποτε από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία OX μπορεί να θεωρηθεί εσωτερικό ή εξωτερικό της πεπλατυσμένης γωνίας.

Μηδενική γωνία ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ταυτιζόμενες ημιευθείες OX και OY. Θεωρούμε ότι η γωνία αυτή δεν έχει εσωτερικό, ενώ ολόκληρο το επίπεδο πλην της OX θεωρείται το εξωτερικό αυτής της γωνίας.

Πλήρη στροφή ή **πλήρη γωνία** ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ταυτιζόμενες ημιευθείες OX και OY (Σχήμα 1.4.3). Εδώ ως εσωτερικό της γωνίας θεωρούμε ολόκληρο το επίπεδο πλην της OX, ενώ δεν υπάρχει εξωτερικό.
Οι βασικές ιδιότητες (αξιώματα) των γωνιών είναι οι εξής:



Σχήμα 1.4.3: Πλήρης στροφή

Αξίωμα 1.4.1 *Για κάθε γωνία (κυρτή ή μή) $\widehat{XOY}$ ορίζεται ένας αριθμός $|\widehat{XOY}| = |\widehat{YOX}| \geq 0$ που λέγεται* **μέτρο της γωνίας σε μοίρες** . *Ισχύει $|\widehat{XOY}| = 0$ τότε και μόνον όταν η γωνία είναι η μηδενική.*

Σχήμα 1.4.4: Ίσες γωνίες εκατέρωθεν της OX $\qquad$ $|\widehat{XOY}| = |\widehat{XOP}| + |\widehat{POY}|$

Αξίωμα 1.4.2 *Για κάθε αριθμό ω με $0 < \omega < 180°$ υπάρχουν δύο ακριβώς ημιευθείες OA, OB στις δύο πλευρές της ευθείας OX έτσι ώστε οι γωνίες $\widehat{XOA}$ και $\widehat{XOB}$ να ικανοποιούν $|\widehat{XOA}| = |\widehat{XOB}| = \omega$ (Σχήμα 1.4.4-I). Η πεπλατυσμένη γωνία έχει μέτρο 180 μοίρες.*

Εκ παραδόσεως το μέτρο ω σε μοίρες συμβολίζεται με $\omega°$. Έτσι γωνία $30°$ σημαίνει γωνία 30 μοιρών. Το 1/60-οστό της μοίρας λέγεται **πρώτο** της μοίρας ή **λεπτό** και συμβολίζεται με ένα τόνο. Το 1/60-οστό του λεπτού λέγεται **δεύτερο** της μοίρας και συμβολίζεται με δύο τόνους. Έτσι, $30°23'11''$ συμβολίζει το μέτρο που ισούται με $30 + \frac{23}{60} + \frac{11}{3600}$ μοίρες.

Δύο γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{A'B'\Gamma'}$ λέγονται **ίσες**, τότε και μόνον, όταν τα μέτρα τους είναι ίσα: $|\widehat{AB\Gamma}| = |\widehat{A'B'\Gamma'}|$.

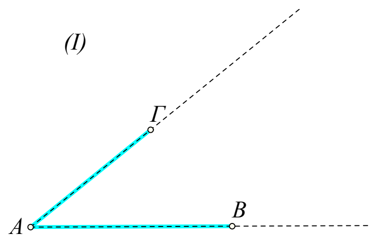
Σχόλιο-1 Συχνά, στα επόμενα, θα παραλείπουμε τις απόλυτες τιμές και για δύο ίσες γωνίες θα γράφουμε απλά $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A'B'\Gamma'}$, αντί για $|\widehat{AB\Gamma}| = |\widehat{A'B'\Gamma'}|$.

Αξίωμα 1.4.3 *Για κάθε σημείο P στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{XOY}$ (κυρτής ή μη-κυρτής), τα μέτρα των γωνιών $\widehat{XOY}$, $\widehat{XOP}$ και $\widehat{POY}$ ικανοποιούν τη $\widehat{XOY} = \widehat{XOP} + \widehat{POY}$. Σε κάθε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η γωνία $\widehat{XOY}$ είναι το* **άθροισμα** *των γωνιών $\widehat{XOP}$ και $\widehat{POY}$. Συχνά για να δηλώσουμε μια τέτοια σχέση θα παραλείπουμε τα απόλυτα και θα γράφουμε $\widehat{XOY} = \widehat{XOP} + \widehat{POY}$.*

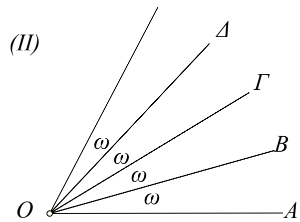
Δύο γωνίες, που έχουν κοινή κορυφή και μία πλευρά επίσης κοινή και μή τεμνόμενα αντίστοιχα εσωτερικά (όπως οι $\widehat{XOP}$ και $\widehat{POY}$ του σχήματος 1.4.4), λέγονται **εφεξής**. Χωρίζοντας μία μη-κυρτή γωνία σε δύο μέρη, μέσω ενός σημείου στο εσωτερικό της, και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αξίωμα, βλέπουμε ότι οι μη-κυρτές γωνίες έχουν μέτρο $\omega > 180°$. Το αξίωμα εξασφαλίζει επίσης την ύπαρξη της **διχοτόμου**, που είναι ημιευθεία διερχόμενη από την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες (εφεξής) γωνίες.

Άσκηση 1.4.1 *(Ύπαρξη Διχοτόμου) Δείξε ότι για κάθε γωνία $\widehat{XOY}$ υπάρχει μία ακριβώς ημιευθεία OZ στο εσωτερικό της που τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες $\widehat{XOZ}$, $\widehat{ZOY}$ με $|\widehat{XOZ}| = |\widehat{ZOY}| = |\widehat{XOY}|/2$.*

Γωνία δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και $A\Gamma$, που έχουν κοινό άκρο το σημείο A, λέμε τη γωνία που σχηματίζεται από τις αντίστοιχες ημιευθείες AB και $A\Gamma$ (Σχήμα 1.4.5-I).



Σχήμα 1.4.5: Γωνία τμημάτων AB και $A\Gamma$



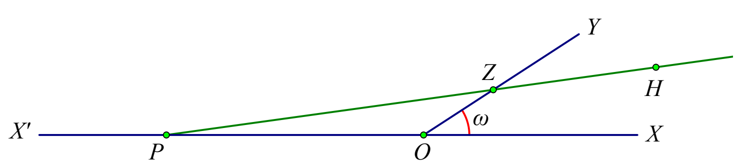
Άθροισμα ίσων γωνιών

Άσκηση 1.4.2 *Βρες τη διχοτόμο μιας πεπλατυσμένης γωνίας $\widehat{XOY}$. Δείξε ότι το μέτρο μιας πλήρους στροφής είναι 360 μοίρες.*

Άσκηση 1.4.3 *Ξεκινώντας από γωνία $\widehat{AOB}$ μέτρου ω, κατασκευάζουμε ίσες με αυτήν εφεξής προς το ίδιο μέρος $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, κ.λπ. Για ποια μέτρα ω η διαδικασία αυτή μετά από ν βήματα ορίζει γωνία $\widehat{AO\Omega}$, της οποίας η πλευρά $O\Omega$ συμπίπτει με την αρχική OA (Σχήμα 1.4.5-II);*

Άσκηση 1.4.4 *Έστω γωνία $\widehat{XOY}$ με μέτρο $|\widehat{XOY}| = \alpha$ και P σημείο στο εσωτερικό της γωνίας. Δείξε ότι $|\widehat{XOP}| < \alpha$. Αντίστροφα δείξε ότι για κάθε θετικό $\beta < \alpha$ υπάρχει σημείο P εσωτερικό της γωνίας έτσι ώστε $|\widehat{XOP}| = \beta$. Δείξε ακόμη ότι όλα αυτά τα σημεία P περιέχονται σε ημιευθεία με άκρο το O.*

Άσκηση 1.4.5 *Έστω ότι τα σημεία A και B περιέχονται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας $\widehat{XOY}$. Δείξε ότι και κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος AB περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{XOY}$. Δείξε ότι η ανάλογη ιδιότητα δεν ισχύει για μη-κυρτές γωνίες.*



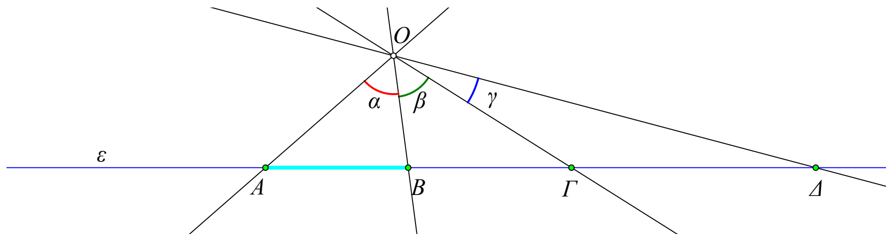
Σχήμα 1.4.6: Σημεία στο εσωτερικό γωνίας $\widehat{XOY}$

Άσκηση 1.4.6 *Δίδεται κυρτή γωνία $\widehat{XOY}$ και σημείο P επί της αντικείμενης ημιευθείας OX' της OX, καθώς και σημείο Z της ημιευθείας OY. Δείξε ότι κάθε σημείο H της ημιευθείας PZ ευρισκόμενο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος PZ περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{XOY}$.*

Υπόδειξη: Εκ κατασκευής το H περιέχεται στην μεριά της ευθείας OY στην οποία περιέχεται και η OX. Επίσης τα Z, H περιέχονται από την ίδια μεριά της ευθείας OX διότι το σημείο τομής P της ZH με την OX είναι εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ZH.

Σχόλιο-2 Το Αξίωμα 1.4.2 των γωνιών σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιαδήποτε γωνία θέλουμε και από τις δύο μεριές μιας ημιευθείας. Όπως όμως και για ευθύγραμμα τμήματα έτσι και για γωνίες, η πρακτική κατασκευή συγκεκριμένης γωνίας με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, όταν αυτό είναι εφικτό, όπως λ.χ. η γωνία 60 μοιρών, είναι ένα διαφορετικό ζήτημα και θα χρειαστούν και πάλι ιδιότητες του κύκλου για να μπορέσουμε να δικαιολογήσουμε την κατασκευή.

Σχόλιο-3 Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσει κανείς ορισμένες κοινές ιδιότητες μεταξύ γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων, ιδιαίτερα όσον αφορά τις έννοιες *μεταξύ*, *διαδοχικές* και *μέτρο*. Το σχήμα 1.4.7



Σχήμα 1.4.7: Αντιστοίχιση ευθυγράμμων τμημάτων - γωνιών

δείχνει πόσο φυσιολογική είναι αυτή η συσχέτιση. Από ένα σταθερό σημείο O εκτός της σταθερής ευθείας ε και για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB αυτής κατασκευάζεται η γωνία $\widehat{AOB}$. Μέσω αυτής της αντιστοίχισης ευθυγράμμων τμημάτων - γωνιών οι έννοιες που ανέφερα μεταφέρονται από την ευθεία στις γωνίες με κορυφή το O. Έτσι το $A\Gamma$ είναι το άθροισμα των AB και $B\Gamma$ και η αντίστοιχη γωνία $\widehat{AO\Gamma}$ είναι το άθροισμα των $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BO\Gamma}$. Το B είναι μεταξύ των A και Γ και ανάλογα η OB είναι μεταξύ των OA και $O\Gamma$, σε δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν εφεξής γωνίες κ.ο.κ.

Με την ευκαιρία του σχήματος 1.4.7 μπορούμε να θέσουμε αμέσως δύο προβλήματα, τα οποία, όμως, για να λύσουμε θα πρέπει πρώτα να μάθουμε να χειριζόμαστε κάποια εργαλεία (δες για τη λύση τους τις Άσκησεις 3.9.7 και 3.8.10).

Πρόβλημα 1.4.1 *Υπόθεσε ότι στο σχήμα 1.4.7 η γωνία $\widehat{AOB}$ έχει σταθερό μέτρο $|\widehat{AOB}| = \alpha$ και περιστρέφεται περί το O. Για ποια θέση της γίνεται το μήκος του αντιστοίχου ευθυγράμμου τμήματος AB ελάχιστο;*

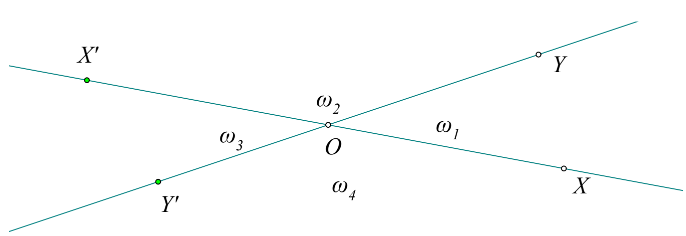
Πρόβλημα 1.4.2 *Υπόθεσε ότι στο σχήμα 1.4.7 το τμήμα AB γλιστρά πάνω στην ευθεία ε χωρίς να αλλάζει το μήκος του. Για ποια θέση του AB γίνεται η αντίστοιχη γωνία $\widehat{AOB}$ μέγιστη;*

1.5 Γωνιών είδη

Νόμοι, στην πιο πλατιά σημασία, είναι οι αναγκαίες σχέσεις που πηγάζουν από τη φύση των πραγμάτων και, με την έννοια αυτή, όλα τα όντα έχουν τους νόμους τους.

Montesquieu, Το πνεύμα των νόμων, 1748

Δύο τεμνόμενες στο σημείο O ευθείες OX και OY ορίζουν τέσσερις γωνίες. Οι γωνίες αυτές ανά δύο σχηματίζουν ζεύγη **κατά κορυφήν** γωνιών, δηλαδή γωνιών εκ των οποίων έκαστη έχει ως πλευ-

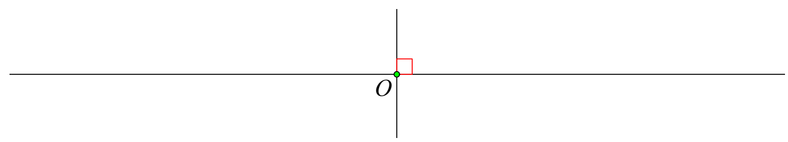


Σχήμα 1.5.1: Γωνίες δύο ευθειών

ρές τις προεκτάσεις της άλλης (Σχήμα 1.5.1). Για τις δύο πεπλατυσμένες $\widehat{XOX'}$ και $\widehat{YOY'}$ έχουμε $180^\circ = |\widehat{XOX'}| = |\widehat{XOY}| + |\widehat{YOX'}|$. Επίσης $180^\circ = |\widehat{YOY'}| = |\widehat{YOX}| + |\widehat{XOY'}|$. Επειδή $|\widehat{XOY}| = |\widehat{YOX}|$ συμπεραίνουμε ότι οι κατά κορυφήν γωνίες $\widehat{YOX'}$ και $\widehat{XOY'}$ είναι ίσες. Ανάλογα δείχνουμε και ότι οι $\widehat{XOY}$ και $\widehat{X'OY'}$ είναι ίσες. Αποδείξαμε συνεπώς την:

Πρόταση 1.5.1 *Κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.*

Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μέτρων 180° λέγονται **παραπληρωματικές**. Στο προηγούμενο σχήμα κάθε ζεύγος διαδοχικών γωνιών αποτελείται από παραπληρωματικές γωνίες. **Ορθή** λέγεται μία γωνία πού έχει μέτρο 90°. Προφανώς μία ορθή είναι ίση με την παραπληρωματική της. Προεκτείνοντας τις πλευρές μίας ορθής γωνίας στο σημείο O, δηλαδή θεωρώντας και τις αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών, ορίζουμε τέσσερις ορθές γωνίες γύρω από το σημείο αυτό, που ανά δύο είναι ή κατά κορυφήν ή παραπληρωματικές.

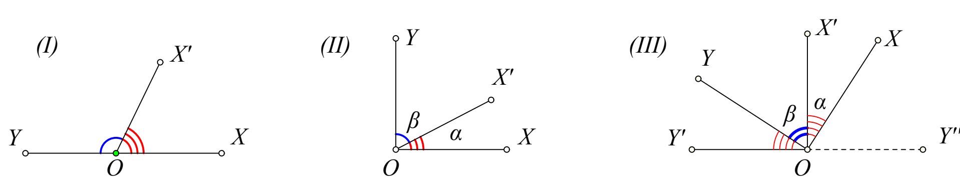


Σχήμα 1.5.2: Κάθετες ευθείες

Έτσι δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο O και σχηματίζουν μία (από τις τέσσερις) γωνίες ορθή θα σχηματίζουν και τις υπόλοιπες ορθές. Δύο τέτοιες ευθείες λέγονται **κάθετες**. **Οξεία** λέγεται μία γωνία

Σχήμα 1.5.3: Οξεία και αμβλεία γωνία

$\widehat{XOY}$ της οποίας το μέτρο $|\widehat{XOY}| < 90^\circ$. **Αμβλεία** λέγεται μία γωνία της οποίας το μέτρο $|\widehat{XOY}| > 90^\circ$. Προφανώς αν μία γωνία είναι οξεία τότε η παραπληρωματική της θα είναι αμβλεία και τούμπαλιν. Λέμε ότι η γωνία α είναι μεγαλύτερη/μικρότερη της γωνίας β αν ισχύει κάτι ανάλογο για τα μέτρα τους: $|\alpha| < |\beta|$ (αντίστοιχα $|\alpha| > |\beta|$). Προφανώς κάθε αμβλεία είναι μεγαλύτερη της ορθής που με τη σειρά της είναι μεγαλύτερη κάθε οξείας. **Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες των οποίων τα



Σχήμα 1.5.4: Παραπληρωματικές, Συμπληρωματικές, Γωνίες με κάθετες πλευρές

μέτρα α, β έχουν άθροισμα $\alpha + \beta = 90^\circ$ (Σχήμα 1.5.4-II). Προφανώς συμπληρωματικές γωνίες είναι οξείες και οι δύο.

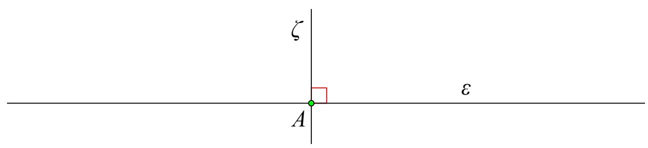
Ένα σημείο X' στο εσωτερικό μιας ορθής γωνίας $\widehat{XOY}$ ορίζει δύο συμπληρωματικές γωνίες $\alpha = \widehat{XOX'}$, $\beta = \widehat{X'OY}$.

Πρόταση 1.5.2 *Δύο γωνίες $\widehat{XOX'}$ και $\widehat{YOY'}$ που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα κάθετες είναι ή ίσες ή παραπληρωματικές (Σχήμα 1.5.4-III).*

Απόδειξη: Εάν οι OY και OY' είναι προς το ίδιο μέρος της OX' τότε οι γωνίες $\alpha = \widehat{XOX'}$ και $\alpha' = \widehat{YOY'}$ είναι ίσες ως έχουσες κοινή συμπληρωματική γωνία β. Εάν οι OY και OY'' είναι σε διαφορετικά μέρη της OX' τότε η αντικείμενη ημιευθεία OY' της OY'' σχηματίζει παραπληρωματική της γωνίας

$a' = \widehat{YOY''}$ και είναι από το ίδιο μέρος της OX' με την OY, άρα κατά το προηγηθέν $180° - a' = a$, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.5.1 *Δείξε ότι από σημείο Α ευθείας ε διέρχεται μία ακριβώς ευθεία ζ κάθετος στην ε.*



Σχήμα 1.5.5: Κάθετος ζ της ε

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του Αξιώματος 1.4.2, κατά το οποίο υπάρχει μία ακριβώς γωνία 90 μοιρών με κορυφή στο A, μία πλευρά ταυτιζόμενη με την ε και περιεχόμενη σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της ε, ο.ε.δ.

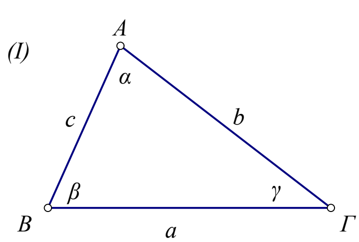
1.6 Τρίγωνα

Καθαρογραμμένα μες στα φρούτα: ο κύκλος, το τετράγωνο
Το τρίγωνο και ο ρόμβος
Όπως τα βλέπουν τα πουλιά, να γίνει απλός ο κόσμος
Ένα σχέδιο Πικασσό
Με γυναίκα, παιδάκι και ιπποκένταυρο.

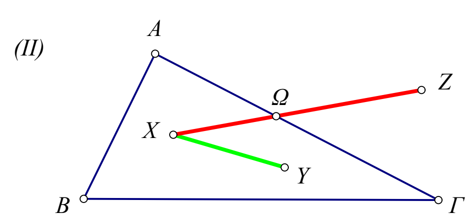
Οδυσσέας Ελύτης, Τα ετεροθαλή

Το τρίγωνο, μετά την ευθεία και τη γωνία, είναι το απλούστερο σχήμα του επιπέδου. Παρά την απλότητά του έχει άπειρες ιδιότητες και αποτελεί αντικείμενο μελέτης γνωστών και άγνωστων Μαθηματικών όλων των εποχών. Τα μέχρι τώρα συμπεράσματα είναι τόσα πολλά, που συγκροτούν ειδικό κλάδο της γεωμετρίας, τη λεγόμενη *Γεωμετρία του τριγώνου* ([Καπ96], [Gal13], [Lal52], [Yiu13]).

Τρίγωνο λέγεται το σχήμα που ορίζεται από τρία σημεία A, B και Γ, μη περιεχόμενα σε μία και μόνον ευθεία, καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν. Τα τρία αυτά σημεία λέγονται



Σχήμα 1.6.1: Τρίγωνο



Εσωτερικό και εξωτερικό τριγώνου

κορυφές του τριγώνου. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από δύο κορυφές του τριγώνου λέγονται **πλευρές του τριγώνου**. **Γωνίες του τριγώνου** ονομάζουμε τις (κυρτές) γωνίες που σχηματίζονται σε κάθε κορυφή του από τις πλευρές του τριγώνου με αρχή αυτήν την κορυφή. τα μήκη των πλευρών παριστάνονται συνήθως με τα λατινικά γράμματα

$$a = |B\Gamma|, \quad b = |\Gamma A|, \quad c = |AB|$$

και τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου με τα μικρά Ελληνικά

$$\alpha = |\widehat{BA\Gamma}|, \quad \beta = |\widehat{\Gamma BA}|, \quad \gamma = |\widehat{A\Gamma B}| \quad \text{ή απλά με} \quad \alpha = \widehat{A},\ \beta = \widehat{B},\ \gamma = \widehat{\Gamma}.$$

Τους συμβολισμούς αυτούς θα χρησιμοποιώ συχνά και στα επόμενα κεφάλαια.

Λέμε ότι οι γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma A}$, $\widehat{\Gamma AB}$ είναι αντίστοιχα **απέναντι** των πλευρών $A\Gamma$, BA και ΓB. Το άθροισμα των μηκών των πλευρών

$$\sigma = a + b + c,$$

λέγεται **περίμετρος** του τριγώνου. Το $\tau = \sigma/2$ ονομάζουμε **ημιπερίμετρο** του τριγώνου

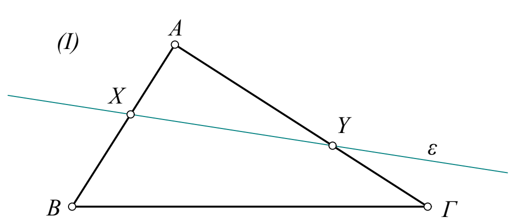
Ένα τρίγωνο λέγεται: (1) **οξυγώνιο**, (2) **αμβλυγώνιο**, (3) **σκαληνό**, όταν αντίστοιχα, (1) έχει όλες τις γωνίες του οξείες, (2) έχει μία γωνία αμβλεία, (3) έχει πλευρές με διαφορετικά μήκη.

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ λέμε ότι είναι **ίσα**, όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές ($a = a'$, $b = b'$, $c = c'$) και αντίστοιχα ίσες γωνίες ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$).
Οι βασικές ιδιότητες (αξιώματα) του τριγώνου είναι οι εξής:

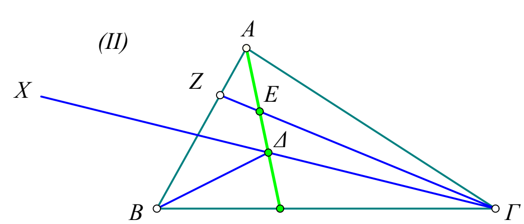
Αξίωμα 1.6.1 *Κάθε τρίγωνο χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη το* **εσωτερικό** *και* **εξωτερικό** *(Σχήμα 1.6.1-II). Δύο σημεία X και Y, περιεχόμενα στο εσωτερικό του τριγώνου, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα XY που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του τριγώνου. Δύο σημεία X και Z, περιεχόμενα το ένα στο εσωτερικό και το άλλο στο εξωτερικό του, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα XZ το οποίο ή περιέχει κορυφή του τριγώνου ή τέμνει μία ακριβώς πλευρά του τριγώνου σε εσωτερικό της πλευράς σημείο Ω.*

Σχήμα 1.6.2: Τρίγωνα με αντίστοιχες πλευρές ίσες

Αξίωμα 1.6.2 *(Ισότητας δύο τριγώνων) Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες ($|AB| = |A'B'|$, $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$, $|\Gamma A| = |\Gamma'A'|$) είναι ίσα. Δηλαδή έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες. Μάλιστα απέναντι από αντίστοιχα ίσες πλευρές θα ευρίσκονται ίσες γωνίες (Σχήμα 1.6.2).*



Σχήμα 1.6.3: Αξίωμα του Pasch



Τομή απέναντι πλευράς

Αξίωμα 1.6.3 *(Του Pasch (1843-1940)) Αν μία ευθεία ε τέμνει μία πλευρά AB του τριγώνου και δεν διέρχεται από μία κορυφή του, τότε θα τέμνει και μία από τις άλλες πλευρές (Σχήμα 1.6.3-I).*

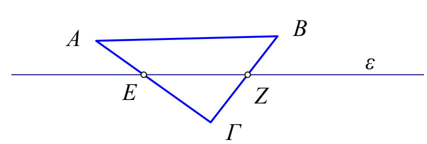
Σχόλιο-1 Το αξίωμα για το εσωτερικό και εξωτερικό του τριγώνου είναι μια από τις περιπτώσεις που ανέφερα στην αρχή του κεφαλαίου. Συνάγεται από τα υπόλοιπα αξιώματα, συνεπώς θα μπορούσε να αποδειχθεί ως θεώρημα. Η απόδειξη ωστόσο περιέχει λεπτομέρειες στις οποίες δεν κρίνω σκόπιμο να εμπλακεί ο μαθητής. Έτσι το βάζω εδώ ως αξίωμα.

Το τελευταίο Αξίωμα 1.6.3 φαίνεται αυτονόητο, ωστόσο η ιδιότητα που εκφράζει δεν συνάγεται από τα προηγούμενα αξιώματα. Η χρησιμότητά του φαίνεται και από την επόμενη πρόταση καθώς και την άσκηση που ακολουθεί. Οι δύο αυτές προτάσεις παρατίθενται απλώς για να δώσουν μια γεύση των λεπτομερειών που πρέπει να προσέξει κανείς, αν θέλει να αποδείξει *όλους* τους ισχυρισμούς του βάσει των αξιωμάτων. Ένα πλήθος παρόμοιων «αυτονόητων» προτάσεων μπορεί να δει κανείς στα [Efi80, *σ.* 42-84], [Bel07].

