ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2019-20

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης: 120 λεπτά.

1. Βρείτε την dy/dx όταν

$$(x^2+y^2)^2+x^2-y^2=0.$$

Απάντηση: Παραγωγίζοντας ως προς x την παραπάνω παίρνουμε

$$2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)+2x-2y\frac{dy}{dx}=0.$$

Ισοδύναμα,

$$y(2x^2+2y^2-1)\frac{dy}{dx}=-x(2x^2+2y^2+1).$$

Συνεπώς, όταν $y\neq 0$ και $x^2+y^2\neq 1/2$ είναι

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(2x^2+2y^2+1)}{y(2x^2+2y^2-1)}.$$

Εναλλακτικά: Έστω

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2+x^2-y^2=0.$$

Παίρνουμε διαφορικά:

$$f_x\,dx+f_y\,dy=0$$

Όμως

$$f_x=4x(x^2+y^2)+2x,\quad f_y=4y(x^2+y^2)-2y$$

και με την πρϋπόθεση $f_y\neq 0$ παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

2. α) Δείξτε ότι το

$$\omega=2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy$$

είναι ολικό διαφορικό και βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού ϕ της ω που ικανοποιεί $\phi(0,0)=0$.
β) Υπολογίστε το

$$I=\int_C\omega$$

όπου C καμπύλη που ξεκινά από το $(1,0)$ και τελειώνει στο $(0,1)$.

Απάντηση: α) Θέτουμε

$$P=2xy,\quad Q=x^2-y^2.$$

Είναι

$$P_y=2x=Q_x,$$

άρα το ω είναι ολικό διαφορικό. Αν ϕ συνάρτηση δυναμικού, τότε θα πρέπει

$$d\phi = \phi_x \, dx + \phi_y \, dy = \omega,$$

άρα

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - y^2. \tag{0.2}$$

Ολοκληρώνουμε την (0.1) ως προς x:

$$\phi(x, y) = 2y \int x \, dx = yx^2 + c(y) \tag{0.3}$$

Παραγωγίζουμε την (0.3) ως προς y:

$$\phi_y = x^2 + c'(y) = x^2 - y^2, \quad \text{από την (0.2).} \tag{0.4}$$

Συνεπώς η (0.4) γράφεται

$$c'(y) = -y^2 \implies c(y) = -y^3/3 + c.$$

Παίρνουμε τελικά από την (0.3) ότι

$$\phi(x, y) = yx^2 - y^3/3 + c.$$

Για $(x, y) = (0, 0)$ προκύπτει $c = 0$, άρα η ζητούμενη συνάρτηση δυναμικού είναι η

$$\phi(x, y) = yx^2 - y^3/3.$$

β) Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα των επικαμπυλίων ολοκληρμάτων

$$I = \phi(0, 1) - \phi(1, 0) = -1/3.$$

3. Αέριο αρχικού όγκου V_0 θερμαίνεται και επεκτείνεται. Υποθέτουμε την ισχύ της καταστατικής εξίσωσης

$$F(P, V, T) = 0$$

για κάποια παραγωγίσιμη F. Υποθέτοντας επίσης ότι $F_V \neq 0$, βρείτε έκφραση του συντελεστή θερμικής επέκτασης

$$\sigma = \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial T},$$

μέσω των μερικών παραγώγων της F.

Απάντηση: Παίρνουμε το διαφορικό της F:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P} \, dP + \frac{\partial F}{\partial V} \, dV + \frac{\partial F}{\partial T} \, dT = 0.$$

Όταν $F_V \neq 0$ έχουμε τότε

$$dV = -\frac{F_P}{F_V} \, dP - \frac{F_T}{F_V} \, dT.$$

Είναι όμως και

$$dV = V_P \, dP + V_T \, dT.$$

Εξισώνοντας προκύπτει

$$V_T = -\frac{F_T}{F_V}.$$

Άρα,

$$\sigma = \frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{1}{V_0}\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}}.$$

4. Η θερμοκρασία μίας ομογενούς πλάκας στο σημείο (x, y) δίνεται από την

$$T(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2 + x + y + 1$$

Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της T επάν στο σύνορο του μοναδιαίου δίσκου.

Απάντηση: Το σύνορο του μοναδιαίου δίσκου παραμετράται από την

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

με

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Επίσης

$$T_x = 4x(x^2 + y^2) - 2x + 1, \quad T_y = 4y(x^2 + y^2) - 2y + 1.$$

με τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\begin{aligned}\frac{d(T \circ \mathbf{c})(t)}{dt} &= -(4x(x^2 + y^2) - 2x + 1)\sin t + (4y(x^2 + y^2) - 2y + 1)\cos t\\ &= \cos t - \sin t.\end{aligned}$$

Η παράγωγος μηδενίζεται για τα $t \in [0, 2\pi]$ που ικανοποιούν

$$\cos t = \sin t \implies t = \pi/4, 5\pi/4.$$

Για $t = \pi/4$, $\mathbf{c}(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ και

$$T(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} + 1 \quad \text{μέγιστο.}$$

Για $t = 5\pi/4$, $\mathbf{c}(5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ και

$$T(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} - 1 \quad \text{ελάχιστο.}$$

5. Έστω καμπύλη c που αποτελείται από τις πλευρές του τριγώνου με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$, προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_c (x - y^2)\, dx + (y - x^2)\, dy.$$

Απάντηση: Έστω T η επιφάνεια του τριγώνου. Θέτουμε

$$P(x, y) = x - y^2, \quad Q(x, y) = y - x^2.$$

Το θεώρημα του Green μας λέει τότε ότι

$$\oint_c (x-y^2)\, dx+(y-x^2)\, dy = \iint_T (Q_x-P_y)\, dxdy = \iint_T (-2x+2y)\, dxdy = 2\iint_T (y-x)\, dxdy$$

Γράφουμε:

$$T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\iint_T (y - x)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (y - x)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y^2/2 - xy \right]_{y=0}^{y=1-x}\, dx \\
&= \int_0^1 ((1 - x)^2/2 - x(1 - x))\, dx \\
&= \int_0^1 3x^2/2 - 2x + (1/2)\, dx \\
&= \left[x^3/2 - x^2 + x/2 \right]_0^1 = 1/2 - 1 + 1/2 = 0.
\end{aligned}$$

Είναι συνεπώς και

$$\oint_c (x - y^2)\, dx + (y - x^2)\, dy = 0.$$