

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ**  
**23/01/2020**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

**Διάρκεια εξέτασης: 150 λεπτά.**

1. (1.5) Η ανηγμένη μορφή της καταστατικής εξίσωσης Van der Waals είναι η

$$T = \frac{3}{8} \left( P + \frac{3}{V^2} \right) \left( V - \frac{1}{3} \right).$$

Να υπολογίσετε (χρησιμοποιώντας κανόνες μερικής παραγώγισης και όχι αναλύοντας τον παραπάνω τύπο) τις

$$\frac{\partial^2 T}{\partial P^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial P \partial V}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial V^2}.$$

2. (1.5) Η περιεκτικότητα  $s$  διαλύματος σε αλάτι σε σχέση με το χρόνο  $t$  ικανοποιεί τη σχέση

$$(s^3 + t^2)^2 - s^2 - t^3 = 0.$$

Βρείτε την  $ds/dt$  όταν  $t = 1$  και  $s = 1$ . Υπάρχει μείωση ή αύξηση της περιεκτικότητας στο σημείο αυτό;

3. (2) Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - y^3, -3xy^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

α) Δείξτε ότι το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό και βρείτε συνάρτηση δυναμικού  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$\mathbf{F} = \nabla \phi, \quad \phi(1, 1) = 0.$$

β) Έστω παραγωγίσιμη καμπύλη  $C$  που ξεκινά από το  $(1, 1)$  και καταλήγει στο  $(-1, -1)$ . Υπολογίστε το

$$I = \oint_C \langle \mathbf{F}, ds \rangle.$$

4. (2.5) Έστω  $C$  η κλειστή καμπύλη που αποτελείται από το άνω τμήμα του μοναδιαίου κύκλου και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα  $(-1, 0)$  και  $(1, 0)$ . Θεωρούμε την  $C$  προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C y^3 dx + x^3 dy.$$

5. (2.5) Η θερμοκρασία μίας ομογενούς πλάκας στο σημείο  $(x, y) \in [-2, 2]^2$  δίνεται από την

$$T(x, y) = x^2 - y^2 - x + y + 1.$$

α) Έστω  $\ell(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , το ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το  $(-1, 0)$  και καταλήγει στο  $(1, 1)$ . Βρείτε με τον κανόνα της αλυσίδας την παράγωγο  $d(T \circ \ell)/dt$ , εξετάστε τη μονοτονία της  $(T \circ \ell)(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ .

β) Βρείτε την  $d^2(T \circ \ell)/dt^2$  και βρείτε αν υπάρχουν τις ακρότατες τιμές της  $T$  επάνω στο  $\ell$ .