Πρόταση 1.6.1 *Εάν το $Δ$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τότε η $AΔ$ τέμνει την απέναντι πλευρά $BΓ$ του τριγώνου (Σχήμα 1.6.3-ΙΙ).*

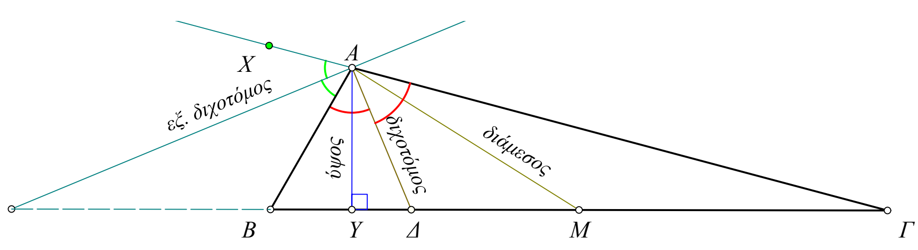
Απόδειξη: Πάρε σημείο E στο ευθύγραμμο τμήμα $AΔ$. Θεώρησε κατόπιν το τρίγωνο $ABΔ$ και την τέμνουσα $ΓE$. Κατά το Αξίωμα 1.6.3 η ευθεία $ΓE$ θα συναντά και μία δεύτερη πλευρά του τριγώνου $ABΔ$. Επειδή η πλευρά $BΔ$ αυτού του τριγώνου είναι εκτός της γωνίας $\widehat{XΓA}$, η $ΓE$ θα συναντά την AB σε ένα σημείο Z. Θεώρησε τότε το τρίγωνο $BΓZ$ και την ευθεία AE που συναντά την πλευρά του $ΓZ$. Κατά το 1.6.3 η AE θα συναντά και μία άλλη πλευρά του τριγώνου που δεν μπορεί να είναι η BZ, διότι τότε η AE θα συνέπιπτε με τη BZ. Άρα η AE, που είναι η ίδια με την ευθεία $AΔ$, θα συναντά την πλευρά $BΓ$ του τριγώνου $BΓZ$, που είναι και πλευρά του τριγώνου $ABΓ$, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.6.1 *Δίδεται ευθεία $ε$. Δείξε ότι η σχέση μεταξύ δύο σημείων A και B: {τα A και B περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της $ε$} είναι μεταβατική. Δηλαδή αν τα A και B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και τα B και $Γ$ είναι επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο τότε και τα A και $Γ$ είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο.*



Σχήμα 1.6.4: Το νόημα του αξιώματος 1.6.3

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και ότι τα B, $Γ$ επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο όμως ότι τα A, $Γ$ δεν είναι. Τότε (Αξίωμα 1.2.5) υπάρχει σημείο E της ευθείας $ε$ επί του $AΓ$ και μεταξύ των A και $Γ$. Με άλλα λόγια η $ε$ τέμνει την $AΓ$. Επειδή η $ε$ δεν περιέχει τα A, B, $Γ$ και τέμνει τη μία πλευρά του τριγώνου ($AΓ$), θα τέμνει κατά το Αξίωμα 1.6.3 και μία από τις άλλες δύο. Αν τέμνει τη $BΓ$ σε σημείο Z, έχουμε άτοπο διότι τότε τα B, $Γ$ θα είναι σε διαφορετικές πλευρές της $ε$. Αν τέμνει την AB, θα έχουμε ανάλογο άτοπο. Άρα η $AΓ$ δεν μπορεί να τέμνει την $ε$.



Σχήμα 1.6.5: Διάμεσος, Διχοτόμος, Ύψος

Διάμεσος του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του με το μέσον της απέναντι πλευράς. **Διχοτόμος**του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά του και χωρίζει τη γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες. Συχνά ονομάζουμε διχοτόμο και ολόκληρη την ευθεία ή ημιευθεία που διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου. **Εξωτερική γωνία** του τριγώνου λέγεται μία παραπληρωματική γωνίας τριγώνου, λ.χ. της $\widehat{A}$, που προκύπτει προεκτείνοντας μία από τις πλευρές του τριγώνου, λ.χ. την $AΓ$ (δηλαδή θεωρώντας την ευθεία $AΓ$), οπότε προκύπτει η $\widehat{BAX}$ (σχήμα 1.6.5). **Εξωτερική διχοτόμος**τριγώνου λέγεται η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του. **Ύψος** του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή του τριγώνου με ένα σημείο της απέναντι πλευράς της και είναι κάθετο στην πλευρά αυτή (την ύπαρξη του ύψους θα εξασφαλίσουμε λίγο αργότερα στην § 1.12). Όπως θα δούμε αργότερα, οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από κοινό σημείο (Θεώρημα 2.8.1), οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από άλλο κοινό σημείο (Θεώρημα 2.2.2) και τέλος τα τρία ύψη διέρχονται και αυτά από τρίτο κοινό σημείο (Θεώρημα 2.8.2).

Οι διάμεσοι, τα ύψη και οι διχοτόμοι (εσωτερικές και εξωτερικές) τριγώνου αναφέρονται συχνά ως **δευτερεύοντα στοιχεία** του τριγώνου.

Σχόλιο-2 Συχνά η γνώση των μηκών τριών από αυτά τα στοιχεία αρκεί για την ακριβή κατασκευή του τριγώνου. Για παράδειγμα, στην Άσκηση 2.13.11, θα δούμε ότι το τρίγωνο κατασκευάζεται εύκολα, όταν γνωρίζουμε τα τρία μήκη $|AY|$, $|A\Delta|$ και $|AM|$, ύψους, διχοτόμου και διαμέσου από την ίδια κορυφή. Συνήθως, στις κατασκευές τριγώνων απαιτούμε τη χρήση αποκλειστικά και μόνον του κανόνα και του διαβήτη ([Pet01], [Adl06], [Eve63, *σ.* 183]).

Ένα, σχετικά σύνθετο, πρόβλημα είναι να αποδείξουμε ότι μια ορισμένη κατασκευή με χρήση μόνο του κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατη (§ 2.4). Για παράδειγμα, η κατασκευή του τριγώνου από το ύψος $|AY|$ και διάμεσο $|AM|$ από την ίδια κορυφή, αλλά διχοτόμο από μιαν άλλη κορυφή και όχι την A, αποδεικνύεται αδύνατη ([Fur37, *σ.* 38]).

Φυσικά, το να μην κατασκευάζεται το τρίγωνο με τα συγκεκριμένα δεδομένα μέσω κανόνα και διαβήτη, δεν σημαίνει ότι το τρίγωνο δεν κατασκευάζεται με άλλα μέσα ή ότι δεν υπάρχει. Έτσι, για παράδειγμα, δοθέντων τριών θετικών αριθμών, υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο που έχει αυτούς τους αριθμούς ως μήκη των διχοτόμων του. Ωστόσο το τρίγωνο αυτό δεν μπορεί να κατασκευασθεί με τον κανόνα και το διαβήτη ([MP94], [Oxm08]).

Άσκηση 1.6.2 *Δείξε ότι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας κορυφής τριγώνου είναι κάθετες ευθείες.*

1.7 Η ισότητα σχημάτων

Μπαρμπαγιάννη
Μακρυγιάννη
πάρε μαύρο γιαταγάνι
κι έλα στη ζωή μας πίσω
το στραβό να κάνεις ίσο.

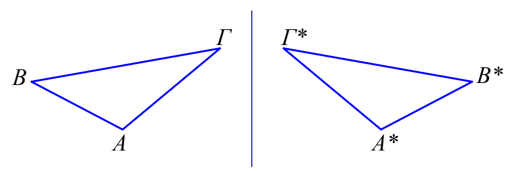
Νίκος Γκάτσος

Ένα σημείο, μία ευθεία, μία ημιευθεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα τρίγωνο, είναι **σχήματα**. Γενικότερα, σχήμα (του επιπέδου) ονομάζουμε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σύνολο σημείων του. Αυτά που εξετάσαμε μέχρι τώρα είναι τα απλούστερα σχήματα. Στα επόμενα μαθήματα θα γνωρίσουμε άλλα πιο σύνθετα σχήματα και θα μελετήσουμε ιδιότητές που ισχύουν για καθένα από αυτά και είναι οι ίδιες για τα λεγόμενα **ίσα σχήματα**.

Κάθε σχήμα έχει έναν κανόνα που καθορίζει πότε είναι ίσο με ένα άλλο. Τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν το μήκος τους. Είναι ίσα τότε ακριβώς, όταν έχουν το ίδιο μήκος. Οι γωνίες το ίδιο. Έχουν και αυτές το μέτρο τους. Είναι ίσες όταν έχουν ίσα μέτρα. Στα τρίγωνα, η ισότητα περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία. Ο ορισμός τις ισότητας απαιτεί από δύο τρίγωνα να έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες αντίστοιχες γωνίες. Το Αξίωμα 1.6.2 δίνει το βασικό κριτήριο ισότητας τριγώνων. Λέει ότι, όταν δύο τρίγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, τότε είναι ίσα. Δηλαδή και οι αντίστοιχες γωνίες τους (οι απέναντι από τις ίσες πλευρές) θα είναι και αυτές ίσες. Παρακάτω (§ 1.9) θα δούμε και άλλα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Όσο πιο πολύπλοκο είναι το σχήμα, τόσο περισσότερα στοιχεία του πρέπει να συγκρίνουμε για να καταλήξουμε ότι είναι ίσο με ένα άλλο.

Ο Ευκλείδης στα στοιχεία του δεν χρονοτριβεί στην ανάλυση της έννοιας της ισότητας. Υιοθετεί μια απλοϊκή έννοια ισότητας κατά την οποία δύο σχήματα είναι ίσα, τότε και μόνον όταν μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα και να το τοποθετήσουμε πάνω στο άλλο έτσι ώστε τα δύο σχήματα να συμπέσουν ακριβώς. Τι θα πει όμως *μετατοπίσουμε*; Η έννοια της μετατόπισης είναι σύνθετη. Θεμελιώνεται με τη γενική έννοια του *Μετασχηματισμού* και ειδικότερα της *Ισομετρίας*, για την οποία θα μιλήσουμε πολύ αργότερα (§ 7.1).

Αρχικά θεμελιώνουμε την ισότητα δίνοντας για κάθε σχήμα τον κανόνα του, δηλαδή πότε ακριβώς είναι ίσο με ένα άλλο. Ωστόσο δεν βλάπτει να σκεφτόμαστε και με τον τρόπο του Ευκλείδη. Στο επίπεδο, δύο σχήματα που είναι ίσα με τον κανόνα ισότητάς τους, είναι ίσα και κατά την έννοια του Ευκλείδη, μέσω μετατόπισης και σύμπτωσης. Και αντίστροφα αν μπορούν να τοποθετηθούν, ώστε να συμπέσουν, τότε είναι ίσα και με τον κανόνα που δίνουμε σε κάθε περίπτωση. Το πρόβλημα είναι ότι, για να αποδείξουμε αυτήν την ισοδυναμία, πρέπει να μελετήσουμε διάφορα ζητήματα, που η καταγραφή τους, σε αυτό το σημείο, θα δημιουργούσε κάποιες δυσκολίες κατανόησης. Περιοριζόμαστε λοιπόν στην παραδοχή αυτής της αρχής του Ευκλείδη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το επίπεδο είναι σαν μια πλαστική διαφάνεια και τα σχήματα μπορούν να κοπούν από το μέρος που έχουν αρχικά σχεδιασθεί και να μετατεθούν στο μέρος που είναι το άλλο σχήμα, να τοποθετηθούν πάνω σε αυτό και να συμπέσουν. Πολύ αργότερα, στην § 7.5, που τη συνιστώ για μια δεύτερη ανάγνωση, γίνεται η αυστηρή θεμελίωση της ισότητας.

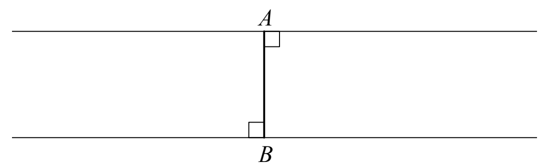


Σχήμα 1.7.1: Ίσα αλλά διαφορετικά προσανατολισμένα

Σημειώνω μια ιδιαιτερότητα της έννοιας της ισότητας, που φανερώνεται στο σχήμα 1.7.1 και έχει να κάνει με το λεγόμενο **προσανατολισμό** των σχημάτων. Τα δύο τρίγωνα είναι ίσα με τη δική μας έννοια. Έχουν όμως την ιδιαιτερότητα ότι η διαδοχή $A \to B \to \Gamma$ είναι κατά τη φορά του ρολογιού, ενώ η διαδοχή $A^* \to B^* \to \Gamma^*$ είναι αντίθετη της φοράς του ρολογιού. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ λέγεται **αρνητικά προσανατολισμένο**, ενώ το $A^*B^*\Gamma^*$ λέγεται **θετικά προσανατολισμένο**. Για να κάνουμε το $AB\Gamma$ να συμπέσει με το $A^*B^*\Gamma^*$, με την έννοια της μετατόπισης, πρέπει να το κόψουμε και να το γυρίσουμε από την πίσω μεριά, με τον τρόπο που γυρίζουμε μια σελίδα και πάμε στην από πίσω της. Τα πράγματα γίνονται λίγο πιο σύνθετα στο χώρο, όπου παρουσιάζεται το ανάλογο φαινόμενο και εκεί δεν υπάρχει κάτι έξω από το χώρο για να κάνουμε αυτό το αναποδογύρισμα του προσανατολισμού. Εκεί η έννοια της ισότητας με τον τρόπο που την ορίζουμε, για κάθε σχήμα ξεχωριστά, δεν είναι ισοδύναμη με την έννοια της σύμπτωσης (δες λ.χ. το σχόλιο στην § 9.2 και σε μια δεύτερη ανάγνωση την πλήρη περιγραφή της ισότητας στο χώρο στην §12.5). Ο τρόπος λοιπόν που χειριζόμαστε την ισότητα είναι πιο ασφαλής από αυτόν της *μετατόπισης*, όσο δεν μπαίνουμε στις λεπτομέρειες του ακριβούς ορισμού αυτής της έννοιας.

Σχόλιο-1 Για ορισμένα σχήματα η ισότητα με την έννοια της μετατόπισης είναι προφανής. Έτσι, λ.χ. δύο οποιεσδήποτε ευθείες α και β είναι ίσες, με την έννοια, ότι η α μπορεί να μετατοπισθεί και να τοποθετηθεί επί της β, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπέσουν. Παρόμοια δύο τεμνόμενες ευθείες α και β, που σχηματίζουν μεταξύ τους μία γωνία μέτρου ω, συγκροτούν ένα σχήμα που είναι ίσο με το σχήμα δύο άλλων ευθειών α' και β', που σχηματίζουν μεταξύ τους μία γωνία του ιδίου μέτρου ω.

Σχόλιο-2 Και ένα σχόλιο για την ορολογία. Συχνά για την ισότητα δύο σχημάτων που έχουν γωνίες, κορυφές ή άλλα παρόμοια χαρακτηριστικά, κάνουμε αντιστοιχίσεις μεταξύ των κορυφών τους βάζοντας σε αντίστοιχες κορυφές το ίδιο γράμμα με κάποιο δείκτη ή τόνο ή άστρο ή άλλο σημάδι. Έτσι, όταν λέμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα διότι έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, εννοούμε ότι η πλευρά AB είναι αντίστοιχα ίση προς την $A'B'$, η $B\Gamma$ προς τη $B'\Gamma'$ κ.λπ. Τον κανόνα αυτό ακολουθούμε και στα σχήματα του χώρου. Το να μπορούμε να βάλουμε τα ίδια γράμματα στα υποψήφια για ισότητα σχήματα είναι το πρώτο βήμα για να αποδείξουμε την ισότητά τους, που συνήθως ανάγεται στην ισότητα αντίστοιχων και απλούστερων στοιχείων τους.



Σχήμα 1.7.2: Ένα απλό σχήμα

Άσκηση 1.7.1 *Το σχήμα 1.7.2 αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους δ και τις ευθείες που είναι κάθετες σε αυτό στα άκρα του. Δείξε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$, του ιδίου μήκους δ, ορίζει ανάλογα ένα σχήμα ίσο προς το προηγούμενο με την έννοια της μετατόπισης.*

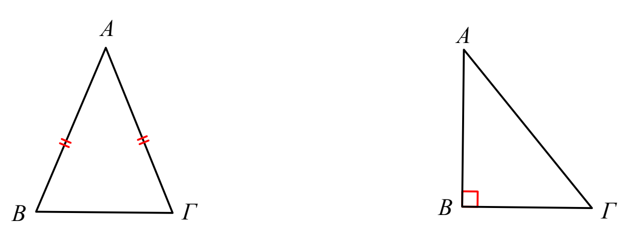
Υπόδειξη: Λόγω της ισότητας των μηκών, το τμήμα $A'B'$ μπορεί να μετατοπισθεί ώστε να συμπέσει με το AB. Τότε, κατά το Αξίωμα 1.4.2, θα συμπέσουν και οι κάθετες προς το $A'B'$ στα άκρα του με τις αντίστοιχες κάθετες του AB στα άκρα του.

1.8 Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο

Είδε με τα δικά του μάτια ότι το φεγγάρι είναι στρογγυλό
Ήταν επίσης σίγουρος ότι η γη είναι τετράγωνη,
Διότι ταξίδεψε πενήντα μίλια και δεν βρήκε
Σημάδι να δείχνει κάπου ότι είναι κυκλική.

Lord Byron, Don Juan, canto V

Στην Γεωμετρία, όπως και σε όλα τα Μαθηματικά, μετά από έναν ορισμό μιας γενικής κατηγορίας, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Δεν είναι σπάνιο, κάποια γενική ιδιότητα που θέλουμε να αποδείξουμε, να προκύπτει ευκολότερα σε μια ειδική περίπτωση και η ειδική απόδειξη να δείχνει και το δρόμο για τη γενική. Άλλοτε πάλι, οι ιδιότητες της ειδικής κατηγορίας βοηθούν στην διατύπωση και απόδειξη ιδιοτήτων της γενικής ή τη διάψευση κάποιας γενικής εικασίας. Τα ισοσκελή και τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ειδικές περιπτώσεις τριγώνων, που τις συναντάμε στις διατυπώσεις και αποδείξεις πληθώρας γενικών ιδιοτήτων σε όλα τα κεφάλαια της γεωμετρίας.

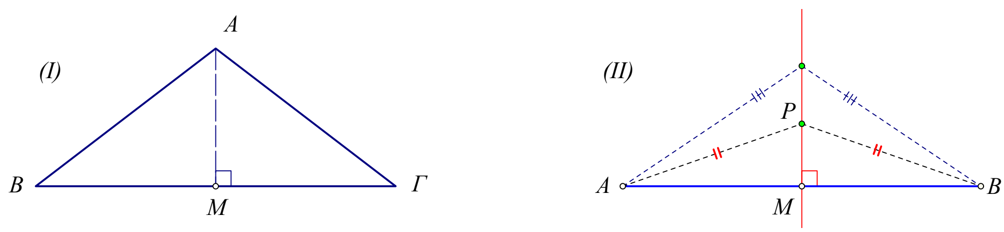


Σχήμα 1.8.1: Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο

Ισοσκελές λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. Οι δύο ίσες πλευρές λέγονται **σκέλη** και η τρίτη πλευρά **βάση** του ισοσκελούς. Η κορυφή στην οποία συντρέχουν τα σκέλη λέγεται **κορυφή** του ισοσκελούς.

Ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει μία γωνία του ορθή. Οι πλευρές που ορίζουν αυτήν τη γωνία λέγονται **κάθετες πλευρές** του ορθογωνίου. Η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** του ορθογωνίου τριγώνου.

Θεώρημα 1.8.1 *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ($|AB| = |A\Gamma|$) οι παρά τη βάση γωνίες (στα B και Γ) είναι ίσες.*



Σχήμα 1.8.2: Το θεώρημα του ισοσκελούς   Η μεσοκάθετος του AB

Απόδειξη: Θεώρησε τα δύο τρίγωνα ABM και $AM\Gamma$ που σχηματίζονται φέρνοντας την AM, όπου M το μέσον της βάσης $B\Gamma$ (Σχήμα 1.8.2-I). Τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες: $|AB| = |A\Gamma|$ εξ υποθέσεως, $|BM| = |M\Gamma|$ διότι το M είναι μέσον της $B\Gamma$ και τέλος την AM κοινή. Κατά το Αξίωμα 1.6.2 των τριγώνων τα δύο αυτά τρίγωνα θα είναι ίσα, άρα και οι γωνίες τους στα B και Γ θα είναι αντίστοιχα ίσες ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.8.1 *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ($|AB| = |A\Gamma|$) η ευθεία που ενώνει την κορυφή του με το μέσον M της απέναντι πλευράς διχοτομεί τη γωνία της κορυφής. (Δες την Άσκηση 1.9.8 για το αντίστροφο).*

Πόρισμα 1.8.2 *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ($|AB| = |A\Gamma|$) η ευθεία που ενώνει τη κορυφή του με το μέσον M της απέναντι πλευράς είναι κάθετος στην βάση και χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα (AMB και $AM\Gamma$) (Δες τη Άσκηση 1.9.10 για το αντίστροφο).*

Μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζουμε την ευθεία που είναι κάθετος στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος (Σχήμα 1.8.2-II). Το προηγούμενο πόρισμα μπορεί επίσης να διατυπωθεί στην επόμενη μορφή.

Σχήμα 1.8.3: Σύγκριση ορθογωνίων   Συγκόλληση ισοσκελών

Άσκηση 1.8.1 *Τα ορθογώνια τρίγωνα $\{AB\Gamma, A'B\Gamma'\}$ έχουν ίσες υποτείνουσες $|B\Gamma| = |B\Gamma'|$ και γωνίες $\phi = \widehat{AB\Gamma} < \omega = \widehat{A'B\Gamma'}$. Δείξε ότι $|A\Gamma| < |A'\Gamma'|$ (Σχήμα 1.8.3-I).*

Άσκηση 1.8.2 *Έστω ότι τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ισοσκελή με κορυφή στο A και κοινή την πλευρά $A\Gamma$. Δείξε ότι οι πλευρές AB και $A\Delta$ ή θα περιέχονται στην ίδια ευθεία ή θα σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$ (Σχήμα 1.8.3-II).*

Πόρισμα 1.8.3 *Για κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση AB, η κορυφή του Γ ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB.*

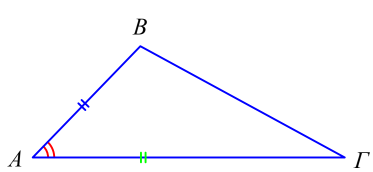
Ισοδύναμη επίσης είναι και η διατύπωση:

Πόρισμα 1.8.4 *Κάθε σημείο P που ισαπέχει από τα σημεία A και B ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB.*

1.9 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

> Είναι λάθος το ότι η ισότητα είναι νόμος της φύσης. Η φύση δεν παράγει ισότητες. Η ανώτατη αρχή της είναι διάταξη και εξάρτηση.
>
> *Vauvenargues, Αρχές και Στοχασμοί*

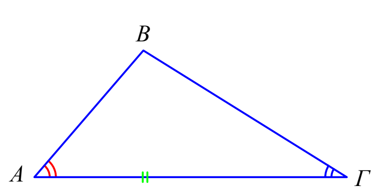
Εκτός από το βασικό Αξίωμα 1.6.2 ισότητας τριγώνων που αναφέρεται και ως ΠΠΠ-κριτήριο (πλευρά-πλευρά-πλευρά κριτήριο) ισότητας, ισχύουν και άλλα δύο κριτήρια ισότητας που προκύπτουν ως θεωρήματα βάσει του ΠΠΠ-κριτηρίου. Αυτά αναφέρονται ως ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας (πλευρά-γωνία-πλευρά κριτήριο) και ΓΠΓ-κριτήριο ισότητας (γωνία-πλευρά-γωνία κριτήριο).



Σχήμα 1.9.1: ΠΓΠ κριτήριο

Πρόταση 1.9.1 *(ΠΓΠ-κριτήριο) Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$, που έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες ($|AB| = |A'B'|$, $|A\Gamma| = |A'\Gamma'|$) και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες επίσης ίσες ($|\widehat{BA\Gamma}| = |\widehat{B'A'\Gamma'}|$), είναι ίσα.*

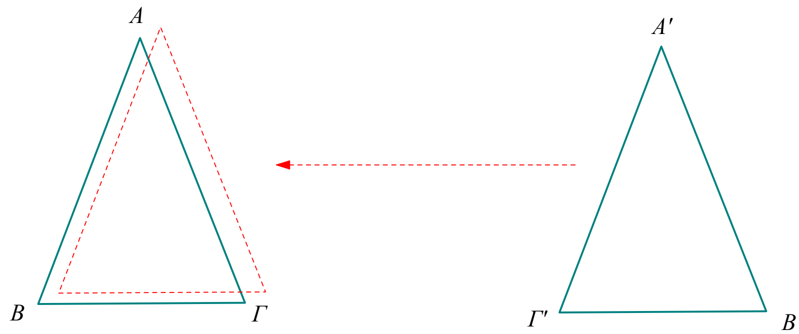
Απόδειξη: Τοποθέτησε τη γωνία A' πάνω στην A έτσι ώστε να συμπέσουν οι ημιευθείες AB και $A'B'$ καθώς και οι $A\Gamma$ και $A'\Gamma'$ (Σχήμα 1.9.1). Αυτό είναι δυνατόν λόγω της υποτιθέμενης ισότητας των γωνιών στα A και A' αντιστοίχως. Λόγω της επίσης υποτιθέμενης ισότητας των μηκών $|AB| = |A'B'|$, θα συμπέσουν και τα B και B' (σύμφωνα με το Αξίωμα 1.3.3) και για τον ίδιο λόγο θα συμπέσουν και τα Γ και Γ'. Συνεπώς, θα συμπέσουν και οι πλευρές $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ και επομένως, τα μήκη τους θα είναι ίσα $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$. Η αλήθεια της πρότασης προκύπτει εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.9.2: ΓΠΓ-κριτήριο

Πρόταση 1.9.2 *(ΓΠΓ-κριτήριο) Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ που έχουν δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες ($|\widehat{AB\Gamma}| = |\widehat{A'B'\Gamma'}|$ και, $|\widehat{B\Gamma A}| = |\widehat{B'\Gamma'A'}|$) και τις περιεχόμενες σε αυτές πλευρές επίσης ίσες ($|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$) είναι ίσα.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Τοποθέτησε τα τρίγωνα έτσι ώστε να συμπέσουν οι $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$, καθώς και οι γωνίες στα B, B' και Γ, Γ' (Σχήμα 1.9.2). Αυτό είναι δυνατόν λόγω του αξιώματος 1.4.2. Τότε θα συμπέσουν οι ευθείες BA, $B'A'$ καθώς και οι ΓA, $\Gamma'A'$, άρα θα συμπέσουν και οι τομές τους που ορίζουν αντίστοιχα τα A και A'. Από αυτήν τη σύμπτωση έπεται ότι $|BA| = |B'A'|$ και $|\Gamma A| = |\Gamma'A'|$. Η αλήθεια της πρότασης προκύπτει εφαρμόζοντας πάλι το ΠΠΠ-κριτήριο, ο.ε.δ.

