ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2019-20

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

1. Παραδοση την πεμπτη 14/11

(Παραδώστε μόνο τις **4.**, **5.**).

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων $z = f(x, y)$ όταν:

(1) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$,
(2) $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$,
(3) $f(x, y) = ax/y^2$, a σταθερά.

2. Έστω

$$f(x, y) = e^{x+y} \sin(x - y).$$

Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης.

3. Η θερμοκρασία T ενός ομογενούς σώματος, δίνεται στο σημείο (x, y) στον χρόνο t από την

$$T(x, y, t) = \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}.$$

Δείξτε ότι η T ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η *εξίσωση διάχυσης της θερμότητας στο επίπεδο*. Η άσκηση αυτή έχει πολλές πράξεις. Μην το βάλετε κάτω!

4. Έστω

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot \log\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

Βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της f.

5. Έστω $z = f(x, y)$ και $c(t) = (x(t), y(t)$ όπου $x(t) = e^t$, $y(t) = \cos t$. Βρείτε την έκφραση της

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}$$

με τον κανόνα της αλυσίδας. Υποθέτοντας ότι ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(0)) = 1,$$

δείξτε ότι

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = 1.$$

6.* Η άσκηση αυτή[1] μας δείχνει τί συμβαίνει όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας σε υψηλότερης τάξης παραγώγους. Έστω $\psi = \psi(r)$ και $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Μια τέτοια ψ λέγεται *ακτινική* συνάρτηση και συναντάται πολλές φορές). Δείξτε με τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{d\psi}{dr}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{d\psi}{dr}.$$

Θέσατε (για ευκολία)

$$\Psi(r) = \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}, \tag{1.1}$$

οπότε οι πιο πάνω σχέσεις γράφονται

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = x\Psi(r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = y\Psi(r).$$

Παραγωγίστμε την αριστερή σχέση ως προς x και την δεξιά σχέση ως προς y για να πάρετε:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \Psi(r) + \frac{x^2}{r}\frac{d\Psi}{dr}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Psi(r) + \frac{y^2}{r}\frac{d\Psi}{dr}.$$

(Εξηγήστε!). Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2\Psi(r) + r\frac{d\Psi}{dr}.$$

Αντικαθιστώντας από την (1.1) δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}.$$

Η παραπάνω έκφραση είναι σημαντική. Η έκφραση

$$\Delta(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

λέγεται *Λαπλασιανή* της ψ και απαντάται σε πολλές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους· αναφέρουμε ενδεικτικά:

(1) εξίσωση του Laplace:

$$\Delta(\psi) = 0,$$

(2) εξίσωση της θερμότητας:

$$\Delta(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

(3) κυματική εξίσωση:

$$\Delta(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

[1] Στην άσκηση αυτή περιέχονται πολλές έννοιες που δεν έχουν διδαχθεί. Προσπαθήστε την σε δεύτερο χρόνο.

Η άσκηση μας λέει ότι εάν είμαστε τυχεροί και $x^2+y^2=r^2$, οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται σημαντικά. Θα το διαπιστώσουμε αυτό εντοπίζοντας όλες τις ακτινικές λύσεις της εξίσωσης του Laplace, δηλαδή θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\Delta(\psi) = \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2} = 0.$$

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε λέγεται *υποβιβασμός της τάξης της διαφορικής εξίσωσης*. Θέτουμε

$$u(r) = \frac{d\psi}{dr}. \tag{1.2}$$

Η εξίσωση του Laplace γίνεται τότε

$$\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} = 0.$$

Αυτή είναι μία δ.ε. όπου οι μεταβλητές χωρίζονται:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}.$$

Παίρνοντας ολοκληρώματα και στα δύο μέλη, προκύπτει

$$\ln|u| = -\ln r + \ln c, \quad c > 0,$$

άρα

$$u(r) = \frac{c}{r}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Από την (1.2) τώρα έχουμε

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{c}{r} \implies d\psi = \frac{cdr}{r}.$$

Ολοκληρώνοντας, καταλήγουμε στην

$$\psi(r) = c\ln r + d,$$

όπου c, d είναι σταθερές.

Καλείστε τώρα να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα. Πάρτε

$$\psi(r) = \psi(x,y) = c\ln\sqrt{x^2+y^2} + d$$

και δείξτε ότι $\Delta(\psi) = 0$.