

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

1. ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΗΝ ΠΕΜΠΤΗ 28/11

Παραδώστε τις ασκήσεις με αστερίσκο.

1.

(1) Γράψτε το διάνυσμα με αρχή P και τέλος Q στη μορφή $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, όπου:

α) (*) $P = (1, 2, -7)$, $Q = (9, -7, -8)$.

β) $P = (-4, 0, -\sqrt{2})$, $Q = (\sqrt{2} - 1, -\sqrt{3}, 0)$.

(2) Βρείτε τα $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $c\mathbf{a}$, όταν

α) $\mathbf{a} = (1, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (-9, -2, -1)$.

β) (*) $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 4, 1)$.

(3) Βρείτε τα μήκη (μέτρα) των \mathbf{a} και \mathbf{b} όπως στις περιπτώσεις του (2).

(3) Βρείτε το $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ όπου \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι όπως στις περιπτώσεις του (2).

2. Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε τα παρακάτω:

α) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2$.

β) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ (Νόμος συνημιτόνων).

γ) Συμπεράνατε το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ αν και μόνο αν $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

δ) Αποδείξτε τον νόμο του παραλληλογράμμου:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2).$$

3. Βρείτε τις παραμετρικές καθώς και τις καρτεσιανές εξισώσεις των ευθειών που:

(1) περνούν από το \mathbf{p} στην κατεύθυνση του \mathbf{v} όταν:

α) (*) $\mathbf{p} = (0, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$.

β) $\mathbf{p} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 2)$.

(2) περνούν από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} όταν:

α) $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 4)$.

β) (*) $\mathbf{a} = (-7, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$.

3. Βρείτε τις παραμετρικές καθώς και τις καρτεσιανές εξισώσεις των επιπέδων που:

(1) περνούν από το \mathbf{p} και παράγονται από τα \mathbf{u} , \mathbf{v} όταν:

α) $\mathbf{p} = (-1, -2, 3)$, $\mathbf{u} = (9, -7, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$.

β) (*) $\mathbf{p} = (-5, 2, 2)$, $\mathbf{u} = (-3, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 4)$.

(2) περνούν από τα μη συνευθειακά \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 όταν:

α) (*) $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$.

β) $\mathbf{a}_1 = (0, -2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, -1)$.

4. Βρείτε τα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ και τα $\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle$ όταν:

α) $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$.

β) (*) $\mathbf{a} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (1, 0, -3)$.

5. Το μεικτό γινόμενο $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ τριών διανυσμάτων του \mathbb{R}^3 ορίζεται από τη σχέση

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle.$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς δείξτε ότι η ποσότητα $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.