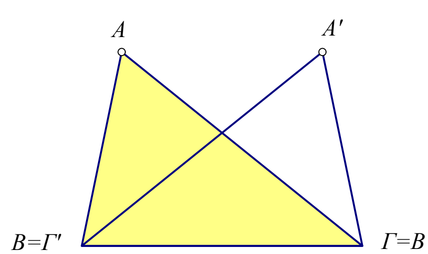


Σχήμα 1.9.3: Δύο ίσες γωνίες παράγουν ισοσκελές

Πρόταση 1.9.3 *Αν το τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές.*

Απόδειξη: Θεώρησε ένα τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ίσο προς το $AB\Gamma$ και εφάρμοσε το ΓΠΓ-κριτήριο. Τα δύο τρίγωνα έχουν ίσες τις πλευρές $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ αντίστοιχα και τις γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{A'\Gamma'B'}$ ίσες καθώς και τις $\widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{A'B'\Gamma'}$ ίσες, άρα είναι ίσα. Η πλευρά $A\Gamma$ που είναι απέναντι στη γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ θα είναι ίση με την πλευρά $A'B'$ που είναι απέναντι στην ίση προς την προηγούμενη γωνία $\widehat{A'\Gamma'B'}$. Όμως εκ κατασκευής η $A'B'$ είναι ίση προς την AB, άρα τελικά οι AB και $A\Gamma$ θα είναι ίσες, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η απόδειξη αυτή (οφείλεται στον Πάππο) έχει ένα λεπτό και παράδοξο σημείο, όπου δύο ίσα τρίγωνα ξανα-αποδεικνύονται ίσα. Γίνεται εδώ ένα παιχνίδι με τον **προσανατολισμό** του τριγώνου. Το $A'B'\Gamma'$ είναι μεν ίσο με το $AB\Gamma$, αλλά έχει τοποθετηθεί με αντίστροφο προσανατολισμό πάνω στο



Σχήμα 1.9.4: Επανατοποθέτηση ίσου τριγώνου με αντίθετο προσανατολισμό

$AB\Gamma$. Το σχήμα 1.9.4 δείχνει τη διαφορά με ένα μη-ισοσκελές $AB\Gamma$. Τα δύο τρίγωνα ενώ είναι ίσα, τοποθετούμενα με αυτόν τον τρόπο δεν συμπίπτουν εν γένει. Το νόημα της πρότασης είναι ότι τα δύο τρίγωνα τοποθετούμενα κατ᾽ αυτόν τον τρόπο συμπίπτουν τότε και μόνον, όταν είναι ισοσκελή.

Πόρισμα 1.9.1 *Σημείο Γ ανήκει στην μεσοκάθετο ε του ευθυγράμμου τμήματος AB, τότε και μόνον, όταν ισαπέχει από τα σημεία A και B.*

Απόδειξη: Στο Πόρισμα 1.8.4 είδαμε ότι κάθε σημείο Γ που ισαπέχει από τα A και B είναι επί της μεσοκαθέτου. Για το αντίστροφο, παίρνουμε το Γ επί της μεσοκαθέτου και δείχνουμε ότι τα τρίγωνα

ΓMA και ΓMB είναι ίσα (M το μέσον του AB) εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο, ο.ε.δ.

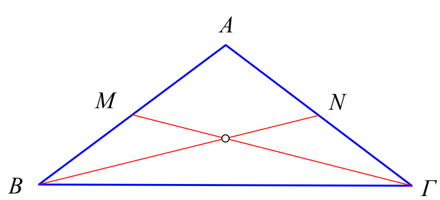
Σχόλιο-2 Το τελευταίο πόρισμα χαρακτηρίζει τη μεσοκάθετο ως **γεωμετρικό τόπο** σημείων που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα. Λέμε συχνά: *ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την τάδε ιδιότητα είναι το δείνα σύνολο.* Έτσι λοιπόν θα λέμε στο εξής: *ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο σημεία A και B είναι η μεσοκάθετος του AB.* Όπως στην περίπτωση της μεσοκαθέτου, έτσι και στην γενική περίπτωση ενός γεωμετρικού τόπου πρέπει να δείξουμε δύο πράγματα: α) ότι κάθε σημείο του γεωμετρικού τόπου έχει την τάδε ιδιότητα, β) ότι, αν ένα σημείο έχει την τάδε ιδιότητα, τότε ανήκει αναγκαστικά στο γεωμετρικό τόπο (περισσότερα στην §2.16).

Άσκηση 1.9.1 *Δύο ορθογώνια τρίγωνα , που έχουν αντίστοιχες κάθετες πλευρές ίσου μήκους, είναι ίσα.*

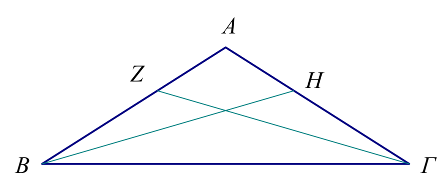
Υπόδειξη: Εφάρμοσε το ΠΓΠ-κριτήριο με αντίστοιχες γωνίες τις ορθές των δύο τριγώνων.

Άσκηση 1.9.2 *Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μία κάθετη και την προσκείμενη οξεία αντίστοιχα ίση, είναι ίσα.*

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το ΓΠΓ-κριτήριο.



Σχήμα 1.9.5: Ίσες διάμεσοι



Ίσες διχοτόμοι

Άσκηση 1.9.3 *Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με ίσες γωνίες στις κορυφές B και Γ. Δείξε ότι οι διάμεσοι από τις κορυφές αυτές είναι ίσες. Δείξε επίσης ότι και οι διχοτόμοι από τις κορυφές αυτές είναι ίσες.*

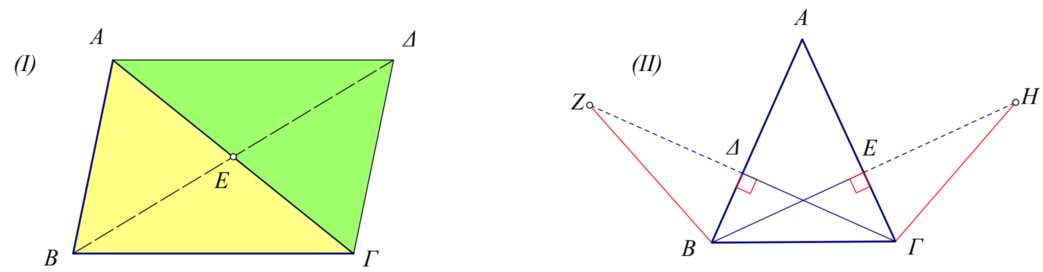
Υπόδειξη: Έστω ότι M και N είναι τα μέσα των BA και ΓA αντιστοίχως. Τα τρίγωνα $BM\Gamma$ και $BN\Gamma$ είναι ίσα ως έχοντα α) τη $B\Gamma$ κοινή, β) τις BM και ΓN ίσες ως μισές ίσων πλευρών, γ) τις γωνίες στα B και Γ ίσες. Εφαρμόζεται λοιπόν το ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας τριγώνων. Ανάλογη είναι και η απόδειξη για τις διχοτόμους, μόνο που αυτή τη φορά εφαρμόζεται το ΓΠΓ-κριτήριο. Πράγματι, έστω ότι BH και ΓZ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών στα B και Γ αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα $B\Gamma H$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα ως έχοντα α) τη $B\Gamma$ κοινή, β) τις γωνίες στα B και Γ ίσες, γ) τις γωνίες $|\widehat{HB\Gamma}| = |\widehat{Z\Gamma B}|$ ως μισές ίσων γωνιών.

Σχόλιο-3 Ισχύει και η αντίστροφη της προηγούμενης πρότασης, αλλά, στη μεν περίπτωση των διαμέσων χρειαζόμαστε μια ιδιότητά τους που θα μάθουμε αργότερα (δες Άσκηση 2.8.1), στις δε διχοτόμους η απόδειξη του αντιστρόφου, που δίνουμε στην επόμενη παράγραφο (Θεώρημα 2.5.2), αναφέρεται ως θεώρημα των Steiner-Lehmus και είναι απροσδόκητα δύσκολη. Για μια υπολογιστική απόδειξη δες την Άσκηση 3.12.12.

Άσκηση 1.9.4 *Έστω E το μέσον της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Προέκτεινε τη BE (διάμεσο) κατά το διπλάσιο μέχρι το Δ. Δείξε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το $A\Gamma B$.*

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα με το ΠΓΠ-κριτήριο ότι τα τρίγωνα AEB και $\Gamma E\Delta$ είναι ίσα (Σχήμα 1.9.6-I). Δείξε ανάλογα ότι και τα $BE\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι ίσα. Συμπέρανε κατόπιν με το ΠΠΠ-κριτήριο ότι τα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Άσκηση 1.9.5 *Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με ίσες γωνίες στις κορυφές B και Γ. Δείξε ότι τα ύψη από τις κορυφές αυτές είναι ίσα.*

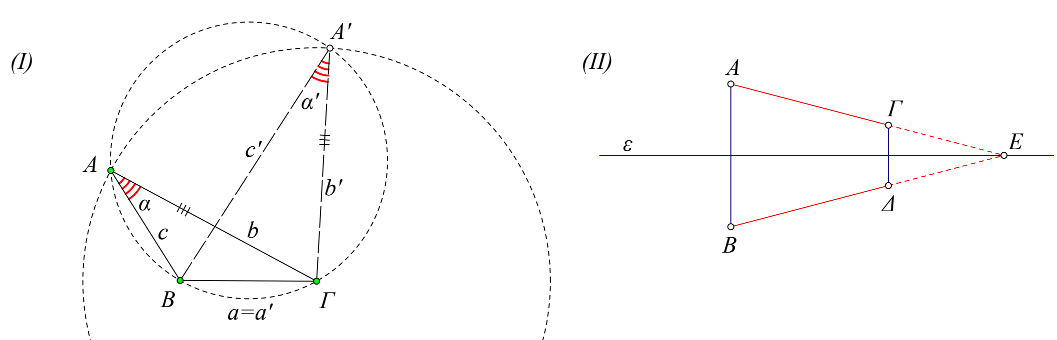


Σχήμα 1.9.6: Προέκταση της διαμέσου

Ίσα ύψη ισοσκελούς

Υπόδειξη: Έστω ότι BE και $\Gamma\Delta$ είναι τα ύψη, αντίστοιχα, από τις γωνίες B και Γ (Σχήμα 1.9.6-II). Προέκτεινε τη BE κατά το διπλάσιο έως το σημείο H και τη $\Gamma\Delta$ κατά το διπλάσιο έως το Z. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $HE\Gamma$ είναι ίσα ως έχοντα α) την $E\Gamma$ κοινή, β) τις γωνίες στο E ορθές και γ) τις πλευρές BE και EH ίσες εκ κατασκευής (ΠΓΠ-κριτήριο). Συνεπώς, το τρίγωνο $B\Gamma H$ είναι ισοσκελές. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι και το $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές. Τα δύο αυτά ισοσκελή είναι και ίσα, ως έχοντα α) τη $B\Gamma$ κοινή, β) τη BZ ίση της ΓH και γ) τις γωνίες τους στα B και Γ ίσες ως διπλάσιες των β και γ αντίστοιχα. Άρα οι ΓZ και BH, που είναι διπλάσιες των υψών, θα είναι ίσες. Για την αντίστροφη αυτής της ιδιότητας δες την Άσκηση 1.10.2.

Σχόλιο-4 Αργότερα θα δούμε ότι υπάρχει και ένα ακόμη κριτήριο ισότητας τριγώνων που θα μπορούσε να ονομασθεί ΓΓΠ-κριτήριο. Κατ' αυτό αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τις γωνίες τους $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ και τις πλευρές $a = |B\Gamma| = |B'\Gamma'| = a'$, τότε είναι ίσα. Σε αυτήν την περίπτωση τα τρίγωνα υποτίθεται ότι έχουν δύο γωνίες ίσες και μία πλευρά αντίστοιχα ίση της άλλης, αλλά η πλευρά αυτή είναι η *απέναντι* της α και όχι η προσκείμενη της α (όπως στο ΓΠΓ-κριτήριο). Αυτό ωστόσο ανάγεται στο ΓΠΓ-κριτήριο, διότι από την ισότητα των δύο γωνιών και τη σχέση $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, που θα δείξουμε αργότερα, προκύπτει η ισότητα *όλων* των γωνιών των δύο τριγώνων.



Σχήμα 1.9.7: Αμφίβολη περίπτωση

Κοινή μεσοκάθετος

Το σχήμα 1.9.7-I δείχνει ότι δεν ισχύει αυτό που θα μπορούσε να ονομασθεί ΠΠΓ-κριτήριο. Εν γένει (όταν το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο), υπάρχουν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $a = a'$, $b = b'$ και $\alpha = \alpha'$. Και αυτό το σχήμα θα το αναλύσουμε παρακάτω, όταν θα έχουμε επαρκείς γνώσεις για τον κύκλο και τις ιδιότητές του.

Άσκηση 1.9.6 *Δείξε ότι, αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα τότε είναι ίσες και οι διάμεσοι/διχοτόμοι του $AB\Gamma$ με τις αντίστοιχες διαμέσους/διχοτόμους του $A'B'\Gamma'$.*

Άσκηση 1.9.7 *Έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ έχουν κοινή μεσοκάθετο ε και η $A\Gamma$ συναντά την ε στο E. Δείξε ότι και η $B\Delta$ συναντά την ε στο E (Σχήμα 1.9.7-II).*

Άσκηση 1.9.8 *Δείξε ότι, αν η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BA\Gamma}$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (αντίστροφο του Πορίσματος 1.8.1).*

Άσκηση 1.9.9 *Δείξε ότι δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν αντίστοιχα ίσα ύψη.*

Υπόδειξη: Τοποθέτησε τα τρίγωνα έτσι ώστε οι βάσεις τους $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ να συμπέσουν και οι κορυφές A, A' να βρεθούν εκατέρωθεν της $B\Gamma$. Τότε το ABA' είναι ισοσκελές τρίγωνο, κ.λπ.

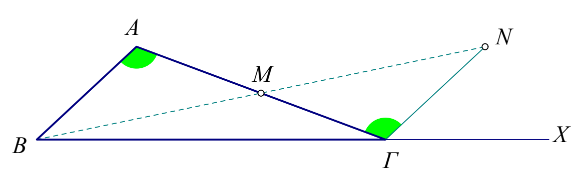
Άσκηση 1.9.10 *Δείξε ότι, αν η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι κάθετος στη βάση $B\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές (αντίστροφο του Πορίσματος 1.8.2).*

1.10 Σχετικά μεγέθη γωνιών τριγώνου

> Είναι τόσο σχετικά τα μεγέθη που αυτοκαταργούνται. Ένα ικανό μυρμήγκι βαρύνει - σε απόλυτο αξία - περισσότερο από έναν μέτριο πρωθυπουργό.
>
> *Οδυσσέας Ελύτης, Μικρός Ναυτίλος*

Οι επόμενες ιδιότητες του τριγώνου στηρίζονται στα αξιώματα που έχουμε αποδεχθεί έως τώρα και προετοιμάζουν το έδαφος για τη σημαντική *τριγωνική ανισότητα* της επόμενης παραγράφου.

Θεώρημα 1.10.1 *Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ η παραπληρωματική κάθε γωνίας είναι μεγαλύτερη εκάστης των δύο άλλων γωνιών.*



Σχήμα 1.10.1: Σύγκριση γωνιών τριγώνου

Απόδειξη: Ας δείξουμε ότι η $\widehat{X\Gamma A}$, που είναι παραπληρωματική της $\widehat{\Gamma}$, είναι μεγαλύτερη της γωνίας $\widehat{A}$ (Σχήμα 1.10.1). Έστω M το μέσον της $A\Gamma$ και N επί της ημιευθείας BM, έτσι ώστε $|BM| = |MN|$. Τα τρίγωνα ABM και ΓNM έχουν: α) τις γωνίες $\widehat{AMB}$ και $\widehat{\Gamma MN}$ ίσες ως κατά κορυφήν, β) τις πλευρές AM και $M\Gamma$ ίσες διότι το M είναι το μέσον της $A\Gamma$, γ) τις πλευρές MB και MN ίσες εκ κατασκευής. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας (Πρόταση 1.9.1), τα τρίγωνα είναι ίσα. Από την ισότητα των τριγώνων, προκύπτει ότι η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ είναι ίση με την $\widehat{A\Gamma N}$. Η τελευταία όμως είναι μικρότερη της $\widehat{A\Gamma X}$, διότι το N είναι στο εσωτερικό της $\widehat{A\Gamma X}$ (Άσκηση 1.4.6). Ανάλογα δείχνουμε και ότι η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ είναι μικρότερη της $\widehat{A\Gamma X}$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Συχνά η γωνία $\widehat{A\Gamma X}$ αναφέρεται ως **εξωτερική του τριγώνου** (δες § 1.6) και το θεώρημα παίρνει τη μορφή: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη εκάστης των εντός και απέναντι.

Πρόταση 1.10.1 *Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη της $\widehat{BA\Gamma}$.*

Απόδειξη: Προέκτεινε μία από τις πλευρές της εσωτερικής γωνίας λ.χ. τη $B\Delta$ και όρισε το σημείο τομής της E με την $A\Gamma$ (Σχήμα 1.10.2-I). Η γωνία $\varepsilon = \widehat{BE\Gamma} > \alpha = \widehat{BA\Gamma}$ ως εξωτερική και απέναντι της α στο τρίγωνο ABE. Παρόμοια και $\delta = \widehat{B\Delta\Gamma} > \varepsilon$. Συνολικά λοιπόν $\delta > \alpha$, ο.ε.δ.

Σχήμα 1.10.2: $\alpha < \varepsilon < \delta$ Μεγαλύτερη γωνία απέναντι μεγαλύτερης πλευράς

Θεώρημα 1.10.2 *Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά, ευρίσκεται μεγαλύτερη γωνία.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η πλευρά $A\Gamma$ είναι μεγαλύτερη της AB. Τότε υπάρχει σημείο E μεταξύ του A και του Γ έτσι ώστε $|AE| = |AB|$ (Αξίωμα 1.3.3, Άσκηση 1.3.1). Το τρίγωνο BAE που σχηματίζεται είναι ισοσκελές και κατά το προηγούμενο θεώρημα η γωνία $\widehat{ABE} = \widehat{AEB} > \widehat{A\Gamma B}$. Επίσης $\widehat{AB\Gamma} > \widehat{ABE}$ διότι το E είναι στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$. Συνολικά λοιπόν $\widehat{AB\Gamma} > \widehat{A\Gamma B}$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.10.3 *Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία, ευρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά.*

Απόδειξη: Διά της εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε λοιπόν ότι, στο $AB\Gamma$ η γωνία $\alpha > \beta$ και όμως $a \leq b$. Αποκλείεται $a = b$, διότι τότε θα είχαμε και $\alpha = \beta$ (Θεώρημα 1.8.1), αντίθετα με την υπόθεσή μας. Αποκλείεται όμως και $a < b$, διότι τότε, κατά την προηγούμενη πρόταση, θα έπρεπε να ισχύει και $\alpha < \beta$, που είναι πάλι αντίθετο με την υπόθεσή μας. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $a > b$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.1 *Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο γωνιών του είναι μικρότερο των 180 μοιρών.*

Απόδειξη: Έστω α, β, γ οι γωνίες του τριγώνου. Κατά το Θεώρημα 1.10.1 κάθε μία από τις α, β είναι μικρότερη της $180^\circ - \gamma$: άρα $\alpha + \gamma < 180^\circ, \beta + \gamma < 180^\circ$. Ανάλογα αποδεικνύεται και η $\alpha + \beta < 180^\circ$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.2 *Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία αμβλεία γωνία.*

Απόδειξη: Αν είχε δύο αμβλείες λ.χ. την α και β τότε θα ήταν $\alpha + \beta > 180^\circ$, άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.3 *Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι δύο ίσες γωνίες του είναι οξείες.*

Απόδειξη: Αν οι α και β ήταν ίσες και αμβλείες ή ορθές τότε $\alpha + \beta \geq 180^\circ$, άτοπο, ο.ε.δ.

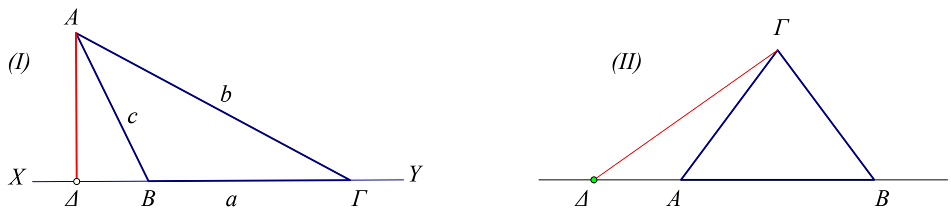
Πόρισμα 1.10.4 *Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει τις άλλες δύο γωνίες του οξείες.*

Απόδειξη: Αν η $\alpha = 90^\circ$ και β και γ είναι οι άλλες γωνίες του ορθογωνίου, τότε η εξωτερική της α είναι πάλι 90° και είναι μεγαλύτερη και από την α και από τη β, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.5 *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο κάθε μία από τις κάθετες πλευρές του είναι μικρότερη της υποτείνουσας.*

Απόδειξη: Η υποτείνουσα είναι απέναντι από την ορθή γωνία που είναι μεγαλύτερη από τις δύο άλλες που είναι οξείες (Πόρισμα 1.10.4), άρα οι δύο κάθετες πλευρές που είναι απέναντι από τις οξείες γωνίες θα είναι μικρότερες της υποτείνουσας (Θεώρημα 1.10.3), ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.6 *Έστω ότι η $A\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία XY, όπου Δ σημείο της XY. Τότε, τα σημεία B, Γ της ευθείας ικανοποιούν $|B\Delta| < |\Gamma\Delta|$, τότε και μόνον, όταν $|BA| < |\Gamma A|$.*



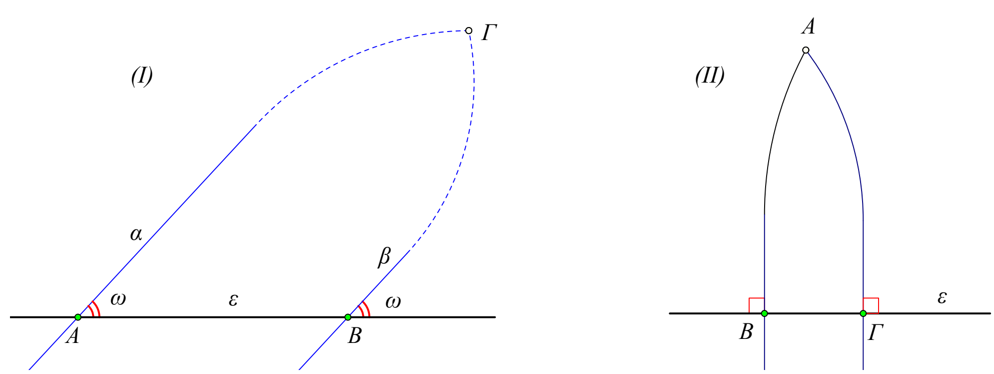
Σχήμα 1.10.3: Απόσταση από ίχνος καθέτου $\qquad |ΓA| < |ΓΔ|$

Απόδειξη: Η γωνία $\widehat{ΔBA}$ (Σχήμα 1.10.3-I) είναι οξεία, διότι είναι γωνία διαφορετική της ορθής του τριγώνου $ABΔ$ (Πόρισμα 1.10.4). Ανάλογα και η γωνία $\widehat{ΔΓA}$ είναι οξεία. Υπόθεσε τώρα ότι $|BΔ| < |ΓΔ|$. Τότε στο τρίγωνο $ABΓ$ το $Γ$ βρίσκεται στην προέκταση της $ΔB$ προς το B και η γωνία στο B είναι αμβλεία και στο $Γ$ οξεία. Άρα η απέναντι της αμβλείας πλευρά $AΓ$ θα είναι μεγαλύτερη της απέναντι της οξείας AB. Για το αντίστροφο υπόθεσε ότι $|BA| < |ΓA|$ όμως $|BΔ| > |ΓΔ|$. Προκύπτει άτοπο, διότι, κατά το προηγηθέν μέρος της απόδειξης, η $|ΓΔ| < |BΔ|$ συνεπάγεται την $|ΓA| < |BA|$, αντίθετα με την υπόθεση. Παρόμοια σε άτοπο καταλήγει και η υπόθεση ότι, $|BA| < |ΓA|$ ενώ ταυτόχρονα $|BΔ| = |ΓΔ|$, διότι η τελευταία συνεπάγεται ότι τα τρίγωνα $AΔB$ και $AΔΓ$ θα είναι ίσα. Άρα όταν ισχύει η $|BA| < |ΓA|$ θα πρέπει να ισχύει και η $|BΔ| < |ΓΔ|$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Το τελευταίο πόρισμα είναι ισοδύναμο με το ότι το μήκος $|AB|$ της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου $AΔB$ είναι αύξουσα συνάρτηση του μήκους της καθέτου $|ΔB|$, όταν η άλλη κάθετος $AΔ$ μένει σταθερά.

Πόρισμα 1.10.7 *Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με ίσες γωνίες στα A και B. Θεώρησε σημείο $Δ$ επί της προεκτάσεως του ευθυγράμμου τμήματος AB. Η $ΓΔ$ είναι μεγαλύτερη του $ΓA$ (Σχήμα 1.10.3-II).*

Πόρισμα 1.10.8 *Αν οι ευθείες $α$, $β$, προσπίπτουσες επί της ευθείας $ε$, σχηματίζουν τις ίδιες γωνίες από την ίδια μεριά της ευθείας, τότε είναι παράλληλες. Ειδικά, δύο κάθετες επί της αυτής ευθείας, είναι παράλληλες.*



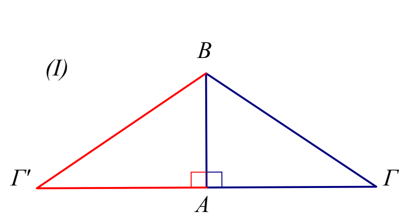
Σχήμα 1.10.4: Ευθείες προσπίπτουσες υπό γωνία $ω$ $\qquad$ Μία μόνο κάθετος από το A

Απόδειξη: Αν δεν ήταν παράλληλες και τεμνόντουσαν σε σημείο $Γ$ (Σχήμα 1.10.4-I), τότε θα σχημάτιζαν τρίγωνο με άθροισμα γωνιών στις κορυφές τις διαφορετικές από το $Γ$: $\;ω + (180° - ω) = 180°$, άτοπο (Πόρισμα 1.10.1), ο.ε.δ.

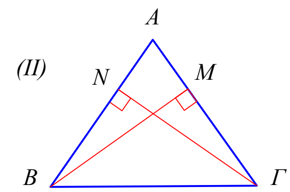
Πόρισμα 1.10.9 *Από σημείο A εκτός ευθείας $ε$ άγεται το πολύ μία κάθετος επί την $ε$.*

Απόδειξη: Αν υπήρχαν δύο διαφορετικές κάθετες από το A (Σχήμα 1.10.4-II), τότε θα σχημάτιζαν τρίγωνο και οι δύο γωνίες του στις κορυφές τις διαφορετικές από το A θα είχαν άθροισμα $90° + 90° =$

180°, άτοπο (Πόρισμα 1.10.1), ο.ε.δ.



Σχήμα 1.10.5: Ίσα ορθογώνια τρίγωνα



Ίσα ύψη χαρακτηρίζουν τα ισοσκελή

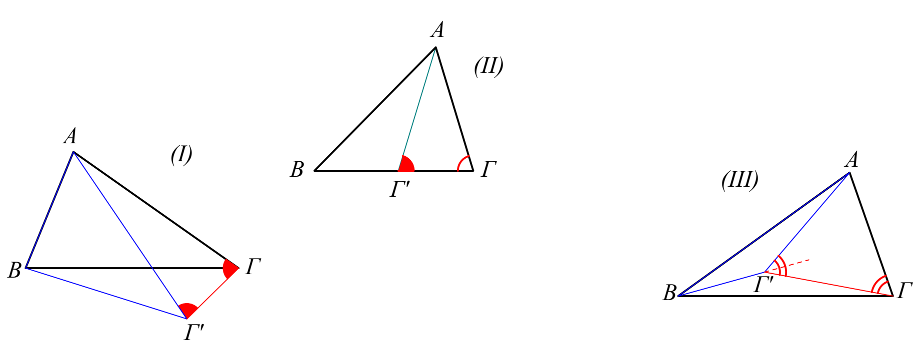
Άσκηση 1.10.1 *Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.*

Υπόδειξη: Τοποθέτησε τα δύο τρίγωνα έτσι ώστε να συμπέσουν οι δύο ίσες κάθετες πλευρές με το ευθύγραμμο τμήμα AB (Σχήμα 1.10.5-Ι), τα δε τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ να είναι από τις δύο μεριές της AB με την ορθή στο A. Τα Γ, Γ' και A είναι τότε σε μία ευθεία και το B εξ υποθέσεως ισαπέχει από τα Γ και Γ', άρα είναι στην μεσοκάθετο του $\Gamma\Gamma'$ και το A είναι το μέσον της $\Gamma\Gamma'$.

Άσκηση 1.10.2 *Αν δύο ύψη τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

Υπόδειξη: Έστω ότι τα δύο ύψη είναι τα BM και ΓN (Σχήμα 1.10.5-ΙΙ). Τότε τα τρίγωνα $BM\Gamma$ και $BN\Gamma$ είναι ορθογώνια, έχουν κοινή υποτείνουσα τη $B\Gamma$, και τις κάθετες πλευρές BM και ΓN, εξ υποθέσεως, ίσες. Κατά την προηγούμενη άσκηση, τα ορθογώνια είναι ίσα και, επομένως, οι γωνίες τους στα B και Γ θα είναι ίσες, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές (Πρόταση 1.9.3). Σημείωσε ότι η ιδιότητα αυτής της άσκησης είναι η αντίστροφη της περιεχομένης στην Άσκηση 1.9.5.

Θεώρημα 1.10.4 *Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές προσκείμενες στις γωνίες στα A και A' ($|AB| = |A'B'|$, $|A\Gamma| = |A'\Gamma'|$) και οι γωνίες στα A και A' είναι άνισες ($\widehat{A} > \widehat{A'}$), τότε αντίστοιχα άνισες είναι και οι πλευρές τους ($|B\Gamma| > |B'\Gamma'|$).*



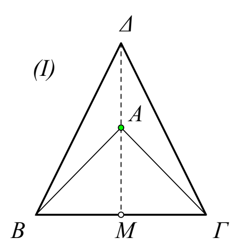
Σχήμα 1.10.6: Μεγαλύτερη πλευρά απέναντι μεγαλύτερης γωνίας

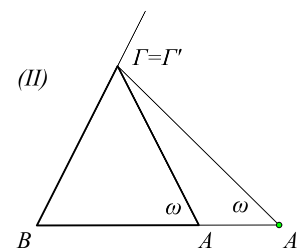
Απόδειξη: Τοποθέτησε τα τρίγωνα έτσι ώστε οι πλευρές AB και $A'B'$ να συμπέσουν και η $A'\Gamma'$ να βρεθεί στο εσωτερικό της $\widehat{A}$. Τρεις είναι οι δυνατές περιπτώσεις για τη θέση του Γ' ως προς την ευθεία $B\Gamma$ (Ι-ΙΙΙ στο σχήμα 1.10.6). Ας δούμε τη μία (Σχήμα 1.10.6-Ι) και ας αφήσουμε τις άλλες δύο ως ασκήσεις. Σε αυτήν υποθέτουμε ότι το Γ' και το A είναι σε διαφορετικές μεριές της $B\Gamma$. Τότε, συγκρίνοντας τις γωνίες του τριγώνου $B\Gamma'\Gamma$ έχουμε $\widehat{B\Gamma'\Gamma} > \widehat{A\Gamma'\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Gamma'} > \widehat{B\Gamma\Gamma'}$, όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $|A\Gamma'| = |A'\Gamma'| = |A\Gamma|$. Όμως, κατά το προηγούμενο θεώρημα, η $\widehat{B\Gamma'\Gamma} > \widehat{B\Gamma\Gamma'}$ συνεπάγεται ότι $|B\Gamma| > |B\Gamma'|$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.10 *Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές προσκείμενες στις γωνίες στα A και A' ($|AB| = |A'B'|$, $|A\Gamma| = |A\Gamma'|$) και οι τρίτες πλευρές τους είναι άνισες ($|B\Gamma| > |B'\Gamma'|$), τότε αντίστοιχα άνισες είναι και οι γωνίες στα A και A' ($\widehat{A} > \widehat{A'}$).*

Απόδειξη: Αν με τις υποθέσεις της πρότασης είχαμε $\widehat{BA\Gamma} \le \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε θα προέκυπτε άτοπο. Πράγματι, αν ήταν $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε κατά το ΠΓΠ-κριτήριο τα τρίγωνα θα ήταν ίσα και θα είχαμε $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$, άτοπο. Αν ήταν $\widehat{BA\Gamma} < \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε κατά το Θεώρημα 1.10.4, θα είχαμε $|B\Gamma| < |B'\Gamma'|$, άτοπο, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.10.3 *Δείξε ότι από δύο ισοσκελή $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με την ίδια βάση, τη μεγαλύτερη γωνία στην κορυφή του σχηματίζει αυτό που έχει μικρότερα σκέλη και αντίστροφα.*





Σχήμα 1.10.7: Μεγαλύτερο ισοσκελές Ίσα ισοσκελή

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα ότι οι κορυφές τους, που είναι στην μεσοκάθετο της βάσης $B\Gamma$ (Σχήμα 1.10.7-I), είναι πιο κοντά στο μέσον της M, όσο πιο μικρό είναι το σκέλος (Πόρισμα 1.10.6).

Άσκηση 1.10.4 *Δείξε ότι δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που έχουν ίσα σκέλη $|\Gamma A| = |\Gamma B| = |\Gamma' A'| = |\Gamma' B'|$ και ίσες γωνίες στην βάση, είναι ίσα.*

Υπόδειξη: Τοποθέτησέ τα έτσι ώστε να συμπέσουν οι γωνίες τους στα B και B' (Σχήμα 1.10.7-II), καθώς και οι $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$, λόγω της ισότητας των μηκών τους. Αν τα A, A' ήταν διαφορετικά και το A' μακρύτερα του B απ' ότι το A, θα είχαμε την εξωτερική ω του τριγώνου $AA'\Gamma$ στο A μεγαλύτερη από την εσωτερική ω στο A' ($\omega > \omega$), που είναι άτοπο. Άρα και οι κορυφές A, A' θα συμπίπτουν.

Άσκηση 1.10.5 *Δοθέντος σημείου A εκτός ευθείας ε και γωνίας ω ($0 < \omega < 90$), δείξε ότι υπάρχει ένα το πολύ ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το A, βάση επί της ε και γωνίες στην βάση ίσες με ω.*

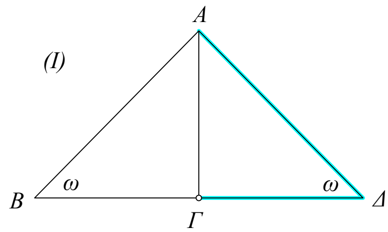
Άσκηση 1.10.6 *Δείξε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το άθροισμα των μηκών των υψών του είναι μικρότερο της περιμέτρου του.*

Άσκηση 1.10.7 *Δείξε ότι κάθε τρίγωνο, στο οποίο μία γωνία του ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων, χωρίζεται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.*

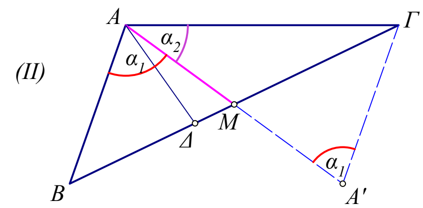
Άσκηση 1.10.8 *Δείξε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που έχουν ίσες υποτείνουσες και μία γωνία ω, διαφορετική της ορθής, ίση είναι ίσα.*

Υπόδειξη: Προέκτεινε την κάθετο $B\Gamma$ που πρόσκειται στην ω κατά το διπλάσιο έως το Δ (Σχήμα 1.10.8-I). Προκύπτει το ισοσκελές $AB\Delta$. Ανάλογα προκύπτει ισοσκελές $A'B'\Delta'$ από το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'$. Τα δύο ισοσκελή $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ έχουν ίσα σκέλη και ίσες γωνίες στη βάση, άρα είναι ίσα (Άσκηση 1.10.4). Τότε και τα μισά τους ορθογώνια $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Άσκηση 1.10.9 *Δείξε ότι η διάμεσος AM τριγώνου $AB\Gamma$ με άνισες πλευρές AB, $A\Gamma$, γέρνει προς τη μεριά της μικρότερης. Επίσης, από τις γωνίες $\widehat{BAM}$ και $\widehat{MA\Gamma}$, μεγαλύτερη είναι αυτή που πρόσκειται στην μικρότερη πλευρά. Συμπέρανε, ότι το ίχνος της διχοτόμου $A\Delta$ είναι πιο κοντά σε εκείνη την κορυφή από τις B και Γ, που ανήκει επίσης στην μικρότερη πλευρά (Σχήμα 1.10.8-II).*



Σχήμα 1.10.8: Ίσα ορθογώνια τρίγωνα



Κλίση διαμέσου

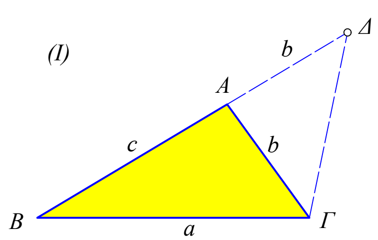
Άσκηση 1.10.10 *Δείξε το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης. Δηλαδή, αν η διάμεσος ΑΜ γέρνει προς το Β, τότε* $|AB| < |A\Gamma|$ *και* $\widehat{BAM} > \widehat{MA\Gamma}$.

1.11 Η τριγωνική ανισότητα

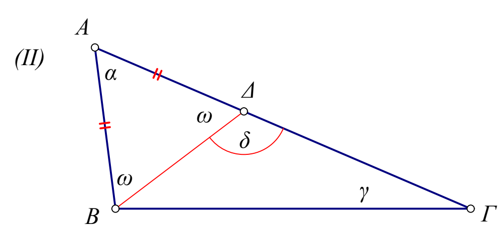
> Υπάρχουν τόσες βαθμίδες στο ανθρώπινο πνεύμα όσες οργιές υπάρχουν από εδώ ώς τον ουρανό και τόσο αναρίθμητες.
>
> *Michel de Montaigne, Περί της ανισότητας που υπάρχει ανάμεσά μας*

Η τριγωνική ανισότητα είναι θεμελιώδους σημασίας στην γεωμετρία και οδηγεί στην επιβεβαίωση της διαίσθησης, ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων.

Θεώρημα 1.11.1 *Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των μηκών των δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο του μήκους της τρίτης πλευράς.*



Σχήμα 1.11.1: Τριγωνική ανισότητα



Ανισότητα για τη διαφορά

Απόδειξη: Έστω ότι η $a = |B\Gamma|$ είναι η μεγαλύτερη από όλες τις πλευρές. Αρκεί να δείξουμε ότι $a < b + c$. Προς τούτο προέκτεινε την AB κατά τμήμα $A\Delta$ ίσο με $A\Gamma$. Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ που σχηματίζεται, η γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{B\Gamma A} + \widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι μεγαλύτερη της $\widehat{\Gamma\Delta B}$, άρα (Θεώρημα 1.10.3) και η πλευρά $B\Delta$, για την οποία $|B\Delta| = b + c$, θα είναι μεγαλύτερη της $B\Gamma$ με $|B\Gamma| = a$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.11.2 *Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ η διαφορά των μηκών των δύο πλευρών του είναι μικρότερη του μήκους της τρίτης πλευράς.*

Απόδειξη: Έστω ότι η πλευρά $A\Gamma$ είναι μεγαλύτερη της AB ($b > c$). Αρκεί να δείξουμε ότι $a > b - c$. Προς τούτο πάρε επί της $A\Gamma$ τμήμα $A\Delta$ ίσο με το AB. Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ που σχηματίζεται, η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη της $\widehat{\Delta B\Gamma}$. Τούτο, διότι ως εξωτερική της βασικής γωνίας ω του ισοσκελούς

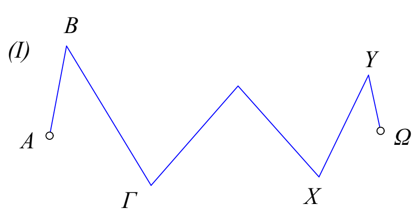
$BA\Delta$, είναι αμβλεία (Πόρισμα 1.10.3). Και αν ένα τρίγωνο έχει μία αμβλεία, αυτή είναι μεγαλύτερη από τις δύο άλλες, που πρέπει να είναι οξείες (Πόρισμα 1.10.2). Έπεται ότι η πλευρά $B\Gamma$, που είναι απέναντι στην αμβλεία $\delta = \widehat{B\Delta\Gamma}$, είναι μεγαλύτερη της $\Delta\Gamma$ που έχει μήκος $|\Delta\Gamma| = |AB| - |A\Gamma|$, ο.ε.δ.

Σχόλιο Τα δύο θεωρήματα, συνολικά, σημαίνουν ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι ανισότητες για τα μήκη των πλευρών:

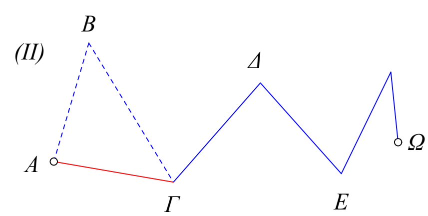
$$|a-b| < c < a+b, \qquad |b-c| < a < b+c, \qquad |c-a| < b < c+a.$$

Εύκολα επίσης βλέπει κανείς ότι όλες αυτές οι ανισότητες είναι ισοδύναμες με την απαίτηση $a < b+c$, όπου a η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

Τεθλασμένη γραμμή λέγεται το σχήμα που αποτελείται από μία ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων AB, $B\Gamma$, ..., XY, $Y\Omega$, στην οποία, κάθε ζεύγος διαδοχικών τμημάτων, έχει ένα ακριβώς κοινό άκρο



Σχήμα 1.11.2: Τεθλασμένη



Τεθλασμένης συντόμευση

(Σχήμα 1.11.2-I). Την τεθλασμένη αυτή συμβολίζουμε με $AB\Gamma\ldots Y\Omega$ και λέμε ότι **ενώνει** τα σημεία A και Ω. **Πλευρές** της τεθλασμένης ονομάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB, $B\Gamma$, ... **Μήκος** της τεθλασμένης λέγεται το άθροισμα των μηκών των πλευρών της $|AB| + |B\Gamma| + \ldots + |Y\Omega|$. Η τεθλασμένη λέγεται **κλειστή**, όταν τα σημεία A και Ω συμπίπτουν.

Πόρισμα 1.11.1 *Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Omega$ έχει μήκος $|A\Omega|$ μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης που ενώνει το A με το Ω.*

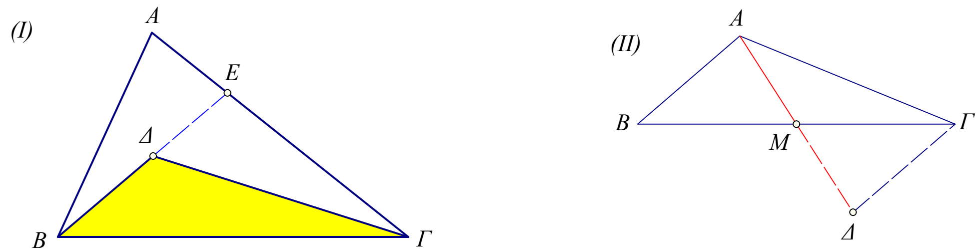
Απόδειξη: Δοθείσης της τεθλασμένης $AB\ldots Y\Omega$ και φέρνοντας την $A\Gamma$ σχηματίζεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ (Σχήμα 1.11.2-II). Λόγω της τριγωνικής ανισότητας η νέα τεθλασμένη που προκύπτει $A\Gamma\Delta E\ldots XY\Omega$ έχει μικρότερο μήκος από το μήκος μ της αρχικής τεθλασμένης και μία πλευρά λιγότερη. Συνεχίζοντας κατ᾽ αυτόν τον τρόπο μειώνουμε συνεχώς και το μήκος της τεθλασμένης και το πλήθος των πλευρών της. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στο ευθύγραμμο τμήμα $A\Omega$ και η συνεχής μείωση του μήκους μέχρι το $|A\Omega|$ δίνει την ανισότητα $|A\Omega| < \mu$, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.11.1 *Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι το άθροισμα των αποστάσεων του Δ από τις κορυφές του τριγώνου είναι μικρότερο της περιμέτρου και μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τριγώνου.*

Άσκηση 1.11.2 *Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εξωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι το άθροισμα των αποστάσεων του Δ από τις κορυφές του τριγώνου είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τριγώνου.*

Άσκηση 1.11.3 *Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι το άθροισμα $|\Delta B| + |\Delta\Gamma| < |AB| + |A\Gamma|$ (Σχήμα 1.11.3-I).*

Άσκηση 1.11.4 *Δείξε ότι η διάμεσος AM τριγώνου $AB\Gamma$ έχει μήκος μικρότερο του ημι-αθροίσματος των δύο προσκειμένων πλευρών της.*



Σχήμα 1.11.3: $|\Delta B| + |\Delta\Gamma| < |AB| + |A\Gamma|$ $\qquad$ $|AM| < \frac{|AB|+|A\Gamma|}{2}$

Υπόδειξη: Προέκτεινε την AM κατά το διπλάσιο έως το Δ (Σχήμα 1.11.3-II). Τα τρίγωνα AMB και $\Delta M\Gamma$ είναι ίσα ως έχοντα $|AM| = |M\Delta|$, $|BM| = |M\Gamma|$ και τις περιεχόμενες γωνίες AMB και $\Gamma M\Delta$ ίσες. Επομένως, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $2|AM| = |A\Delta| < |A\Gamma| + |\Gamma\Delta| = |A\Gamma| + |AB|$. Σημείωσε ότι ισχύει και η $|AM| > \frac{1}{2}(|AB| + |A\Gamma| - |B\Gamma|)$ (Πόρισμα 3.12.3).

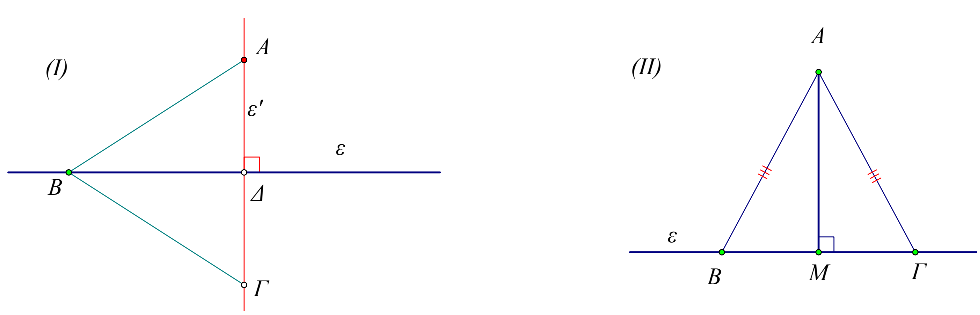
Άσκηση 1.11.5 *Δείξε ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των μηκών των διαμέσων είναι μικρότερο της περιμέτρου του τριγώνου.*

1.12 Η κάθετος από σημείο

(Ταπεινή τέχνη χωρίς ύφος,
πόσο αργά δέχομαι το δίδαγμά σου!)
Όνειρο ανάγλυφο, θα' ρθώ κοντά σου
κατακορύφως.

Κ. Καρυωτάκης, Εμβατήριο πένθιμο και κατακόρυφο

Από το Πόρισμα 1.10.9 γνωρίζουμε ότι, αν υπάρχει μία κάθετος στην ευθεία ε, από σημείο A εκτός της ευθείας, τότε αυτή θα είναι μοναδική. Το επόμενο θεώρημα δείχνει την **ύπαρξη** μιας τέτοιας καθέτου. Για την κατασκευή χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη δυνατότητα κατασκευής μιας ορισμένης γωνίας (Αξίωμα 1.4.2) με πλευρά μια δοθείσα ευθεία και κορυφή ένα δοθέν σημείο της ευθείας. Από την ίδια θεμελιώδη δυνατότητα απορρέει και η ύπαρξη της καθέτου ε' προς ευθεία ε από σημείο A **επί** της ευθείας ε (Πόρισμα 1.5.1). Η πρακτική κατασκευή της καθέτου με τον κανόνα και το διαβήτη θεμελιώνεται σε ιδιότητες του κύκλου και θα γίνει στα επόμενα (§ 2.4).



Σχήμα 1.12.1: Κάθετος από σημείο $\qquad$ Απόσταση $|AM|$ του A από την ευθεία ε

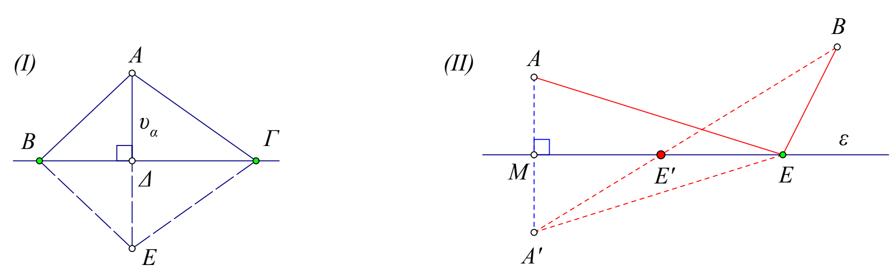
Θεώρημα 1.12.1 *Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία ακριβώς κάθετος σε αυτήν.*

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε την κάθετο μέσω ενός ισοσκελούς τριγώνου ως εξής (Σχήμα 1.12.1-I). Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο B στην ε και ορίζουμε την ευθεία BA. Στο ημιεπίπεδο ως προς ε, το μη περιέχον το σημείο A, ορίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ που σχηματίζει με την ε την ίδια γωνία που σχηματίζει και η BA (Αξίωμα 1.4.2). Επί της ευθείας αυτής παίρνουμε σημείο Γ, έτσι ώστε $|B\Gamma| = |BA|$. Η ευθεία $A\Gamma$ είναι η ζητούμενη. Πράγματι, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$ εκ κατασκευής και η ευθεία ε συμπίπτει με τη διχοτόμο της κορυφής του. Συνεπώς, η ε θα είναι κάθετη στην βάση $A\Gamma$ του τριγώνου (Πόρισμα 1.8.2), ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.12.1 *(Απόσταση σημείου από ευθεία) Έστω A σημείο εκτός ευθείας ε και AM η κάθετος επ' αυτήν. Για κάθε άλλο σημείο B της ευθείας η AB είναι μεγαλύτερη της AM.*

Απόδειξη: Για κάθε άλλο σημείο B (Σχήμα 1.12.1-II) σχηματίζεται ορθογώνιο στο M τρίγωνο AMB με υποτείνουσα AB, που είναι πάντοτε μεγαλύτερη της καθέτου AM (Πόρισμα 1.10.5), ο.ε.δ.

Το σημείο M ονομάζεται (κάθετος ή ορθογώνια) **προβολή** του A επί της ευθείας ε. Το μήκος $|AM|$ της AM ονομάζουμε **απόσταση** του σημείου από την ευθεία.



Σχήμα 1.12.2: Προεκτείνοντας το ύψος κατά το διπλάσιο Ελαχιστοποίηση του $|EA| + |EB|$

Άσκηση 1.12.1 *Προέκτεινε το ύψος υ_α του τριγώνου $AB\Gamma$ από το A, προς τη $B\Gamma$, κατά το διπλάσιο έως το σημείο E. Το τρίγωνο $BE\Gamma$ που σχηματίζεται είναι ίσο με το $AB\Gamma$.*

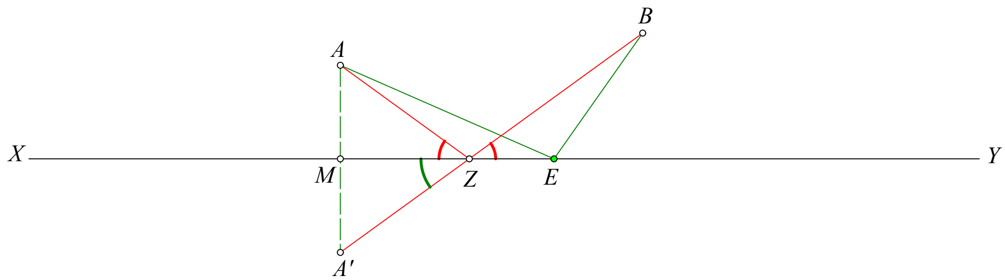
Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο, δείξε πρώτα ότι τα τρίγωνα $B\Delta A$ και $B\Delta E$ (Σχήμα 1.12.2-I) είναι ίσα και τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι επίσης ίσα. Κατόπιν, εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο, δείξε ότι και τα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.

Άσκηση 1.12.2 *Δίδονται δύο διαφορετικά σημεία A και B από την ίδια μεριά της ευθείας ε και σημείο E κινούμενο επ' αυτής. Να βρεθεί η θέση E' του E για την οποία το άθροισμα των αποστάσεων $|EA|+|EB|$ καθίσταται ελάχιστο (Σχήμα 1.12.2-II).*

Υπόδειξη: Πρόβαλλε το A στην ευθεία ε στο M και προέκτεινε την AM προς το M κατά το διπλάσιο έως το σημείο A'. Εκ κατασκευής η ε είναι τότε η μεσοκάθετος του AA' και για κάθε σημείο E της ε τα τμήματα EA και EA' είναι ίσα. Συνεπώς, το άθροισμα $|EA| + |EB| = |EA'| + |EB|$. Έστω E' το σημείο τομής της $A'B$ και της ε. Για τα σημεία E της ε, τα διαφορετικά του E', στο τρίγωνο EBA' ισχύει πάντοτε $|EA'| + |EB| \geq |A'B|$. Η ισότητα ισχύει μόνον όταν το σημείο E ταυτίζεται με το E'. Αυτό είναι το σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται η $|EA| + |EB|$.

Άσκηση 1.12.3 *Δίδονται δύο διαφορετικά σημεία A και B από την ίδια μεριά της ευθείας XY και σημείο E κινούμενο επ' αυτής. Να βρεθεί η θέση Z του E για την οποία οι γωνίες $\widehat{AZX}$ και $\widehat{BZY}$ είναι ίσες.*

Υπόδειξη: Έστω ότι λύθηκε το πρόβλημα και βρέθηκε η θέση του Z (Σχήμα 1.12.3). Προέκτεινε τη ZB και πάρε επ' αυτής ZA' ίσο με το ZA. Το τρίγωνο ZAA' είναι ισοσκελές και η XY εκ κατασκευής είναι διχοτόμος της γωνίας στην κορυφή του Z. Συνεπώς, η AA' είναι κάθετος στην XY και την τέμνει



Σχήμα 1.12.3: Σημείο ανάκλασης Z από το A στο B

στο μέσον M της AA' (Πόρισμα 1.8.2). Συνεπώς το A' προσδιορίζεται από τα δεδομένα φέρνοντας κάθετο AM από το A στην XY και προεκτείνοντας αυτήν προς το M κατά το διπλάσιο. Η τομή της $A'B$ με τη XY προσδιορίζει το ζητούμενο σημείο.

Σχόλιο Είναι αξιοσημείωτο ότι η λύση των δύο τελευταίων ασκήσεων ορίζεται από το ίδιο σημείο. Στην φυσική αυτό αντιστοιχεί στο νόμο της ανάκλασης, κατά τον οποίον μια ακτίνα που εκπέμπεται από το A, ανακλάται στην XY (κάτοπτρο) και η εξ ανακλάσεως ακτίνα που περνά από το B, έχει δύο ιδιότητες ταυτόχρονα: α) το μήκος $|AZ| + |ZB|$ είναι το ελάχιστο δυνατόν, β) η γωνία $\widehat{AZX}$ (η συμπληρωματική αυτής λέγεται **γωνία πρόσπτωσης**) (Σχήμα 1.12.3) είναι ίση με τη γωνία $\widehat{YZB}$ (η συμπληρωματική αυτής λέγεται **γωνία ανάκλασης**).

Άσκηση 1.12.4 *Δίδεται ευθεία ε και δύο σημεία A, B από την ίδια μεριά της ευθείας. Να βρεθεί σημείο Γ επί της ε για το οποίο η διαφορά $||\Gamma A| - |\Gamma B||$ γίνεται μέγιστη. Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση που τα A και B είναι σε διαφορετικές μεριές της ε.*

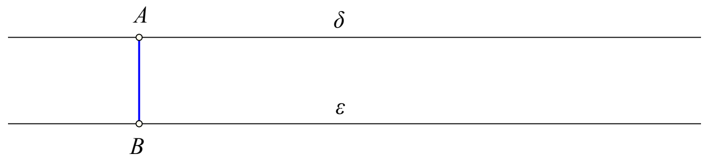
Άσκηση 1.12.5 *Δείξε ότι, αν $|AB| < |A\Gamma|$, τότε η προβολή Δ της κορυφής A στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι πιο κοντά στο B από ότι στο Γ ($|B\Delta| < |\Delta\Gamma|$).*

1.13 Η παράλληλος από σημείο

> Αλλά η μηχανή εκείνη δεν ήταν τίποτε μπροστά στον Αρχιμήδη και στα μηχανήματά του. Ο ίδιος δεν τα θεωρούσε τίποτε άξιο προσοχής, γιατί τα περισσότερα τα είχε δημιουργήσει ως πάρεργο, παίζοντας με τα γεωμετρικά προβλήματα ...
>
> *Πλούταρχος, Βίοι παράλληλοι, Πελοπίδας–Μάρκελλος*

Η επόμενη πρόταση αποφαίνεται για την **ύπαρξη** μιας παραλλήλου. Δεν λέει όμως τίποτε για τη **μοναδικότητα** αυτής της παραλλήλου. Θα δούμε παρακάτω ότι εδώ απαιτείται μια βασική υπόθεση (αξίωμα), κατά την οποία δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει άλλη παράλληλος από την κατασκευασθείσα. Οι προτάσεις που αποδείξαμε μέχρι τούδε δεν χρειάσθηκαν πουθενά την υπόθεση της μοναδικότητας της παραλλήλου. Στηρίζονται αποκλειστικά στις ιδιότητες (αξιώματα) για ευθείες, γωνίες και τρίγωνα, που δεχθήκαμε ότι ισχύουν (στις παραγράφους 1.2-1.6). Τέτοιες προτάσεις αποτελούν το αντικείμενο της λεγόμενης **απόλυτης Γεωμετρίας**.

Οι προτάσεις της Απόλυτης Γεωμετρίας, στις οποίες εντάσσονται και όλες οι προτάσεις που αποδείξαμε μέχρι τώρα, έχουν ισχύ τόσο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπου δεχόμαστε τη μοναδικότητα της παραλλήλου, όσο και στην λεγόμενη **υπερβολική Γεωμετρία** (μια σύντομη επισκόπηση της οποίας δίδεται στην § 7.9), στην οποία δεχόμαστε ότι υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες από σημείο A προς ευθεία ε. Δύο τελευταίες προτάσεις της Απόλυτης Γεωμετρίας αποδεικνύουμε και στην επόμενη παράγραφο, για να περάσουμε κατόπιν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεχόμενοι τη μοναδικότητα της παραλλήλου.

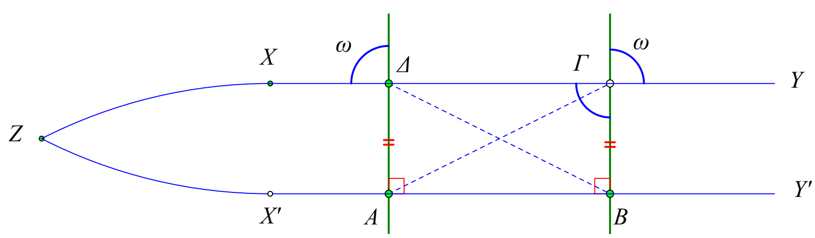


Σχήμα 1.13.1: Παράλληλος από σημείο

Πρόταση 1.13.1 *Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία παράλληλος δ προς αυτήν.*

Απόδειξη: Κατά τα προηγούμενα (Θεώρημα 1.12.1), υπάρχει η κάθετος AB επί την ε. Επίσης κατασκευάζεται η κάθετος δ της AB στο σημείο της A (Πόρισμα 1.5.1). Οι ευθείες ε και δ, κατά το Πόρισμα 1.10.8, είναι παράλληλες , ο.ε.δ.

Άσκηση 1.13.1 *Στα σημεία A και B μίας ευθείας και από την ίδια μεριά της ύψωσε δύο ίσες κάθετες $A\Delta$ και $B\Gamma$. Δείξε ότι η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλος της ευθείας AB.*



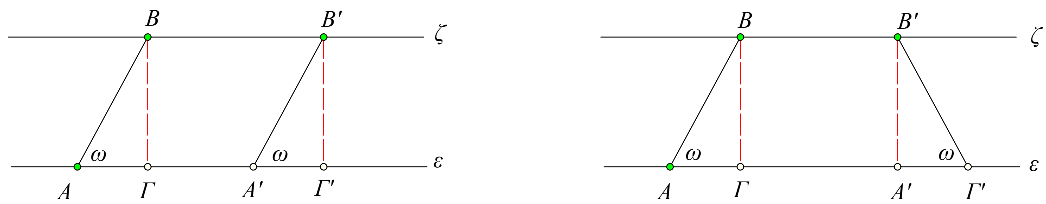
Σχήμα 1.13.2: Τραπέζιο Saccheri

Υπόδειξη: Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ίσα (Σχήμα 1.13.2), ως έχοντα την AB κοινή, τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ ίσες εκ κατασκευής και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες ως ορθές (ΠΓΠ-κριτήριο). Συνάγεται ότι οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες και απ' αυτό, ότι και τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα (ΠΠΠ-κριτήριο). Από την ισότητα των τελευταίων τριγώνων, συνάγεται και η ισότητα των γωνιών $\widehat{X\Delta A}$ και $\widehat{Y\Gamma B}$. Τώρα, στην απόδειξη ότι οι AB και $\Gamma\Delta$ δεν τέμνονται, πάμε διά της εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε ότι αυτές τέμνονται σε σημείο Z και σχηματίζουν σε αυτό γωνία ζ. Τότε, στο τρίγωνο ΔAZ, η εξωτερική γωνία στο Δ θα είναι $\omega > 90^\circ$, στο δε $B\Gamma Z$ η εξωτερική γωνία στο B θα είναι $90^\circ > \omega$. Από τις δύο αυτές συνάγεται ότι $\omega > \omega$, που είναι άτοπο. Άρα οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.

Σχόλιο Το σχήμα $AB\Gamma\Delta$ της προηγουμένης άσκησης, ονομάζεται *Τραπέζιο του Saccheri (1667-1733)* και έπαιξε ιδιαίτερο ρόλο στην ιστορία της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Μετά την παραδοχή του αξιώματος των παραλλήλων, θα δούμε ότι η γωνία ω είναι ορθή. Στην παρούσα φάση όμως, όπου δεν έχουμε ακόμη κάνει κάποια παραδοχή για τις παράλληλες, δεν μπορούμε να αποδείξουμε κάτι τέτοιο.

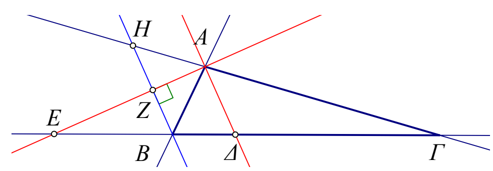
Άσκηση 1.13.2 *Από τα σημεία A και A' ευθείας ε και προς το ίδιο μέρος της φέρε δύο ίσα τμήματα AB, $A'B'$ και με την ίδια κλίση ω προς την ε. Δείξε ότι η BB' είναι παράλληλος της ε.*

Υπόδειξη: Φέρε τις καθέτους $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ προς την ε (Σχήμα 1.13.3). Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία γωνία (ω) διαφορετική της ορθής ίση, συνεπώς είναι ίσα (Άσκηση 1.10.8). Συνεπώς, οι κάθετες $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ είναι ίσες και το συμπέρασμα προκύπτει από την Άσκηση 1.13.1.



Σχήμα 1.13.3: Ίσα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν μία παράλληλο

Άσκηση 1.13.3 *Έστω ότι οι διχοτόμοι της γωνίας A τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουν την απέναντι πλευρά στα σημεία: Δ (εσωτερική) και E (εξωτερική). Πρόβαλλε την κορυφή B στο Z επί της AE και διπλασίασε το τμήμα BZ προς το Z μέχρι το H. Δείξε ότι το H είναι επί της ευθείας $A\Gamma$. Δείξε επίσης ότι η HB είναι παράλληλος της $A\Delta$.*



Σχήμα 1.13.4: Παράλληλη της διχοτόμου

Υπόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και AHZ είναι ίσα εκ κατασκευής (ΠΓΠ-κριτήριο), άρα οι γωνίες τους στο A είναι ίσες και επειδή η AZ είναι διχοτόμος της παραπληρωματικής της γωνίας στο A, η AH θα συμπίπτει με την ευθεία $A\Gamma$ (Σχήμα 1.13.4). Οι δύο ευθείες $A\Delta$ και ZB είναι κάθετες στην AE, άρα δεν τέμνονται (Θεώρημα 1.12.1).

1.14 Το άθροισμα γωνιών τριγώνου

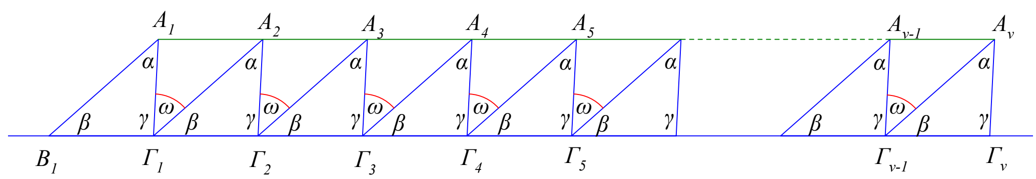
Απλώς επινοώ, μετά περιμένω να γίνουν αναγκαία αυτά που επινόησα.

Richard Buckminster Fuller, Time 10/6/1964

Στις αποδείξεις των δύο επομένων θεωρημάτων (που οφείλονται στον Legendre (1752-1833), ([Bon12, *σ.* 55], [AP88, *σ.* 80])) και πάλι δεν θα χρησιμοποιήσουμε κάποια ιδιότητα των παραλλήλων. Αυτά τα θεωρήματα ευρίσκονται, κατά κάποιο τρόπο, στο σύνορο μεταξύ της Απόλυτης Γεωμετρίας και των άλλων Γεωμετριών (Ευκλείδειας και Υπερβολικής). Το δεύτερο θεώρημα φανερώνει, ότι αν ισχύουν τα αξιώματα για ευθείες, γωνίες και τρίγωνα που δεχθήκαμε στις παραγράφους 1.2-1.6 και στο επίπεδο βρεθεί κάποιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με άθροισμα γωνιών $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, τότε και κάθε άλλο τρίγωνο του επιπέδου αυτού θα έχει άθροισμα γωνιών 180° και θα ισχύει η μοναδικότητα της παραλλήλου από σημείο προς ευθεία, δηλαδή στο επίπεδο αυτό θα ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Παρόμοια, αν στο επίπεδο βρεθεί κάποιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με άθροισμα γωνιών $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$, τότε και σε κάθε άλλο τρίγωνο αυτού του επιπέδου το άθροισμα των γωνιών θα είναι μικρότερο των 180° και θα ισχύει ένα άλλο είδος γεωμετρίας, διαφορετικό της Ευκλείδειας, η Υπερβολική Γεωμετρία ή γεωμετρία των Bolyai 1802-1860 και Lobatsevski 1792-1856 [AP88, *σ.* 98], που αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, και ένα μοντέλο της περιγράφεται στην § 7.9.

Θεώρημα 1.14.1 *(Θεώρημα των Saccheri-Legendre) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο ή ίσο του 180 ($\alpha + \beta + \gamma \leq 180^\circ$).*

Απόδειξη: Με εις άτοπον απαγωγή. Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι υπάρχει τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\alpha+\beta+\gamma > 180°$ και δείχνουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Τοποθετούμε ν αντίγραφα του ιδίου τριγώνου στην σειρά, έτσι ώστε οι βάσεις τους $B_1\Gamma_1$, $\Gamma_1\Gamma_2$,... να είναι διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα της



Σχήμα 1.14.1: Μια ακολουθία ίσων τριγώνων

ίδιας ευθείας (Αξίωμα 1.3.3), (Σχήμα 1.14.1). Επί πλέον υποθέτουμε ότι η πλευρά $|Α\Gamma| \leq |Β\Gamma|$. Δημιουργούνται τότε τα τρίγωνα $A_1\Gamma_1A_2$, $A_2\Gamma_2A_3$ ..., τα οποία, αποδεικνύεται εύκολα (ΠΓΠ-κριτήριο), ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Αν $\omega = |\widehat{A_1\Gamma_1A_2}|$, τότε η $\beta+\omega+\gamma = 180°$ μαζί με την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma > 180°$ συνεπάγεται ότι $\omega < \alpha$. Συνεπώς, συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_1\Gamma_1A_2$, που έχουν τις πλευρές τους στις κορυφές A_1 και Γ_1 αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες ($\omega < \alpha$), κατά το Θεώρημα 1.10.4, συμπεραίνουμε ότι οι τρίτες πλευρές τους θα είναι αντίστοιχα άνισες $|A_1A_2| < |B_1\Gamma_1|$. Συγκρίνουμε τώρα τα μήκη των δύο γραμμών που ενώνουν τα B_1 και Γ_ν. Κατά το Πόρισμα 1.11.1 το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $|B_1\Gamma_\nu| = \nu|B_1\Gamma_1|$ θα είναι μικρότερο του μήκους της τεθλασμένης γραμμής $B_1A_1A_2A_3...A_\nu\Gamma_\nu$, το οποίο είναι $|B_1A_1| + (\nu-1)|A_1A_2| + |A_1\Gamma_1|$. Από την ανισότητα

$$\nu|B_1\Gamma_1| < |B_1A_1| + (\nu-1)|A_1A_2| + |A_1\Gamma_1|$$

λόγω της $|A_1\Gamma_1| \leq |B_1\Gamma_1|$ που υποθέσαμε παραπάνω προκύπτει ότι

$$\nu|B_1\Gamma_1| < |B_1A_1| + (\nu-1)|A_1A_2| + |B_1\Gamma_1|.$$

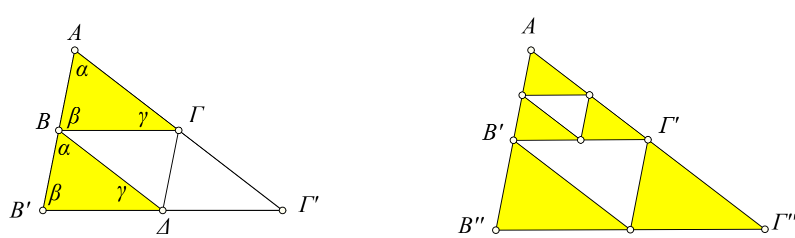
Από αυτήν πάλι προκύπτει με απλές πράξεις η

$$(\nu-1)(|B_1\Gamma_1| - |A_1A_2|) < |B_1A_1|.$$

Η ανισότητα αυτή είναι αντιφατική, διότι, όπως σημειώσαμε παραπάνω, το αριστερό μέλος της είναι θετικό και αυξάνει πέρα από κάθε όριο καθώς αυξάνει το ν, ενώ το δεξί είναι σταθερό. Η αντίφαση, στην οποία οδηγηθήκαμε υποθέτοντας ότι $\alpha+\beta+\gamma > 180°$, συνεπάγεται ότι πρέπει να ισχύει $\alpha+\beta+\gamma \leq 180°$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.14.2 *(Θεώρημα του Legendre) Αν υπάρχει ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ του επιπέδου E, του οποίου το άθροισμα των γωνιών είναι $180°$, τότε και για κάθε άλλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ του E, το άθροισμα γωνιών του θα είναι επίσης $180°$.*

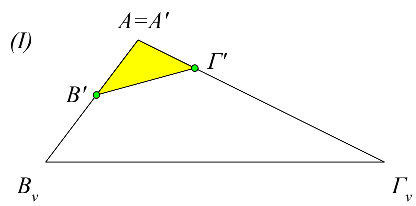
Απόδειξη: Την απόδειξη, που είναι κάπως εκτεταμένη, χωρίζουμε σε τρία λήμματα.



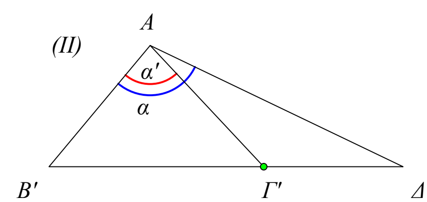
Σχήμα 1.14.2: Ίδιες γωνίες αλλά μεγάλες πλευρές

Λήμμα 1.14.1 *Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει άθροισμα γωνιών 180°, τότε υπάρχει τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ με τις ίδιες γωνίες και πλευρές $|A'B'| = 2^\nu \cdot |AB|$, $|A'\Gamma'| = 2^\nu \cdot |A\Gamma|$, για οσοδήποτε μεγάλο ν.*

Απόδειξη: Έστω ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει άθροισμα γωνιών $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Προεκτείνουμε την AB και κατασκευάζουμε τρίγωνο $BB'\Delta$ ίσο με το $AB\Gamma$ (Σχήμα 1.14.2). Τότε και το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ίσο με το $BA\Gamma$, διότι τα δύο τρίγωνα έχουν την πλευρά $B\Gamma$ κοινή, $|B\Delta| = |A\Gamma|$ και την περιεχόμενη γωνία ίση με γ. Προεκτείνουμε κατόπιν την $A\Gamma$ κατά το διπλάσιο και ορίζουμε το Γ' με $|A\Gamma' = 2|A\Gamma|$. Τότε το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma'$ είναι και αυτό ίσο με το $AB\Gamma$. Επίσης επειδή στο Δ οι γωνίες αθροίζονται σε 180°, τα B', Δ, Γ' είναι επ' ευθείας. Συνολικά, λοιπόν, το $AB'\Gamma'$ έχει τις ίδιες γωνίες με το $AB\Gamma$ αλλά διπλάσιες πλευρές. Η απόδειξη του λήμματος προκύπτει επαναλαμβάνοντας ν φορές την προηγούμενη διαδικασία. ο.ε.δ.



Σχήμα 1.14.3: Τρίγωνα με μία κοινή γωνία



Τρίγωνα με $\alpha' < \alpha$

Λήμμα 1.14.2 *Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ του επιπέδου E έχει άθροισμα γωνιών 180° και το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχει μία από τις γωνίες του ίση με μία γωνία του $AB\Gamma$, τότε και το $A'B'\Gamma'$ θα έχει άθροισμα γωνιών 180°.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες στα A και A' αντίστοιχα (Σχήμα 1.14.3-I). Τότε τα τοποθετούμε έτσι ώστε οι ίσες γωνίες να συμπέσουν, τα A, B', B να γίνουν συνευθειακά και τα A, Γ', Γ να γίνουν επίσης συνευθειακά. Στην ανάγκη μεγαλώνοντας το $AB\Gamma$ με τον τρόπο του προηγουμένου λήμματος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $AB_\nu\Gamma_\nu$ έχει τις ίδιες γωνίες με το $AB\Gamma$ και είναι τόσο μεγάλο, ώστε το B' να είναι μεταξύ των A, B_ν και το Γ' να είναι μεταξύ των A και Γ_ν (Σχήμα 1.14.3-I). Φέρνοντας τότε τη $B\Gamma_\nu$, χωρίζουμε το $B\Gamma\Gamma_\nu B_\nu$ σε δύο τρίγωνα. Εφαρμόζοντας σε κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα την ανισότητα του προηγουμένου θεωρήματος και προσθέτοντας τις δύο ανισότητες που προκύπτουν, έχουμε

$$\beta + \gamma + (180^\circ - \beta') + (180^\circ - \gamma') \le 2 \cdot 180^\circ,$$

που είναι ισοδύναμη με τη

$$\beta + \gamma \le \beta' + \gamma'.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της ανισότητας την κοινή γωνία α έχουμε

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma \le \alpha + \beta' + \gamma' \le 180^\circ,$$

που συνεπάγεται ότι $\alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ$, ο.ε.δ.

Λήμμα 1.14.3 *Αν το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχει μία γωνία του μικρότερη από μία γωνία του $AB\Gamma$, που έχει άθροισμα γωνιών 180°, τότε και το $A'B'\Gamma'$ έχει άθροισμα γωνιών 180°.*

Απόδειξη: Προέκτεινε τη $B'\Gamma'$ και πάρε προς το Γ' το σημείο Δ, έτσι ώστε η γωνία $B'A\Delta$ να έχει μέτρο α (Σχήμα 1.14.3-II). Αν τα τρίγωνα $AB'\Gamma'$, $\Gamma'A\Delta$ έχουν αντίστοιχα αθροίσματα γωνιών Σ_1, Σ_2, τότε, κατά το προηγούμενο λήμμα, εφαρμοζόμενο στο $AB'\Delta$,

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = 2 \cdot 180^\circ.$$

Κατά το Θεώρημα 1.14.1, θα πρέπει $\Sigma_1 \le 180^\circ$ και $\Sigma_2 \le 180^\circ$. Άρα, για να ισχύει η προηγούμενη ισότητα, θα πρέπει και $\Sigma_1 = 180^\circ$ και $\Sigma_2 = 180^\circ$, ο.ε.δ.

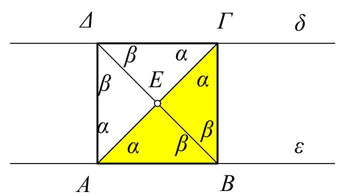
Απόδειξη: (του θεωρήματος 1.14.2) Έστω ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει άθροισμα γωνιών $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ και $A'B'\Gamma'$ τυχόν άλλο τρίγωνο με γωνίες α', β', γ'. Δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα και οι τρεις ανισότητες $\alpha < \alpha'$, $\beta < \beta'$, $\gamma < \gamma'$, διότι τότε, προσθέτοντας κατά μέλη θα έχουμε

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma < \alpha' + \beta' + \gamma',$$

που αντιφάσκει στο Θεώρημα 1.14.1. Άρα, μία τουλάχιστον απ' αυτές δεν θα ισχύει, ας πούμε η πρώτη, και αντ' αυτής θα ισχύει η

$$\alpha' \leq \alpha.$$

Τότε, εφαρμόζοντας το τελευταίο λήμμα, θα έχουμε ότι και για το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ το άθροισμα γωνιών του $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.14.4: Κατασκευή από ισοσκελές ορθογώνιο

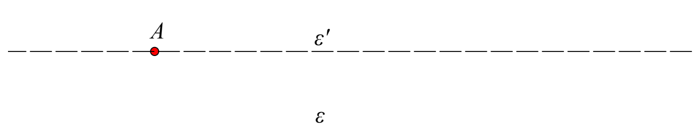
Άσκηση 1.14.1 *Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές ορθογώνιο στο B τρίγωνο και BE η διάμεσος αυτού. Προέκτεινε τη BE προς το E μέχρι διπλασιασμού της στο Δ. Δείξε ότι τα τρίγωνα που δημιουργούνται: ABE, $BE\Gamma$, $\Gamma E\Delta$ και ΔEA είναι ίσα. Δείξε επίσης ότι οι ευθείες AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες (Σχήμα 1.14.4).*

Σχόλιο Σημείωσε ότι με τα μέσα που διαθέτουμε έως τώρα, δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι εκτός των γωνιών στα B, Δ και οι γωνίες στα Γ και A του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθές. Χρειάζεται γι' αυτό το αξίωμα των παραλλήλων, που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο. Ωστόσο οι γνώσεις μας επαρκούν για να δείξουμε την παραλληλία των AB και $\Gamma\Delta$, καθώς και την παραλληλία των $B\Gamma$ και $A\Delta$.

1.15 Το αξίωμα των παραλλήλων

> Ο σχεδιασμός μου σ' αυτό το βιβλίο δεν είναι να εξηγήσω τις Ιδιότητες του Φωτός με Υποθέσεις, αλλά να τις αποδείξω με Λογική και Πειράματα. Γι' αυτό θα προτάξω τους επόμενους Ορισμούς και Αξιώματα.
>
> *Isaac Newton, Οπτική*

Οι προτάσεις που αποδείξαμε μέχρι τώρα εντάσσονται, όπως σημειώσαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους, στα πλαίσια της *απόλυτης γεωμετρίας*, στην οποία δεν χρησιμοποιούμε ιδιότητες (αξιώμα-



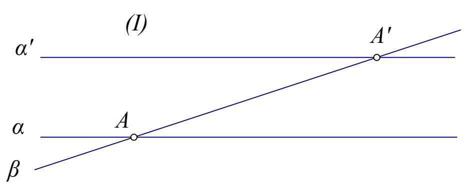
Σχήμα 1.15.1: ε' μοναδική παράλληλος της ε από το A

τα) μοναδικότητας ή μη παραλλήλων από σημείο προς ευθεία. Στην παράγραφο αυτή διαβαίνουμε το σύνορο της απόλυτης γεωμετρίας και μπαίνουμε στην επικράτεια της Ευκλείδειας γεωμετρίας και τη μελέτη σχημάτων και ιδιοτήτων τους που εξαρτώνται από τη συμπεριφορά των παραλλήλων ευθειών.

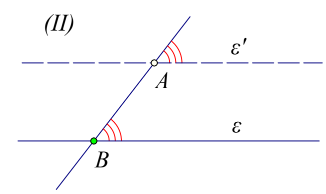
Η Ευκλείδεια Γεωμετρία, εκτός των ιδιοτήτων ευθειών, γωνιών και τριγώνων που δεχθήκαμε στις Παραγράφους 1.2-1.6, αποδέχεται και την ισχύ της **μοναδικότητας** της παραλλήλου, δηλαδή ότι:

Αξίωμα 1.15.1 *Από σημείο A, εκτός ευθείας ε, άγεται μία και μόνον παράλληλος ε' προς την ε.*

Πόρισμα 1.15.1 *Αν η ευθεία α τέμνει την ευθεία β, τότε, και μία παράλληλος α' της α, θα τέμνει επίσης τη β.*



Σχήμα 1.15.2: Αν τέμνει η α τέμνει και η παράλληλος α'

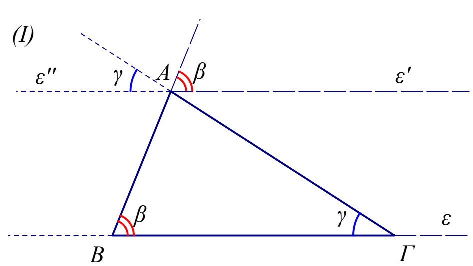


Παράλληλος από το A

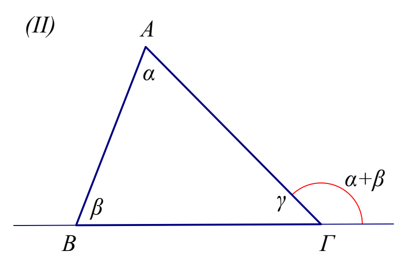
Απόδειξη: Αν η α' δεν έτεμνε τη β (Σχήμα 1.15.2-I), τότε από το σημείο τομής A των α και β θα είχαμε δύο διαφορετικές παραλλήλους προς την α': την α και τη β, που είναι άτοπο. Άρα η α' τέμνει τη β, ο.ε.δ.

Στην παράγραφο 1.13 είδαμε ένα τρόπο κατασκευής μιας παραλλήλου. Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε από το A μια τέμνουσα AB της ε, όχι κατ᾽ ανάγκην κάθετο στην ε (Πόρισμα 1.10.8) και να κατασκευάσουμε την παράλληλο , σχηματίζοντας στο A την ίδια γωνία ω που σχηματίζει η AB με την ε (στο B) (Σχήμα 1.15.2-II). Λόγω της βασικής υπόθεσης της μοναδικότητας, αυτή θα είναι η μία και μοναδική παράλληλος της ε που άγεται από το A.

Θεώρημα 1.15.1 *Από την υπόθεση της μοναδικότητας της παραλλήλου έπεται ότι το άθροισμα των μέτρων των γωνιών ενός τριγώνου $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.*



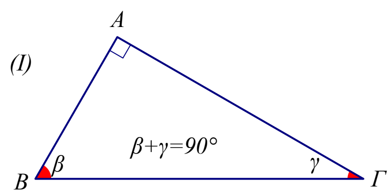
Σχήμα 1.15.3: Το άθροισμα γωνιών τριγώνου



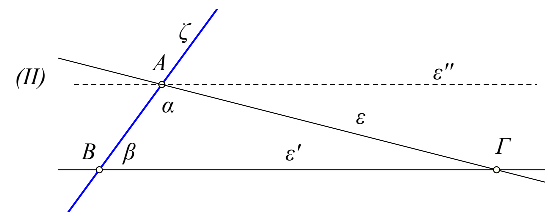
Εξωτερική γωνία τριγώνου

Απόδειξη: Κάνουμε δύο φορές την κατασκευή της παραλλήλου προς τη βάση $\varepsilon = B\Gamma$ του τριγώνου από την απέναντι κορυφή A (Σχήμα 1.15.3-I). Την πρώτη φορά θεωρούμε τέμνουσα την AB και φέρνουμε την ε', σχηματίζοντας στο A γωνία ίση με τη β. Τη δεύτερη φορά κάνουμε την ίδια εργασία χρησιμοποιώντας ως τέμνουσα την $A\Gamma$ και φέρνουμε την ε'', σχηματίζοντας στο A γωνία ίση με τη γ. Από τη μοναδικότητα της παραλλήλου, προκύπτει ότι οι παράλληλες ε', ε'' της ε ταυτίζονται και στο A σχηματίζονται οι τρεις γωνίες του τριγώνου και το άθροισμά τους που είναι 180°, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.2 *Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των δύο εντός και απέναντι γωνιών (Σχήμα 1.15.3-II).*



Σχήμα 1.15.4: Γωνίες ορθογωνίου τριγώνου



Το αξίωμα παραλληλίας κατά Ευκλείδη

Πόρισμα 1.15.3 *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι μία ορθή γωνία (Σχήμα 1.15.4-I).*

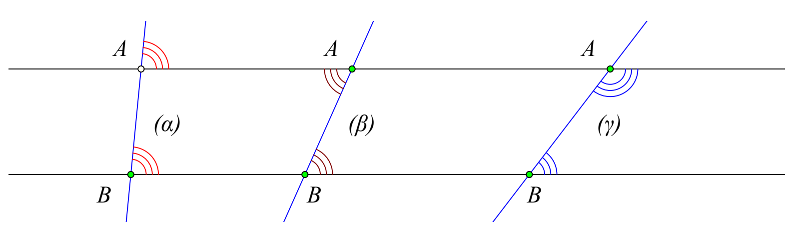
Πόρισμα 1.15.4 *Αν ευθεία ζ, προσπίπτουσα σε δύο άλλες ε και ε', τις τέμνει αντίστοιχα στα A και B, σχηματίζοντας σε αυτά γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη α και β με $\alpha + \beta < 180^\circ$, τότε οι ε και ε' τέμνονται σε σημείο Γ προς το μέρος των γωνιών α και β (Σχήμα 1.15.4-II).*

Απόδειξη: Κατ' αρχήν οι $\varepsilon, \varepsilon'$ δεν μπορεί να μην τέμνονται, δηλαδή να είναι παράλληλοι, διότι τότε θα είχαμε $\alpha + \beta = 180^\circ$, αντίθετα με την υπόθεση. Κατόπιν δεν μπορεί να τέμνονται από την άλλη μεριά, διότι μαζί με το σημείο τομής Γ θα σχηματιζόταν τρίγωνο με άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180°, που είναι άτοπο, ο.ε.δ.

Σχόλιο Στα στοιχεία του Ευκλείδη το αξίωμα της παραλληλίας διατυπώνεται στην μορφή του τελευταίου πορίσματος, που εδώ αποδεικνύεται ως συνέπεια του αξιώματος παραλληλίας. Το επόμενο πρόβλημα δείχνει ότι οι δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες, δηλαδή αν μία από αυτές θεωρηθεί ως αξίωμα η άλλη αποδεικνύεται ως θεώρημα.

Άσκηση 1.15.1 *Δείξε ότι, αν υποθέσουμε την ισχύ της ιδιότητας του τελευταίου πορίσματος, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία και μόνον παράλληλη προς την ε.*

Υπόδειξη: Βάσει του σχήματος 1.15.4-II. Έστω η παράλληλος ε'' της ε' από το A, που κατασκευάζεται φέροντας τέμνουσα της ζ που σχηματίζει στο A γωνία α'' με $\alpha'' + \beta = 180^\circ$. Μια ευθεία ε διαφορετική της ε'', θα σχηματίζει στο A γωνία διαφορετική της α'' και συνεπώς, από κάποια μεριά της ευθείας ζ θα σχηματίζονται δύο γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη με $\alpha + \beta < 180^\circ$, άρα οι ευθείες θα τέμνονται από εκείνη τη μεριά. Άρα υπάρχει μία και μόνο παράλληλος της ε' από το A.



Σχήμα 1.15.5: Ευθεία προσπίπτουσα σε δύο παραλλήλους

Πόρισμα 1.15.5 *Ευθεία AB προσπίπτουσα σε παραλλήλους ε και ε' σχηματίζει:*
α) Τις εντός - εκτός (σχήμα 1.15.5 (α)) και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
β) Τις εντός και εναλλάξ (σχήμα 1.15.5 (β)) γωνίες ίσες,
γ) Τις εντός και επί τα αυτά μέρη (σχήμα 1.15.5 (γ)) παραπληρωματικές.

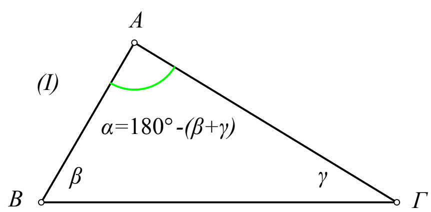
Άσκηση 1.15.2 *Δείξε τη μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας, δηλαδή: αν η ευθεία β είναι παράλληλη της α και η ευθεία γ είναι παράλληλη της β, τότε η γ είναι και παράλληλη της α ή ταυτίζεται με αυτήν.*

Υπόδειξη: Αν η γ δεν ήταν παράλληλη της α, τότε θα την έτεμνε. Τότε όμως (Πόρισμα 1.15.1) και η β που είναι παράλληλη της α θα έτεμνε τη γ, άτοπο.

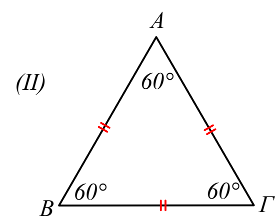
Άσκηση 1.15.3 *Δείξε ότι, αν δύο διαφορετικές ευθείες α και β είναι κάθε μία παράλληλη προς μίαν ευθεία ε τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.*

Υπόδειξη: Αν δεν ήταν παράλληλες οι α και β, τότε θα είχαν κοινό σημείο A και από αυτό θα υπήρχαν δύο παράλληλοι προς την ε, άτοπο.

Πρόταση 1.15.1 *Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και κάθε ζεύγος γωνιών (β, γ), με μέτρα $\beta+\gamma < 180^\circ$, υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει γωνίες αντίστοιχα $\{\widehat{AB\Gamma} = \beta,\ \widehat{A\Gamma B} = \gamma\}$.*



Σχήμα 1.15.6: ΓΠΓ-κατασκευή τριγώνου



Το ισόπλευρο τρίγωνο

Απόδειξη: Κατά το Αξίωμα 1.4.2, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις γωνίες β και γ από την ίδια μεριά της AB (Σχήμα 1.15.6-I), με κορυφή στα B και Γ αντίστοιχα, που έχουν μία πλευρά τους την ημιευθεία $B\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα. Αυτό που εξασφαλίζουμε τώρα είναι, ότι οι δεύτερες πλευρές αυτών των γωνιών θα τέμνονται και θα ορίζουν την τρίτη κορυφή του τριγώνου Γ. Τούτο, διότι αν δεν ετέμνοντο, δηλαδή ήσαν παράλληλοι, τότε θα είχαμε δύο παραλλήλους, που θα σχημάτιζαν με την τέμνουσα αυτές ευθεία AB, εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο των 180°, που είναι άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.6 *(Ύπαρξη ισοπλεύρου τριγώνου) Για κάθε θετικό αριθμό δ υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει όλες τις πλευρές ίσες με δ και όλες τις γωνίες του ίσες με 60°. Ένα τέτοιο τρίγωνο λέγεται* **Ισόπλευρο**. *Αντίστροφα, κάθε ισόπλευρο έχει και ίσες γωνίες, κάθε μία από τις οποίες είναι 60 μοίρες.*

Απόδειξη: Κατασκεύασε το τρίγωνο με βάση $B\Gamma$ μήκους δ και προσκείμενες $\alpha = 60^\circ$ και $\beta = 60^\circ$ (Πρόταση 1.15.1). Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, και η τρίτη γωνία θα είναι 60 μοιρών, συνεπώς το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση οποιαδήποτε πλευρά του, άρα ισόπλευρο. Αντίστροφα, κάθε ισόπλευρο είναι ισοσκελές με βάση οποιαδήποτε πλευρά του, άρα όλες οι γωνίες του είναι ίσες με α και $3\alpha = 180^\circ$, το οποίο συνεπάγεται το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.7 *Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και γωνία μέτρου $\alpha < 180^\circ$, υπάρχει ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση τη $B\Gamma$ και γωνία κορυφής α.*

Απόδειξη: Οι γωνίες στην βάση του ισοσκελούς θα είναι $\omega = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, άρα κατασκευάζεται κατά την Πρόταση-1.15.1, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.8 *Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και ζεύγος γωνιών μέτρων α, β με $\alpha + \beta = 90^\circ$, υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα την AB και οξείες γωνίες α και β.*

Πόρισμα 1.15.9 *Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και οξεία γωνία μέτρου ω υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με μία κάθετο την AB και μία οξεία ίση με την ω.*

Απόδειξη: Όπως διατυπώνεται το πόρισμα αφήνει το περιθώριο το AB να είναι απέναντι στην ω ή προσκείμενη σε αυτήν. Υπάρχουν λοιπόν δύο τρίγωνα με αυτά τα δεδομένα. Το ένα έχει προσκείμενες στην AB τις γωνίες ω και 90° και το άλλο έχει προσκείμενες στην AB τις γωνίες $90^\circ - \omega$ και 90°. Και των δύο η ύπαρξη ανάγεται στην Πρόταση 1.15.1, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.15.4 *Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει μία τουλάχιστον γωνία μεγαλύτερη ή ίση των 60 μοιρών, καθώς και δύο γωνίες με άθροισμα μεγαλύτερο των 90 μοιρών.*

Υπόδειξη: Αν ήταν όλες γνήσια μικρότερες των 60°, τότε και το άθροισμά τους $\alpha+\beta+\gamma < 3 \cdot 60° = 180°$, που είναι άτοπο. Ανάλογα αποδεικνύεται και ο δεύτερος ισχυρισμός.

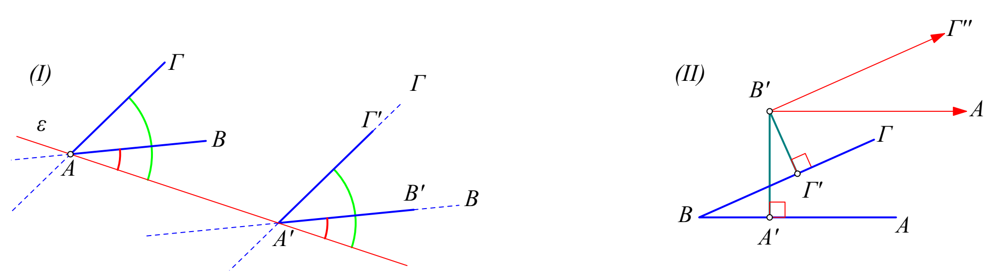
Άσκηση 1.15.5 *Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει μία τουλάχιστον γωνία μικρότερη ή ίση των 60 μοιρών.*

Δύο ημιευθείες AX και BY λέγονται **ομόρροπες**, όταν ή (α) ταυτίζονται ή (β) η μία από τις δύο περιέχει την άλλη ή (γ) είναι παράλληλες και η ευθεία AB, που ενώνει τα άκρα τους, τις αφήνει από την ίδια μεριά. Οι ημιευθείες λέγονται **αντίρροπες** όταν ή (α) περιέχονται στην ίδια ευθεία αλλά δεν είναι ομόρροπες ή (β) είναι παράλληλες και ευρίσκονται στις δύο μεριές της AB. Δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ λέγονται Ομόρροπα/Αντίρροπα, όταν οι ημιευθείες που τα περιέχουν, με αρχή τα A και Γ αντίστοιχα, είναι ομόρροπες/αντίρροπες αντίστοιχα. Από το Πόρισμα 1.15.5 προκύπτει αμέσως το επόμενο.

Σχήμα 1.15.7: Ομόρροπες και αντίρροπες ημιευθείες

Πόρισμα 1.15.10 *Δύο παράλληλες ομόρροπες ημιευθείες AX και BY σχηματίζουν με την AB ίσες εντός -εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Δύο παράλληλες και αντίρροπες ημιευθείες έχουν τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.*

Πόρισμα 1.15.11 *Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες ή παραπληρωματικές.*

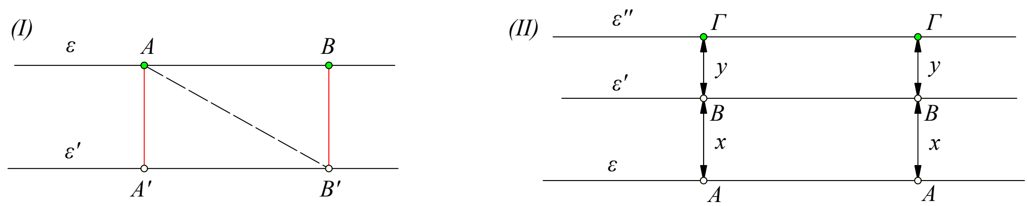


Σχήμα 1.15.8: Γωνίες με παράλληλες πλευρές Γωνίες με κάθετες πλευρές

Απόδειξη: Έστω ότι οι γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$ και $\widehat{B'A'\Gamma'}$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες (Σχήμα 1.15.8-I). Αν οι κορυφές τους A και A' ταυτίζονται, τότε θα ταυτίζονται και οι ευθείες που ορίζονται από τις πλευρές τους και το συμπέρασμα είναι προφανές. Αν οι κορυφές δεν ταυτίζονται, τότε φέρνουμε από το A' ημιευθείες ομόρροπες προς τις πλευρές της $\widehat{BA\Gamma}$ που, αφενός σχηματίζουν μία γωνία ίση με τη $\widehat{BA\Gamma}$ (Πόρισμα 1.15.10) και αφ' ετέρου, οι πλευρές τους είναι στις ίδιες ευθείες με αυτές της γωνίας $\widehat{B'A'\Gamma'}$, άρα θα σχηματίζουν γωνία ή ίση με αυτήν ή παραπληρωματική αυτής, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.12 *Δύο γωνίες, που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα κάθετες, είναι ίσες ή παραπληρωματικές.*

Απόδειξη: Έστω ότι οι γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{A'B'\Gamma'}$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες (Σχήμα 1.15.8-II), δηλαδή η ευθεία AB είναι κάθετη στην $A'B'$ και η $B\Gamma$ κάθετη στην $B'\Gamma'$. Από το B' φέρνουμε παράλληλες ομόρροπες ημιευθείες προς τις πλευρές της $\widehat{AB\Gamma}$. Τότε σχηματίζεται μία γωνία $\widehat{A''B''\Gamma''}$ ίση της $\widehat{AB\Gamma}$ (Πόρισμα 1.15.11) και με πλευρές κάθετες σε αυτές της $\widehat{AB\Gamma}$. Το συμπέρασμα συνάγεται από την Πρόταση 1.5.2, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.15.9: Απόσταση δύο παραλλήλων Σταθερότητα αποστάσεων μεταξύ παραλλήλων

Θεώρημα 1.15.2 *Δίδονται δύο παράλληλες ευθείες ε και ε'. Για κάθε σημείο A της ε η κάθετη AA' επί την ε' είναι και κάθετη στην ε και το μήκος της $|AA'|$ είναι ανεξάρτητο της θέσης του A επί της ε.*

Απόδειξη: Έστω B διαφορετικό του A σημείο της ε (Σχήμα 1.15.9-I). Κατά το Πόρισμα 1.15.5 οι ευθείες AA', BB', θα σχηματίζουν με τις ε, ε' τις ίδιες γωνίες, άρα θα είναι κάθετες και στην ε. Κατά το ίδιο πόρισμα επίσης τα δύο ορθογώνια τρίγωνα $AA'B'$ και $B'BA$ θα έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες $\widehat{A'AB'} = \widehat{AB'B}$ και $\widehat{A'B'A} = \widehat{B'AB}$ και κοινή υποτείνουσα AB'. Συνεπώς, κατά το ΓΠΓ-κριτήριο θα είναι ίσα και θα ισχύει $|AA| = |BB'|$, ο.ε.δ.

Απόσταση δύο παραλλήλων ε και ε' λέμε το μήκος ενός καθέτου ευθυγράμμου τμήματος από σημείο A της ε προς την ε'. Το τελευταίο θεώρημα δείχνει ότι η επιλογή της θέσης του A πάνω στην ε δεν παίζει κανένα ρόλο.

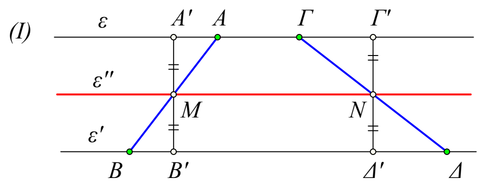
Πόρισμα 1.15.13 *Δοθεισών τριών παραλλήλων $\{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''\}$, κάθε κάθετος προς μία από αυτές είναι κάθετος και στις τρεις και τις τέμνει αντίστοιχα σε σημεία $\{A, B, \Gamma\}$, των οποίων οι αποστάσεις $x = |AB|$, $y = |B\Gamma|$ ισούνται με τις αντίστοιχες αποστάσεις των παραλλήλων και είναι ανεξάρτητες της θέσης της καθέτου (Σχήμα 1.15.9-II).*

Πόρισμα 1.15.14 *Δοθείσης ευθείας ε και απόστασης δ, από κάθε μεριά της ε υπάρχει μία ακριβώς παράλληλός της σε απόσταση δ.*

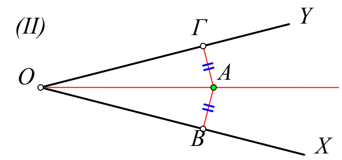
Απόδειξη: Από τυχόν σημείο A της ε ύψωσε κάθετο AB μήκους δ προς μία ορισμένη μεριά της ε. Φέρε κατόπιν την κάθετο ε' του AB στο B. Οι ε, ε' είναι παράλληλες και σε απόσταση δ. Αν υπήρχε και μια άλλη ε'' από την ίδια μεριά της ε με την ε' και σε απόσταση δ, τότε η ε'' θα έτεμνε την AB σε σημείο B', έτσι ώστε $|AB'| = \delta$, άρα το B' θα ταυτιζόταν με το B και, συνεπώς, και οι $\varepsilon', \varepsilon''$ θα ταυτίζονταν, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.15 *Αν τα σημεία A, B είναι αντίστοιχα επί των παραλλήλων ε, ε' και φέρουμε από το μέσον M του AB παράλληλο ε'' προς την ε, τότε η ε'' περιέχει το μέσον N κάθε ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ με άκρα επί των ε και ε' αντιστοίχως.*

Απόδειξη: Από το μέσον M του AB φέρε κάθετο στις παράλληλες, που τις τέμνει στα A', B' (Σχήμα 1.15.10-I). Τα ορθογώνια τρίγωνα $MA'A$, $MB'B$ είναι ίσα, διότι έχουν ίσες γωνίες και ίσες υποτείνουσες. Άρα το M είναι στην παράλληλο ε'' των ε, ε', που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα να ισαπέχει από τις ε και ε'. Αντίστροφα, εάν ευθύγραμμο τμήμα AB τέμνει αυτήν την παράλληλο στο σημείο



Σχήμα 1.15.10: Μεσοπαράλληλος ε'' των $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$



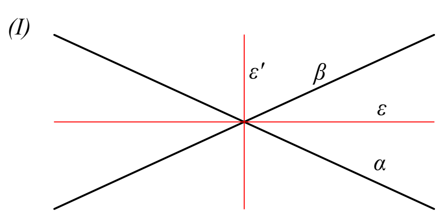
Ιδιότητα της διχοτόμου

M και $A'M$, $B'M$ είναι κάθετες στις ε, ε', τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $MA'A$, $MB'B$ είναι ίσα, διότι έχουν τις γωνίες στο M κατά κορυφήν και $|MA'| = |MB'|$. Άρα και οι υποτείνουσές τους θα είναι ίσες, $|MA| = |MB|$, ο.ε.δ.

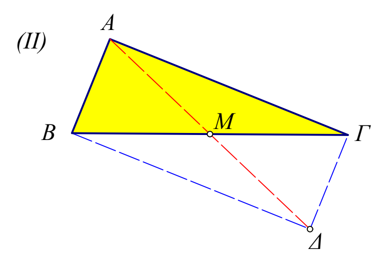
Την ευθεία ε'', που ορίζεται από το προηγούμενο πόρισμα, ονομάζουμε **μεσοπαράλληλο** των παραλλήλων ευθειών ε και ε'.

Πόρισμα 1.15.16 *Έστω σημείο A της διχοτόμου γωνίας $\widehat{XOY}$. Οι αποστάσεις AB και $A\Gamma$ του σημείου από τις πλευρές της γωνίας είναι ίσες. Αντίστροφα, αν σημείο A απέχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\widehat{XOY}$, τότε είναι επί της διχοτόμου της.*

Απόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα $OA\Gamma$ και OAB έχουν κοινή την OA και τις προσκείμενες γωνίες ίσες (Σχήμα 1.15.10-II), άρα (ΓΠΓ-κριτήριο) θα είναι ίσα και επομένως $|A\Gamma| = |AB|$. Αντίστροφα: αν ισχύει η προηγούμενη ισότητα, τότε τα τρίγωνα ABO και $A\Gamma O$ είναι ίσα. Αυτό φαίνεται τοποθετώντας τα έτσι ώστε να συμπέσουν οι ορθές γωνίες τους B και Γ και η ΓA με τη BA. Τότε και οι υποτείνουσες των ορθογωνίων που είναι ίσες με την OA θα πρέπει να συμπέσουν (Πόρισμα 1.10.7) και τα τρίγωνα θα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ο.ε.δ.



Σχήμα 1.15.11: Διχοτόμοι γωνιών δύο ευθειών



Ιδιότητα της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου

Πόρισμα 1.15.17 *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο διαφορετικές, τεμνόμενες σε σημείο O, ευθείες α και β, αποτελείται από δύο κάθετες ευθείες ε, ε' διερχόμενες από το σημείο τομής των α και β. Οι ευθείες αυτές συμπίπτουν με τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζονται στο O από τις α και β (Σχήμα 1.15.11-I).*

Πόρισμα 1.15.18 *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το ήμισυ αυτής και χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.*

Απόδειξη: Προέκτεινε τη διάμεσο AM μέχρι διπλασιασμού στο Δ : $|AM| = |M\Delta|$ (Σχήμα 1.15.11-II). Εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο, βλέπουμε εύκολα ότι τα τρίγωνα AMB και $\Gamma M\Delta$ είναι ίσα, αλλά και τα $AM\Gamma$ και $BM\Delta$ είναι επίσης ίσα. Τότε, εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο, βλέπουμε ότι και τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$ είναι ίσα και η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθή ($\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B} + \widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B} + \widehat{\Gamma BA} = 90°$). Συνάγεται ότι και τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες αντίστοιχες κάθετες πλευρές (ΠΓΠ-κριτήριο). Έπεται ότι και οι διάμεσοί τους προς το M θα είναι ίσες ($|AM| = |\Gamma M|$), που είναι ακριβώς το αποδεικτέο. Τα δύο ισοσκελή, που αναφέρονται στο πόρισμα, είναι τα AMB και $AM\Gamma$, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.15.6 *Δείξε το αντίστροφο του προηγουμένου πορίσματος. Εάν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.*

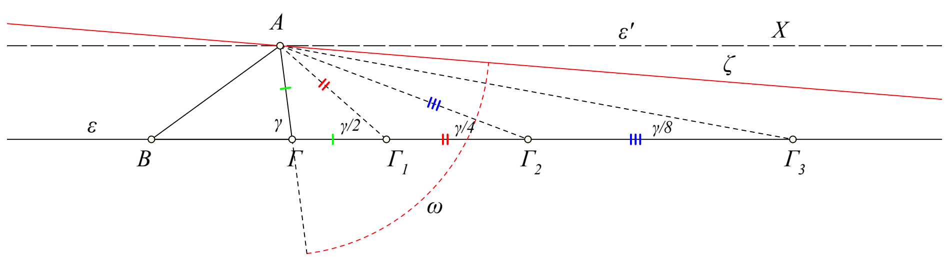
Άσκηση 1.15.7 *Δείξε ότι η διάμεσος ΑΜ από οξεία/αμβλεία γωνία α τριγώνου ΑΒΓ προς την απέναντι πλευρά ΒΓ έχει μήκος μεγαλύτερο/μικρότερο του $|B\Gamma|/2$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε το σχήμα 1.15.11-ΙΙ και το Θεώρημα 1.10.4.

Άσκηση 1.15.8 *Δείξε το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης. Δηλαδή, αν η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη/μικρότερη της $|B\Gamma|/2$, τότε η γωνία α είναι οξεία/αμβλεία.*

Άσκηση 1.15.9 *Έστω ότι οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Δ. Δείξε ότι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B\Delta\Gamma}$ ισούται με $\frac{\alpha}{2}+90$, όπου $\alpha = \widehat{BA\Gamma}$ (δες και Άσκηση 2.2.8).*

Θεώρημα 1.15.3 *Δεδομένων των υπολοίπων αξιωμάτων, το αξίωμα παραλληλίας ισοδυναμεί με το ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180°.*



Σχήμα 1.15.12: Αξίωμα των παραλλήλων: ισοδύναμο με $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$

Απόδειξη: Το ότι το αξίωμα παραλληλίας συνεπάγεται την $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ για τις γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$, το είδαμε στο Θεώρημα 1.15.1. Για το αντίστροφο, δείχνουμε ότι, αν το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, τότε υπάρχει μία και μόνο παράλληλος της ευθείας ε από σημείο A εκτός αυτής. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με τα B, Γ επί της ε και ας θεωρήσουμε την ευθεία $\varepsilon' = AX$ που σχηματίζει γωνία $|XA\Gamma| = \gamma$. Γνωρίζουμε ότι αυτή είναι παράλληλη της ε. Θα δούμε ότι δεν υπάρχει άλλη, αποδεικνύοντας ότι κάθε άλλη ευθεία $\zeta \neq \varepsilon'$, που σχηματίζει στο A γωνία $\omega < \gamma$, αναγκαστικά θα τέμνει την ε (σχήμα 1.15.12). Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία ζ που σχηματίζει γωνία $\omega < \gamma$ με την $A\Gamma$ και δεν τέμνει την ε. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, ως εξής. Κατασκευάζουμε διαδοχικά σημεία Γ_1, Γ_2, Γ_3, ... στην ε, έτσι ώστε $|\Gamma\Gamma_1| = |A\Gamma|$, κατόπιν $|\Gamma_2\Gamma_1| = |A\Gamma_1|$, κατόπιν $|\Gamma_3\Gamma_2| = |A\Gamma_2|$ κ.λπ. Βλέπουμε αμέσως, ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Gamma_1$, $A\Gamma_1\Gamma_2$, $A\Gamma_2\Gamma_3$,... είναι ισοσκελή και οι γωνίες της βάσης τους έχουν μέτρα αντίστοιχα $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\gamma}{4}$, $\frac{\gamma}{8}$ κ.λπ. Συνεπώς, μετά από ν βήματα, η γωνία στην βάση του ισοσκελούς $\widehat{A\Gamma_{\nu-1}\Gamma_\nu}$ θα είναι $\frac{1}{2^\nu}\gamma$ και συνεπώς κάποτε, για μεγάλο ν, η γωνία θα γίνει

$$\widehat{\Gamma A\Gamma_\nu} = \gamma - \frac{1}{2^\nu}\gamma > \omega.$$

Προς τούτο, αρκεί να πάρουμε αρκετά μεγάλο ν, έτσι ώστε

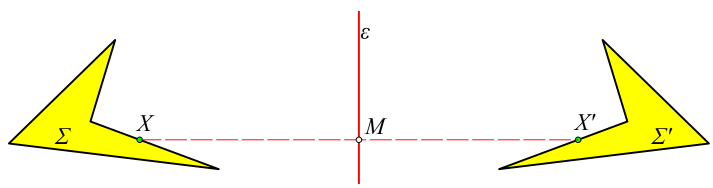
$$\gamma - \omega > \frac{1}{2^\nu}\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\gamma-\omega}{\gamma} > \frac{1}{2^\nu}.$$

Τότε όμως, η ευθεία ζ θα βρεθεί εντός της γωνίας στο A του τριγώνου $\Gamma A\Gamma_\nu$ και συνεπώς θα τμήσει την απέναντι πλευρά, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

1.16 Συμμετρίες

> Είναι αληθές αυτό που προτείνουν και το οποίο ονομάζουν διάταξη και συμμετρία, αναλογίες και ορθός λόγος. Όταν τα έχεις δει, δεν μπορείς πλέον να τα αρνηθείς.
>
> *J.L. Siesling, Ο ζωγράφος της Τουρ ντι Πεν*

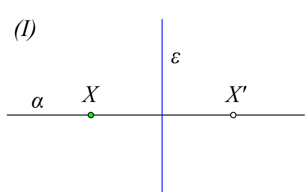
Υπάρχουν πολλά είδη συμμετρίας στα οποία, για λόγους αισθητικής και απλοποίησης των προβλημάτων, αρέσκονται οι Μαθηματικοί. Δύο από τα πιο απλά είναι αυτό της *αξονικής συμμετρίας* και της *σημειακής συμμετρίας*. Η πρώτη καθορίζεται πλήρως από μία ευθεία και η δεύτερη από ένα σημείο. Δοθείσης λοιπόν ευθείας ε, ονομάζουμε **συμμετρία ως προς την ευθεία** ε την αντιστοίχιση σε κάθε



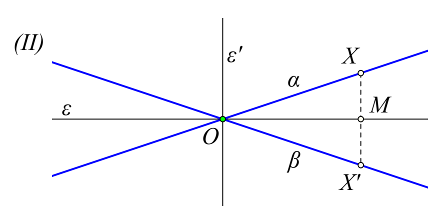
Σχήμα 1.16.1: Συμμετρία ως προς άξονα

σημείο X, εκτός της ε, ενός σημείου X', έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα XX' να είναι κάθετο στην ε και να έχει το μέσον του M επί της ε. Με άλλα λόγια το XX' έχει την ε ως μεσοκάθετο. Το X' λέγεται **συμμετρικό του** X **ως προς** ε. Όταν το σημείο X είναι επί της ε, τότε θεωρούμε ότι το X' ταυτίζεται με το X και αντίστροφα όταν τα X και X' ταυτίζονται, τότε το X είναι επί της ευθείας ε. Η συμμετρία ως προς ε είναι η μαθηματική περιγραφή του διπλώματος του επιπέδου, σαν να ήταν από χαρτί, κατά μήκος της ε. Τα σημεία που ταυτίζονται κατά το δίπλωμα είναι ακριβώς συμμετρικά ως προς ε. Τα σημεία της ε, κατά το δίπλωμα μένουν ως έχουν (είναι μόνα τους, δεν έχουν ταίρι). Συχνά η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** και η συμμετρία αυτή χαρακτηρίζεται ως **αξονική συμμετρία**. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το συμμετρικό του συμμετρικού είναι το αρχικό σημείο. Τα σημεία του άξονα είναι τα **σταθερά σημεία** της αξονικής συμμετρίας.

Λέμε ότι δύο σχήματα Σ και Σ' είναι **συμμετρικά ως προς άξονα**, όταν υπάρχει αξονική συμμετρία έτσι ώστε κάθε σημείο X του Σ να έχει το συμμετρικό του στο Σ' και κάθε σημείο X'του Σ' να έχει το συμμετρικό του στο Σ (σχήμα-1.16.1). Ένα σχήμα Σ λέγεται **συμμετρικό ως προς άξονα** όταν το Σ είναι συμμετρικό με τον εαυτό του ως προς άξονα. Αυτό σημαίνει, ότι για κάθε X του Σ, το συμμετρικό X' του X περιέχεται πάλι στο Σ.



Σχήμα 1.16.2: α συμμετρική ως προς ε



$\{\alpha, \beta\}$ συμμετρικές ως προς ε

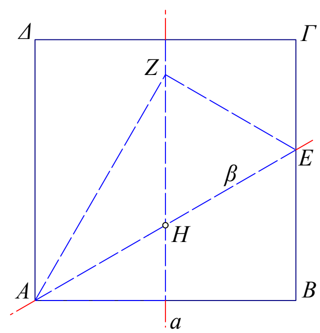
Πρόταση 1.16.1 *Κάθε ευθεία ε, κάθετη στην ευθεία α, είναι άξονας συμμετρίας της α.*

Απόδειξη: Εξ ορισμού, το XX' θα είναι κάθετο στην ε (Σχήμα 1.16.2-I), άρα η ευθεία XX' θα συμπίπτει με την α, ο.ε.δ.

Πρόταση 1.16.2 *Το σχήμα, που αποτελείται από δύο τεμνόμενες ευθείες $\{\alpha, \beta\}$, είναι συμμετρικό ως προς τις διχοτόμους ε και ε' των γωνιών που σχηματίζουν.*

Απόδειξη: Αν X τυχόν σημείο της α και X' το συμμετρικό του X ως προς τη διχοτόμο ε (Σχήμα 1.16.2-II), τότε το τρίγωνο $XX'O$, όπου O το σημείο τομής των α και β, είναι ισοσκελές. Αυτό φαίνεται από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων OMX και OMX', που έχουν την OM κοινή και τη $|MX| = |MX'|$ από τον ορισμό της συμμετρίας. Συνεπώς, η OM θα διχοτομεί τη γωνία στην κορυφή O. Επειδή εξ υποθέσεως η ε είναι και διχοτόμος της γωνίας των α και β, η ευθεία OX' και η β θα συμπίπτουν, άρα το X' θα περιέχεται στην β, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η αξονική συμμετρία βρίσκεται στην ρίζα της τέχνης του διπλώματος φύλλου χαρτιού με κατάλληλο τρόπο, ώστε, μετά από ορισμένα διπλώματα να σχηματίζονται ενδιαφέροντα σχήματα. Η τέχνη αυτή που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα στην Ιαπωνία λέγεται Origami ([O'R11], [Alp00], [Lan96]). Η επόμενη άσκηση [Row17, *σ.* 11] δείχνει, πώς με το κατάλληλο δίπλωμα ενός τετράγωνου φύλλου χαρτιού μπορούμε να φτιάξουμε τη γωνία 30 και 60 μοιρών.



Σχήμα 1.16.3: Origami κατασκευή γωνίας 30 μοιρών

Άσκηση 1.16.1 *Δίπλωσε ένα τετράγωνο φύλλο χαρτιού ΑΒΓΔ στο μέσον. Κατόπιν ξεδίπλωσέ το ώστε να φαίνεται το ίχνος της ευθείας α κατά μήκος της οποίας διπλώθηκε το χαρτί. Κατόπιν ξαναδίπλωσε από τη γωνία Β, έως ότου το Β πέσει σε σημείο Ζ της α ενώ το Α παραμένει στην θέση του. Κατόπιν ξεδίπλωσε ώστε να φανεί το ίχνος της β, κατά μήκος της οποίας έγινε το δεύτερο δίπλωμα. Δείξε ότι η γωνία των α και β είναι 60 μοιρών.*

Υπόδειξη: Κατά το δεύτερο δίπλωμα, η AB παίρνει τη θέση της AZ, άρα $|AZ| = |AB|$. Όμως η α είναι μεσοκάθετος της AB, άρα $|ZA| = |ZB|$ (η ZB δεν σχεδιάσθηκε στο σχήμα-1.16.3). Συνεπώς, το τρίγωνο ABZ είναι ισόπλευρο. Όμως η α είναι κάθετη στην AB και η β κάθετη στην πλευρά BZ του ισοπλεύρου, άρα και η γωνία των α και β είναι 60 μοιρών.

Δοθέντος σημείου O, ονομάζουμε **συμμετρία ως προς το σημείο** O, την αντιστοίχιση σε κάθε

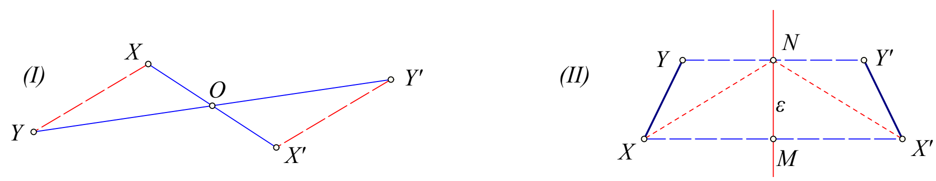
Σχήμα 1.16.4: Συμμετρία ως προς σημείο O Σχήματα συμμετρικά ως προς O

σημείο X, διαφορετικού του O, ενός σημείου X', έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα XX' να έχει μέσον το O (Σχήμα 1.16.4-I). Το X' λέγεται **συμμετρικό του** X **ως προς** O. Ως συμμετρικό του O θεωρούμε τον εαυτό του. Αντίστροφα, αν το X ταυτίζεται με το συμμετρικό του ως προς O, τότε το X ταυτίζεται με το O. Το O λέγεται **κέντρο της συμμετρίας** και η συμμετρία αυτή χαρακτηρίζεται ως **σημειακή**

συμμετρία. Από τον ορισμό προκύπτει, ότι το συμμετρικό του συμμετρικού είναι το αρχικό σημείο. Το O είναι το μοναδικό **σταθερό σημείο** της σημειακής συμμετρίας. Λέμε ότι δύο σχήματα Σ και Σ' είναι **συμμετρικά ως προς σημείο**, όταν υπάρχει σημειακή συμμετρία έτσι ώστε, κάθε σημείο X του Σ να έχει το συμμετρικό του στο Σ' και κάθε σημείο X' του Σ' να έχει το συμμετρικό του στο Σ (Σχήμα 1.16.4-II). Ένα σχήμα Σ λέγεται **συμμετρικό ως προς σημείο** όταν το Σ είναι συμμετρικό με τον εαυτό του ως προς σημείο. Αυτό σημαίνει, ότι για κάθε X του Σ, το συμμετρικό X' του X περιέχεται πάλι στο Σ.

Άσκηση 1.16.2 *Δείξε ότι μία ευθεία είναι συμμετρική, ως προς κάθε σημείο της O.*

Η σημαντικότερη ιδιότητα αυτών των δύο συμμετριών που ορίσαμε είναι η ισότητα αντιστοίχων αποστάσεων και γωνιών.



Σχήμα 1.16.5: Συμμετρία, ως προς σημείο (I) ή/και ως προς άξονα (II), διατηρεί αποστάσεις

Θεώρημα 1.16.1 *Εάν τα σχήματα Σ και Σ' είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς σημείο, τότε οι αποστάσεις δύο σημείων $|XY|$ και των αντιστοίχων συμμετρικών τους $|X'Y'|$ είναι ίσες.*

Απόδειξη: Η περίπτωση της συμμετρίας ως προς σημείο είναι απλή. Αν τα (X, X') και (Y, Y') είναι συμμετρικά ως προς σημείο O (Σχήμα 1.16.5-I), τότε εξ ορισμού οι αποστάσεις

$$|XO| = |OX'|, \quad \text{και} \quad |YO| = |OY'|.$$

Τότε τα τρίγωνα XOY και $X'OY'$ είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο), άρα και $|XY| = |X'Y'|$.

Αν τα (X, X') και (Y, Y') είναι συμμετρικά ως προς άξονα, τότε τα μέσα M και N των XX' και YY' αντίστοιχα ευρίσκονται επί του άξονος ε και το N είναι επί της μεσοκαθέτου του XX' (Σχήμα 1.16.5-II), άρα το τρίγωνο $XX'N$ είναι ισοσκελές. Συνεπώς, $|NX| = |NX'|$ και οι γωνίες $\widehat{YNX} = \widehat{Y'NX'}$. Τότε όμως τα τρίγωνα XNY και $X'NY'$ είναι ίσα, ως έχοντα $|XN| = |NX'|, |YN| = |NY'|$ και περιεχόμενη γωνία $\widehat{YNX} = \widehat{Y'NX'}$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.16.1 *Εάν τα σχήματα Σ και Σ' είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς σημείο, τότε τα τρίγωνα που σχηματίζουν τρία μη-συνευθειακά σημεία X, Y και Z του Σ και τα αντίστοιχά τους X', Y' και Z' του Σ' είναι ίσα.*

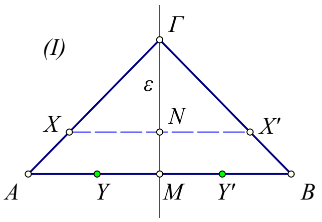
Απόδειξη: Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση, αφού τότε $|XY| = |X'Y'|$, $|YZ| = |Y'Z'|$, $|ZX| = |Z'X'|$ και το συμπέρασμα προκύπτει εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο ισότητας τριγώνων, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.16.2 *Εάν τα σχήματα Σ και Σ' είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς σημείο, τότε οι γωνίες $\widehat{XYZ}$ και $\widehat{X'Y'Z'}$ που σχηματίζουν τρία σημεία X, Y και Z του Σ και τα αντίστοιχά τους X', Y' και Z' του Σ' είναι ίσες.*

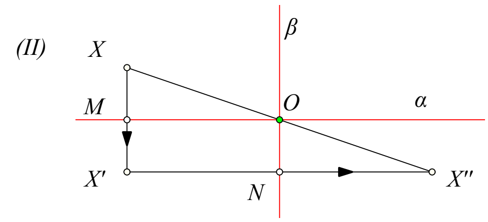
Απόδειξη: Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση, λόγω της ισότητας των αντιστοίχων γωνιών των ίσων τριγώνων XYZ και $X'Y'Z'$, ο.ε.δ.

Το κλασικό παράδειγμα συμμετρικού σχήματος ως προς άξονα είναι το ισοσκελές τρίγωνο. Ο άξονας συμμετρίας του είναι η διάμεσος προς τη βάση του που είναι και διχοτόμος της γωνίας στην κορυφή του και ταυτόχρονα ύψος προς τη βάση (Πόρισμα 1.8.2).

Πρόταση 1.16.3 *Η ευθεία ε, που ενώνει την κορυφή του ισοσκελούς με το μέσον της βάσης του, είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.*



Σχήμα 1.16.6: Άξονας ισοσκελούς



Σημειακή συμμετρία από δύο κάθετες αξονικές

Απόδειξη: Η συμμετρία των σημείων Y, Y' της βάσης (Σχήμα 1.16.6-I) είναι προφανής. Από την άλλη μεριά κάθε παράλληλος προς τη βάση τέμνει τα σκέλη σε σημεία X, X' συμμετρικά ως προς τη διάμεσο ΓM, αφού και το $X\Gamma X'$ είναι ισοσκελές ($\widehat{\Gamma XX'} = \widehat{\Gamma X'X}$ λόγω της παραλληλίας των πλευρών τους προς τις $\widehat{\Gamma AM}$ και $\widehat{\Gamma BM}$ αντίστοιχα) και η διάμεσός του συμπίπτει με τη ΓM και είναι κάθετος στην XX' (Πόρισμα 1.8.2), ο.ε.δ.

Θεώρημα 1.16.2 *Εάν ένα σχήμα είναι συμμετρικό ως προς δύο άξονες α και β που είναι κάθετοι, τότε είναι συμμετρικό ως προς κέντρο O, όπου O το σημείο τομής των δύο αξόνων.*

Απόδειξη: Πράγματι, έστω σημείο X και X' το συμμετρικό του ως προς άξονα α και X'' το συμμετρικό του X' ως προς τον άξονα β (Σχήμα 1.16.6-II). Εξ ορισμού τα $XX'O$ και $X'OX''$ είναι ισοσκελή τρίγωνα, άρα $|OX| = |OX''|$. Επίσης οι γωνίες $\widehat{XOM}$ και $\widehat{MOX'}$ είναι ίσες και οι $\widehat{X'ON}$ και $\widehat{NOX''}$ επίσης είναι ίσες. Συνεπώς, η $\widehat{XOX''}$ θα είναι διπλάσια της $\widehat{MON}$, που είναι άθροισμα των $\widehat{MOX'}$ και $\widehat{X'ON}$. Όμως η $\widehat{MON}$ είναι εξ υποθέσεως ορθή, άρα η διπλάσιά της θα είναι πεπλατυσμένη, δηλαδή τα X, O και X'' θα είναι στην ίδια ευθεία, ο.ε.δ.

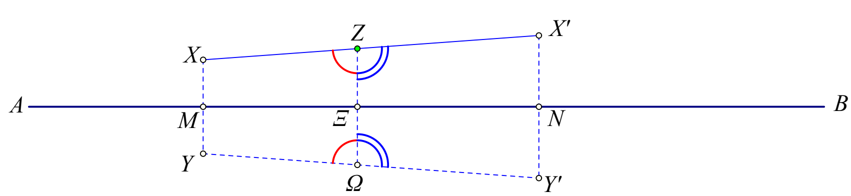
Άσκηση 1.16.3 *Δείξε ότι, αν τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τότε είναι ισοσκελές.*

Υπόδειξη: Αν ε ο άξονας συμμετρίας, τότε μία τουλάχιστον κορυφή του τριγώνου, έστω η B, δεν θα περιέχεται σε αυτόν. Το συμμετρικό του B ως προς ε θα είναι πάλι κορυφή του τριγώνου, έστω Γ. Τότε η γωνία στο B θα αντιστοιχεί στην γωνία στο Γ και οι δύο γωνίες θα είναι ίσες, άρα το τρίγωνο ισοσκελές.

Άσκηση 1.16.4 *Δείξε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε και μόνον, όταν έχει άξονα συμμετρίας.*

Υπόδειξη: Συνδύασε την προηγούμενη άσκηση με την Πρόταση 1.16.3.

Άσκηση 1.16.5 *Δείξε ότι, αν τα σημεία Y, Y' είναι συμμετρικά των X, X' (ως προς άξονα ή σημείο), τότε το συμμετρικό κάθε σημείου Z της ευθείας XX' είναι σημείο Ω επί της ευθείας YY'.*



Σχήμα 1.16.7: Συμμετρική ευθείας ως προς άξονα

Υπόδειξη: Για την αξονική συμμετρία. Έστω ότι τα Y, Y' είναι συμμετρικά των X, X' ως προς άξονα AB. Έστω και Ω το συμμετρικό τυχόντος σημείου Z της XX' ως προς την AB. Οι γωνίες $\widehat{XZ\Xi}$ και $\widehat{\Xi\Omega Y}$ είναι ίσες (Πόρισμα 1.16.2). Ομοίως οι γωνίες $\widehat{\Xi ZX'}$ και $\widehat{\Xi\Omega Y'}$ είναι ίσες. Όμως οι $\widehat{XZ\Xi}$ και $\widehat{\Xi ZX'}$ είναι παραπληρωματικές, άρα και οι $\widehat{Y\Omega\Xi}$ και $\widehat{\Xi\Omega Y'}$ θα είναι παραπληρωματικές και τα τρία σημεία, Y, Ω και Y' θα είναι επ' ευθείας. Ανάλογα αποδεικνύεται και η ιδιότητα για σημειακή συμμετρία.

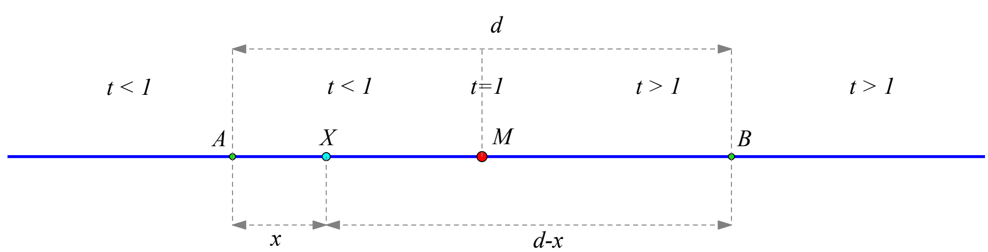
Άσκηση 1.16.6 *Δείξε ότι το σχήμα που αποτελείται από δύο ευθείες $\{\alpha, \beta\}$ έχει πάντοτε κέντρο συμμετρίας καθώς και άξονες συμμετρίας. Πότε υπάρχει ένα ακριβώς (ή άπειρα) κέντρο συμμετρίας; Πότε οι δύο ευθείες έχουν περισσότερους από δύο άξονες συμμετρίας; Πότε έχουν άπειρους άξονες συμμετρίας;*

Σχόλιο-2 Η έννοια της συμμετρίας θεμελιώνεται γενικότερα μέσω της έννοιας του *Μετασχηματισμού* και ειδικότερα της *Ισομετρίας* (§ 7.1, § 12.1).

1.17 Λόγοι, αρμονικές τετράδες

> Τα πιο σημαντικά πεδία της καθαρής επιστήμης είναι εκείνα στα οποία δεν γίνεται πια λόγος για πρακτικές εφαρμογές, στα οποία η καθαρή διάνοια ιχνηλατεί πρωτίστως τις απόκρυφες αρμονίες του κόσμου.
>
> *Werner Heisenberg, Επιστολή 1942*

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε, το πώς ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου X ευθείας ε από δύο άλλα σταθερά σημεία A και B της ευθείας, καθορίζει τη θέση του X. Για δύο σταθερά σημεία A και B της ευθείας ε και προκαθορισμένο λόγο t, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία X, X' αυτής της ευθείας, που έχουν το λόγο t ως προς τα A, B. Έτσι φτάνουμε στον ορισμό της *Αρμονικής τετράδας* (A, B, X, X') τεσσάρων σημείων πάνω σε μία ευθεία. Μια έννοια θεμελιώδους σημασίας στην Γεωμετρία. Ας συμβολίσουμε με x το μήκος $x = |AX|$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι ο λόγος $t = \frac{|XA|}{|XB|}$



Σχήμα 1.17.1: Λόγος $t = \frac{|XA|}{|XB|}$

είναι μικρότερος του 1, όταν το X είναι επί της ημιευθείας με άκρο το μέσον M του AB, που περιέχει το A και μεγαλύτερος του 1 επί της αντικείμενης της ημιευθείας, που είναι η περιέχουσα το B. Αν $d = |AB|$ το μήκος του AB, τότε έχουμε για τα σημεία X εντός του AB:

$$t = \frac{x}{d-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{dt}{1+t} \ \ \text{για} \ \ t > 0. \tag{1}$$

Για τα σημεία εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB και από τη μεριά του A:

$$t = \frac{x}{d+x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{dt}{1-t} \ \ \text{για} \ \ t < 1. \tag{2}$$

Παρόμοια για τα σημεία εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB και από τη μεριά του B:

$$t = \frac{x}{x-d} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{dt}{t-1} \ \ \text{για} \ \ t > 1. \tag{3}$$

Βλέπουμε ότι εκτός της τιμής του λόγου $t = 1$, που αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς σημείο, το μέσον M του AB, για όλες τις άλλες τιμές του $t > 0$, υπάρχουν δύο σημεία X, X' που έχουν λόγο $\frac{|XA|}{|XB|} = t$. Το ένα (X) είναι εντός και το βρίσκουμε από την εξίσωση (1) και το άλλο (X') είναι εκτός του AB και το βρίσκουμε από την εξίσωση (2) ή (3), ανάλογα με το αν το $t < 1$ ή $t > 1$.

Για παράδειγμα $t = 2$, δηλαδή $\frac{|XA|}{|XB|}$=2, συνεπάγεται ότι το X είναι στην ημιευθεία του M από τη μεριά του B. Το εντός του AB σημείο X το βρίσκουμε από την εξίσωση (1): $x = \frac{2d}{3}$ και το εκτός του AB σημείο X' το βρίσκουμε από την εξίσωση (3): $x = \frac{2d}{1} = 2d$. Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.17.1 *Για κάθε θετικό αριθμό $t \neq 1$ υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία X, X' της ευθείας AB, έτσι ώστε $\frac{|XA|}{|XB|} = t$. Το ένα περιέχεται στο AB και το άλλο είναι εκτός αυτού. Για $t = 1$ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο, που είναι το μέσον του AB.*

Αν περιοριστούμε στα σημεία εντός του AB, τότε έχουμε προφανώς το Πόρισμα:

Πόρισμα 1.17.1 *Για κάθε θετικό αριθμό t υπάρχει ένα ακριβώς σημείο X επί της ευθείας AB και μεταξύ των A, B έτσι ώστε $\frac{|XA|}{|XB|}=t$.*

Αν δε περιοριστούμε στο εξωτερικό του AB, τότε έχουμε ανάλογα το Πόρισμα:

Πόρισμα 1.17.2 *Για κάθε θετικό αριθμό $t \neq 1$ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο X επί της ευθείας AB και εκτός του AB έτσι ώστε $\frac{|XA|}{|XB|}=t$.*

Μια άμεση συνέπεια των δύο πορισμάτων με πολλές εφαρμογές είναι και το επόμενο πόρισμα, που δείχνει ότι ο λόγος $\frac{|XA|}{|XB|}$, μαζί με την πληροφορία του αν το X είναι εντός του AB ή εκτός, καθορίζει τη θέση του X μονοσήμαντα.

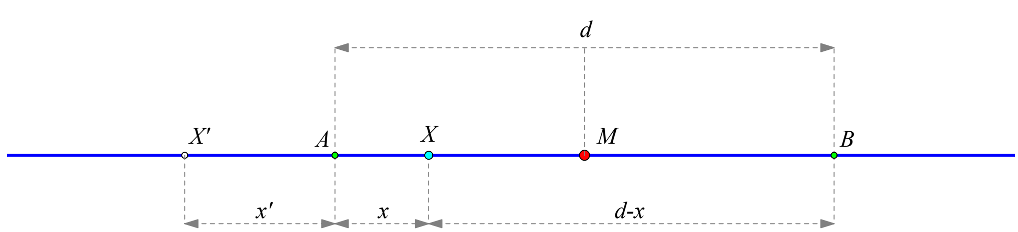
Πόρισμα 1.17.3 *Αν δύο σημεία X και Y της ευθείας AB σχηματίζουν τον ίδιο λόγο $\frac{|XA|}{|XB|}=\frac{|YA|}{|YB|}$ και είναι και τα δύο εντός του AB ή και τα δύο εκτός του AB, τότε συμπίπτουν.*

Δοθέντων δύο σημείων A, B, ονομάζουμε **αρμονικά συζυγή ως προς** A, B , δύο διαφορετικά σημεία X και X', που ορίζουν τον ίδιο λόγο $t = \frac{|XA|}{|XB|} \neq 1$. Όπως είδαμε το ένα εξ αυτών περιέχεται στο ευθύγραμμο τμήμα AB και το άλλο είναι εκτός αυτού. Τέσσερα σημεία της ίδιας ευθείας: A, B, X, X', από τα οποία, τα δύο τελευταία είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα δύο πρώτα, λέμε ότι ορίζουν μιαν **αρμονική τετράδα** σημείων, την οποία συμβολίζουμε με (A, B, X, X').

Πρόταση 1.17.1 *Δείξε ότι τα σημεία X, X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A, B, που είναι σε απόσταση $|AB| = d$, τότε και μόνον, όταν οι αποστάσεις τους $x = |XA|$ και $x' = |X'A|$ από το A ικανοποιούν μία από τις σχέσεις*

$$2x \cdot x' = d \cdot (x' - x), \qquad 2x \cdot x' = d \cdot (x' + x).$$

Η πρώτη αντιστοιχεί στο λόγο $t = \frac{|XA|}{|XB|} < 1$ και η άλλη στο λόγο $t > 1$.



Σχήμα 1.17.2: Τα X, X' αρμονικά συζυγή των A, B

Υπόδειξη: Στην πρώτη περίπτωση η ισότητα των λόγων $\frac{|XA|}{|XB|}=\frac{|X'A|}{|X'B|}$, δίνει σύμφωνα με τις εξισώσεις (1) και (2): $\frac{x}{d-x} = \frac{x'}{d+x'}$. Στην δεύτερη περίπτωση πάλι οι εξισώσεις (1) και (3) της παραγράφου δίνουν $\frac{x}{d-x} = \frac{x'}{x'-d}$. Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες αντίστοιχα προς τις αναφερόμενες.

Πόρισμα 1.17.4 *Εάν t είναι θετικός $t \neq 1$, τότε τα δύο σημεία X, X' της ευθείας AB που έχουν λόγο $\frac{|XA|}{|XB|} = t$ έχουν απόσταση μεταξύ τους*

$$|XX'| = \begin{cases} \frac{2dt}{1-t^2} & \text{για } t < 1, \\ \\ \frac{2dt}{t^2-1} & \text{για } t > 1, \end{cases}$$

όπου $d = |AB|$.

Απόδειξη: Για $t < 1$ και τα δύο σημεία είναι στην ημιευθεία του M (μέσον του AB) που περιέχει το A και έχουμε $|XX'| = x+x'$, όπου $x = |AX| = \frac{dt}{1+t}$ και $x' = |AX'| = \frac{dt}{1-t}$. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ο πρώτος τύπος. Για $t > 1$ και τα δύο σημεία είναι στην ημιευθεία του M που περιέχει το B και έχουμε $|XX'| = x' - x$, όπου $x = |AX| = \frac{dt}{1+t}$ και $x' = |AX'| = \frac{dt}{t-1}$. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ο δεύτερος τύπος, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.17.5 *Τα σημεία X εσωτερικό του AB και X' εξωτερικό του AB είναι αρμονικά συζυγή των A και B τότε και μόνον, όταν*

$$|X'A||X'B| - |XA||XB| = |XX'|^2.$$

Απόδειξη: Απλές πράξεις βάσει των προηγουμένων τύπων, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.17.1 *Δείξε ότι τα αρμονικά συζυγή X και X' των A και B είναι πάντοτε στην ίδια ημιευθεία από τις δύο που ορίζονται από το μέσον M του ευθυγράμμου τμήματος AB.*

Υπόδειξη: Όπως φαίνεται και από το σχήμα-1.17.2, τα αρμονικά συζυγή είναι στην μία ή την άλλη ημιευθεία του M ανάλογα με την τιμή του λόγου $t = \frac{|XA|}{|XB|}$. Αν $t < 1$, τότε είναι και τα δύο από τη μεριά του A. Αν $t > 1$, τότε είναι και τα δύο από τη μεριά του B.

Πρόταση 1.17.2 *Τα σημεία X και X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A και B τότε και μόνον, όταν*

$$|MX||MX'| = \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2,$$

όπου M το μέσον του AB.

Απόδειξη: Έστω ότι τα X, X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς A και B. Χρησιμοποιούμε τους τύπους της Πρότασης 1.17.1, τους οποίους λύνουμε ως προς x', υποθέτοντας το X εντός του AB:

$$x' = \begin{cases} \frac{dx}{d-2x} & \text{για } t < 1, \\ \frac{dx}{2x-d} & \text{για } t > 1. \end{cases}$$

Επίσης

$$|MX||MX'| = \begin{cases} \left(\frac{d}{2} - x\right)\left(\frac{d}{2} + x'\right) & \text{για } t < 1, \\ \left(x - \frac{d}{2}\right)\left(x' - \frac{d}{2}\right) & \text{για } t > 1. \end{cases}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, αντικαθιστώντας το x' από τις προηγούμενες εξισώσεις και απλοποιώντας καταλήγουμε στην $|MX||MX'| = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, που είναι η ζητούμενη. Αντίστροφα, η υποτιθέμενη τώρα σχέση μεταφράζεται στην $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = |MX||MX'|$, όπου πάλι το $|MX||MX'|$ δίδεται από τους προηγούμενους τύπους και οδηγεί στις

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{d}{2} - x\right)\left(\frac{d}{2} + x'\right) & \text{για } t < 1, \\ \left(x - \frac{d}{2}\right)\left(x' - \frac{d}{2}\right) & \text{για } t > 1. \end{cases}$$

Απλοποιώντας αυτές καταλήγουμε στις εξισώσεις της Πρότασης 1.17.1, που χαρακτηρίζουν τα αρμονικά συζυγή σημεία, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.17.2 *Δείξε ότι, αν τα σημεία X, X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A, B, τότε και τα A, B είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα X και X'.*

Υπόδειξη: Όταν τα X, X' είναι από τη μεριά του A (ως προς το μέσον M), τότε οι λόγοι $\frac{|AX|}{|AX'|} = \frac{x}{x'}$ και $\frac{|BX|}{|BX'|} = \frac{d-x}{d+x'}$ είναι ίσοι σύμφωνα με την Πρόταση 1.17.1 (σχήμα 1.17.2). Όταν τα X, X' είναι από τη μεριά του B, τότε $\frac{|AX|}{|AX'|} = \frac{x}{x'}$ και $\frac{|BX|}{|BX'|} = \frac{d-x}{x'-d}$ και η ισότητα των λόγων προκύπτει από τη δεύτερη περίπτωση της Άσκησης 1.17.1.

Άσκηση 1.17.3 *Με τους προηγούμενους συμβολισμούς δείξε ότι το μέσον N του διαστήματος XX' ευρίσκεται σε απόσταση $|AN| = d\frac{t^2}{1-t^2}$ για $t < 1$ και $|BN| = d\frac{t^2}{t^2-1}$ για $t > 1$.*

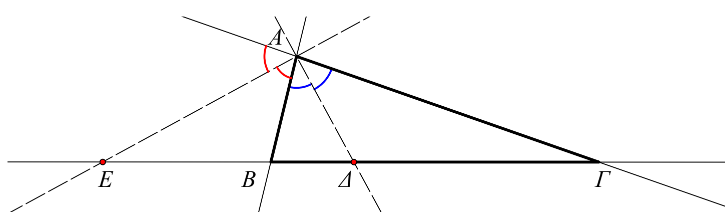
Υπόδειξη: Δες πρώτα ότι λ.χ. για $t < 1$ ισχύει $x' > x$, αφού $\frac{x}{x'} = \frac{1-t}{1+t} < 1$. Συνεπώς, αν $c = |AN|$ τότε το ότι το N είναι το μέσον του XX' σημαίνει ότι $x' - c = c + x \Rightarrow c = \frac{x'-x}{2}$. Αντικατάστησε σε αυτόν τον τύπο τα x, x' από τους τύπους (1) και (2) αντίστοιχα. Ανάλογα αντιμετωπίζεται και η άλλη περίπτωση, για $t > 1$.

Άσκηση 1.17.4 *Για τα σημεία $\{A, B, X, X', M\}$ του σχήματος 1.17.2, όπου (A, B, X, X') είναι αρμονική τετράδα και το M είναι το μέσον του τμήματος AB, δείξε ότι ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\frac{2}{|AB|} = \frac{1}{|XB|} + \frac{1}{|X'B|} \qquad \textit{και} \qquad |X'A| \cdot |X'B| = |AB| \cdot |XM|.$$

Να μελετηθεί το πως μεταβάλλονται αυτές οι σχέσεις για διατάξεις των σημείων διαφορετικές αυτής του σχήματος 1.17.2.

Άσκηση 1.17.5 *Δίδονται τα σημεία $\{A, B, X, X'\}$ της ευθείας ε, για τα οποία γνωρίζουμε τους λόγους $\{\kappa = \frac{|XA|}{|XB|}, \lambda = \frac{|X'A|}{|X'B|}\}$. Να βρεθεί η απόσταση $|YY'|$ των αρμονικών συζυγών $\{Y, Y'\}$ των $\{X, X'\}$ ως προς $\{A, B\}$. Να γίνει διάκριση των σχετικών θέσεων των $\{X, X'\}$ ως προς τα $\{A, B\}$.*



Σχήμα 1.17.3: $\varDelta$ και E αρμονικά συζυγή ως προς B και $\varGamma$

Σχόλιο Τα πιο διάσημα αρμονικά συζυγή σημεία είναι τα ίχνη $\varDelta$ και E στην $B\varGamma$ των δύο διχοτόμων (δηλαδή οι τομές των δύο διχοτόμων με τη $B\varGamma$), εσωτερικής και εξωτερικής, από την κορυφή A ενός τριγώνου $AB\varGamma$ που *δεν* έχει τις προσκείμενες πλευρές (AB και $A\varGamma$) ίσες. Γι' αυτά θα μιλήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο (Θεώρημα 3.3.2) και (Άσκηση 3.3.6).

Άσκηση 1.17.6 *Το σημείο $\varGamma$ ευρίσκεται στην ευθεία AB από τη μεριά του B και ισχύει $|\varGamma A| = \nu \cdot |AB|$. Να βρεθεί ο λόγος $t = \frac{|\varGamma A|}{|\varGamma B|}$. Το ίδιο ερώτημα όταν το $\varGamma$ είναι από τη μεριά του A.*

Υπόδειξη: Στην πρώτη περίπτωση $|\varGamma B| = |\varGamma A| - |AB|$, άρα $t = \frac{|\varGamma A|}{|\varGamma B|} = \frac{|\varGamma A|}{|\varGamma A| - |AB|} = \frac{\nu|AB|}{\nu|AB| - |AB|} = \frac{\nu}{\nu - 1}$. Στην δεύτερη περίπτωση $|\varGamma B| = |\varGamma A| + |AB|$ κ.λπ.

Άσκηση 1.17.7 *Το ευθύγραμμο τμήμα AB χωρίζεται με το σημείο A_1 σε τμήματα με λόγο p/q, όπου $\{p < q\}$ θετικοί ακέραιοι. Χωρίζεται επίσης με το B_1 σε τμήματα με λόγο q/p. Βρες το μήκος του τμήματος A_1B_1. Επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη κατασκευή στο A_1B_1 βρίσκουμε το τμήμα A_2B_2. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία σ' αυτό βρίσκουμε το A_3B_3 και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μετά από n βήματα το τμήμα A_nB_n. Ποιό είναι το μήκος αυτού του διαστήματος;*

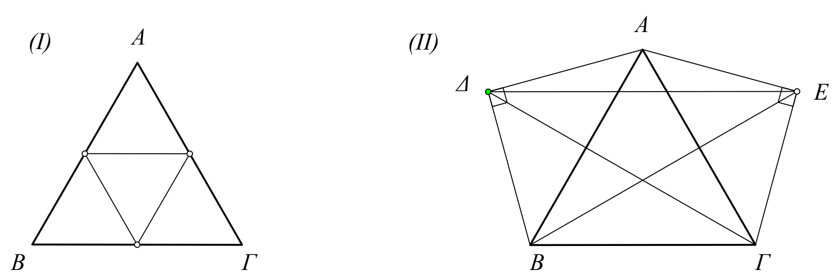
1.18 Σχόλια και ασκήσεις κεφαλαίου

Ακόμη και αν όλα είναι γνωστά, η φροντίδα του ανθρώπου δεν είναι ακόμη πλήρης. Διότι το φαγητό και μόνο δεν θα τον κρατήσει υγιή. Πρέπει να κάνει ασκήσεις. Διότι η τροφή και οι ασκήσεις, ενώ έχουν αντίθετες ποιότητες, συνεργάζονται για την παραγωγή της υγείας.

Ιπποκράτης

Άσκηση 1.18.1 *Προσδιόρισε τις γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου. Είναι ποτέ δυνατόν σε ένα τέτοιο τρίγωνο τα ίσα σκέλη να περικλείουν μιαν άλλη γωνία διαφορετική της ορθής;*

Άσκηση 1.18.2 *Δείξε ότι το ύψος ενός ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι το μισό του μήκους της υποτείνουσας. Και αντίστροφα, αν το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας, τότε το τρίγωνο έχει τις δύο κάθετες πλευρές ίσες.*



Σχήμα 1.18.1: Ισόπλευρο τρίγωνο Ισότητα όλων των πλευρών

Άσκηση 1.18.3 *Δείξε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ ορίζουν τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα (Σχήμα 1.18.1-I).*

Άσκηση 1.18.4 *Στις πλευρές ενός ισοπλεύρου τριγώνου κατασκευάζουμε προς τα έξω ίσα ορθογώνια τρίγωνα (Σχήμα 1.18.1-II). Δείξε ότι σε μια τέτοια κατασκευή δεν είναι ποτέ δυνατόν τα μήκη των πέντε πλευρών που προκύπτουν να είναι ίσα.*

Άσκηση 1.18.5 *Εάν στο σχήμα 1.18.1-II υποθέσουμε ότι τα μήκη $\{|A\Delta|, |\Delta B|, |B\Gamma|, |\Gamma E|, |EA|\}$ είναι ίσα, τότε προσδιόρισε τις γωνίες στα $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$.*

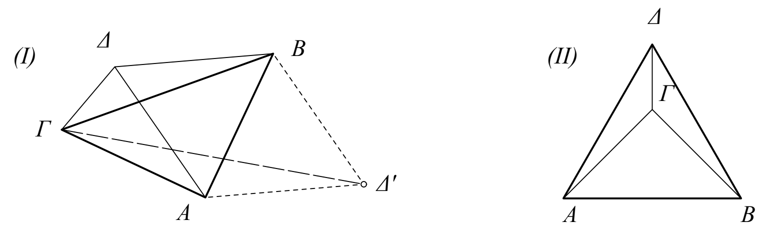
Άσκηση 1.18.6 *Εάν σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι διπλάσια της άλλης, τότε το τρίγωνο έχει γωνίες 90°, 60° και 30° και η μία κάθετος είναι διπλάσια της υποτείνουσας.*

Άσκηση 1.18.7 *Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $|A\Gamma| > |AB|$, διάμεσο AM και ύψος AY από το A. Δείξε ότι η γωνία $\widehat{YAM} = \beta - \alpha$ (δες άσκηση 2.14.15 για το αντίστροφο).*

Άσκηση 1.18.8 *Σε τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ πάρε τα σημεία Δ, E στην βάση $B\Gamma$ έτσι ώστε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{EA\Gamma} = \widehat{B}$. Δείξε ότι το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.*

Άσκηση 1.18.9 *Δοθεισών δύο τεμνομένων ευθειών α, β και σημείου P, να αχθεί διά του P ευθεία ε έτσι ώστε οι τρεις ευθείες α, β, ε να σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.*

Άσκηση 1.18.10 *Δοθέντων δύο σημείων A, B και ευθείας ε να αχθούν δύο ευθείες α, β, αντίστοιχα, διά των A, B, έτσι ώστε οι τρεις ευθείες α, β, ε να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.*



Σχήμα 1.18.2: Υπολογισμοί γωνιών

Άσκηση 1.18.11 *Στην κάθετη πλευρά AB ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και προς τη μεριά του Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο ΑΒΔ (Σχήμα 1.18.2-I). Βρες το μέτρο της γωνίας* $\widehat{B\Delta\Gamma}$. *Παρόμοια προσδιόρισε το μέτρο της* $\widehat{B\Delta'\Gamma}$, *όπου το* Δ' *είναι το συμμετρικό του Δ ως προς AB. Τέλος προσδιόρισε και τη γωνία των (προεκτάσεων των) των ευθειών* $\{A\Gamma, B\Delta\}$.

Άσκηση 1.18.12 *Στην υποτείνουσα AB ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και προς τη μεριά της ορθής κατασκευάζουμε ισόπλευρο ΑΒΔ (Σχήμα 1.18.2-II). Βρες το μέτρο της γωνίας* $\widehat{B\Delta\Gamma}$.

Άσκηση 1.18.13 *Δείξε ότι, αν τα τρία σημεία A, B, Γ ικανοποιούν τη* $|B\Gamma| = |BA| + |A\Gamma|$ *τότε περιέχονται σε μία ευθεία.*

Άσκηση 1.18.14 *Δείξε ότι για κάθε ευθεία ε, σημείο A εκτός αυτής και θετικό αριθμό δ, υπάρχουν το πολύ δύο ευθύγραμμα τμήματα AB με B επί της ε, μήκους* $|BA| = \delta$.

Άσκηση 1.18.15 *Μπορεί να χωρισθεί ένα σκαληνό τρίγωνο με μία ευθεία σε δύο ίσα τρίγωνα;*

Άσκηση 1.18.16 *Με πόσους τρόπους μπορεί να χωρισθεί με μια ευθεία ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε δύο άλλα ίσα τρίγωνα;*

Άσκηση 1.18.17 *Σε τρίγωνο με βάση* $a = |B\Gamma|$, *δείξε ότι* $b + c - a < 2|A\Delta|$, *όπου Δ οποιοδήποτε σημείο της βάσης.*

Άσκηση 1.18.18 *Δείξε ότι, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα EZ, περιεχόμενο εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ, είναι μικρότερο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου.*

Άσκηση 1.18.19 *Η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, που έχει την πλευρά* $|AB| > |A\Gamma|$. *Δείξε ότι* $|A\Delta| < |AB|$. *Κατόπιν θεώρησε το σημείο E της AB, έτσι ώστε* $|AE| = |A\Delta|$. *Δείξε ότι η γωνία* $\widehat{\Delta EB}$ *είναι πάντοτε αμβλεία και προσδιόρισε το μέτρο της συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου. Δείξε τέλος ότι* $|B\Delta| > |\Gamma\Delta|$.

Άσκηση 1.18.20 *Στο ορθογώνιο, στο A, τρίγωνο ΑΒΓ, με άνισες καθέτους, οι AY, ΑΔ και AM είναι αντίστοιχα το ύψος, η διχοτόμος και η διάμεσος. Δείξε ότι η ΑΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας* $\widehat{YAM}$.

Άσκηση 1.18.21 *Στις πλευρές (ημιευθείες) γωνίας* $\widehat{XOX'}$ *ορίζουμε σημεία A, B της OX και* A', B' *της* OX', *έτσι ώστε* $|OA| = |OA'|$ *και* $|OB| = |OB'|$. *Δείξε ότι το σημείο τομής Δ των ευθειών* AB' *και* $A'B$ *είναι επί της διχοτόμου της γωνίας* $\widehat{XOX'}$.

Άσκηση 1.18.22 *Δοθέντων τριών μη συνευθειακών σημείων προσδιόρισε ευθεία από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν την ίδια απόσταση (τρεις λύσεις).*

Άσκηση 1.18.23 *Δοθέντων δύο ίσων ευθυγράμμων τμημάτων AB, ΑΓ, να βρεθεί σημείο Δ επί δοθείσης ευθείας ε έτσι ώστε οι γωνίες* $\widehat{A\Delta B}$ *και* $\widehat{A\Delta\Gamma}$ *να είναι ίσες.*

Άσκηση 1.18.24 *Δείξε ότι, για κάθε σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, διαφορετικό από τα B και Γ, υπάρχει ευθεία ΔX που αποτέμνει από τις ευθείες των άλλων πλευρών τρίγωνο με γωνίες ίσες με αυτές του $AB\Gamma$. Δείξε ότι, για κάθε τέτοιο Δ, υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές ευθείες ΔX που έχουν αυτή την ιδιότητα.*

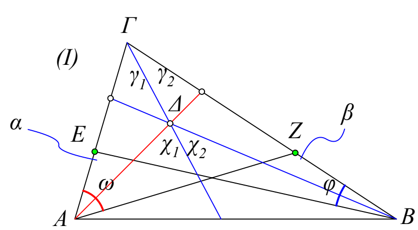
Άσκηση 1.18.25 *Την κορυφή A τριγώνου $AB\Gamma$ ενώνουμε με μ διαφορετικά σημεία της απέναντι πλευράς. Την κορυφή B ενώνουμε επίσης με ν διαφορετικά σημεία της απέναντι πλευράς. Πόσα συνολικά τρίγωνα περιέχονται στο δημιουργούμενο σχήμα;*

Υπόδειξη: $\frac{(\mu+1)(\nu+1)(\mu+\nu+2)}{2}$.

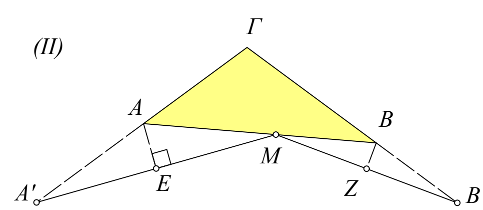
Άσκηση 1.18.26 *Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρές $|A\Gamma| > |AB|$ και επί της πλευράς $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο B', έτσι ώστε $|AB'| = |AB|$. Δείξε ότι η γωνία $\widehat{B'B\Gamma} = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Δείξε επίσης ότι η γωνία αυτή ισούται με την γωνία μεταξύ της διχοτόμου και του ύψους του τριγώνου από το A.*

Άσκηση 1.18.27 *Δείξε ότι, για κάθε σημείο X, μη περιεχόμενο στις τεμνόμενες στο σημείο O ευθείες $\{\alpha, \beta\}$ και κάθε ευθεία γ, διερχόμενη από το X, η γ τέμνει και τις δύο ευθείες $\{\alpha, \beta\}$.*

Άσκηση 1.18.28 *Αν Y, Δ, M συμβολίζουν αντίστοιχα τα ίχνη στην $B\Gamma$ του ύψους, διχοτόμου και διαμέσου του τριγώνου $AB\Gamma$, δείξε ότι το Δ είναι πάντα μεταξύ των Y και M. Δείξε επίσης ότι, αν δύο από αυτά τα ίχνη συμπίπτουν, τότε συμπίπτουν και τα τρία και το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*



Σχήμα 1.18.3: $\widehat{A\Delta B} = \alpha + \beta$



Κατασκευή σημείου M

Άσκηση 1.18.29 *Στις πλευρές ΓA, ΓB τριγώνου $AB\Gamma$ επιλέγουμε αντίστοιχα σημεία E και Z και φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\omega = \widehat{\Gamma AZ}$ και $\phi = \widehat{EB\Gamma}$ που τέμνονται στο σημείο Δ. Δείξε ότι, για τις γωνίες $\alpha = \widehat{AEB}$ και $\beta = \widehat{AZB}$, ισχύει $\alpha + \beta = 2\widehat{A\Delta B}$.*

Υπόδειξη: Έστω ότι η $\Gamma\Delta$ χωρίζει τις $\gamma = \widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{A\Delta B}$, αντίστοιχα, σε δύο μέρη γ_1, γ_2 και χ_1, χ_2 (Σχήμα 1.18.3-I). Δες ότι $\alpha + \beta = 2\gamma + \omega + \phi$, $\chi_1 = \gamma_1 + \frac{\omega}{2}$, $\chi_2 = \gamma_2 + \frac{\phi}{2}$.

Άσκηση 1.18.30 *Να βρεθεί σημείο M επί της πλευράς AB τριγώνου $AB\Gamma$, έτσι ώστε $|MA| + |A\Gamma| = |MB| + |B\Gamma|$.*

Υπόδειξη: Πάρε AA' ίσο με AM στην προέκταση της ΓA και BB' ίσο με BM στην προέκταση της ΓB (Σχήμα 1.18.3-II). Το μήκος $|\Gamma A'| = |\Gamma B'|$ είναι γνωστό και ίσο με την ημιπερίμετρο του τριγώνου. Τα τρίγωνα $AA'M$ και $BB'M$ είναι ισοσκελή και κατασκευάζονται από τα δεδομένα.

Άσκηση 1.18.31 *Δείξε ότι, εάν το τρίγωνο $AB\Gamma$ περιέχεται εξ ολοκλήρου στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, τότε κάθε πλευρά του $AB\Gamma$ είναι μικρότερη της μεγαλύτερης πλευράς του $A'B'\Gamma'$ και κάθε πλευρά του $A'B'\Gamma'$ είναι μεγαλύτερη της μικρότερης του $AB\Gamma$.*