ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2011-12

M104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ III
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3–ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Απο το βιβλιο των Marsden–Tromba

1. Ασκήσεις της Παραγράφου 7.1. Όλες εκτός των 6,8 που αναφέρονται στο ολοκλήρωμα Riemann. (Καλό βέβαια θα ήταν να τις κοιτάξετε σε δεύτερη φάση για να θυμηθείτε τον ορισμό του ολοκληρώματος). Μπορείτε επίσης σε πρώτη φάση να παραλείψετε την 14.

2. Ασκήσεις της Παραγράφου 7.2. Σε *πρώτη φάση* μπορείτε να παραλείψετε τις 8, 18, 19, 20.

2. Διαφορες

1. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\gamma}} f ds$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $f(x,y,z) = y^{-3}$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\log t, t, 2)$, $t \in [0,1]$.
(2) $f(x,y,z) = \cos z$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0,2\pi]$.
(3) $f(x,y,z) = x\cos z$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0,1]$.
(4) $f(x,y,z) = z$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0,2\pi]$.
(5) $f(x,y,z) = \frac{x+y}{y+z}$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (3t, 2t^{3/2}, 3t)$, $t \in [1,2]$.

2. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\gamma}} F \cdot d\mathbf{s}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $F(x,y,z) = (y,z,x)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t+1, t-1)$, $t \in [0,1]$.
(2) $F(x,y,z) = (3xy, -5z, 10x)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2+1, 2t^2, t^3)$, $t \in [1,2]$.
(3) $F(x,y,z) = (x,y,z)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0,2\pi]$.
(4) $F(x,y,z) = (x, 2y, y)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.
(5) $F(x,y,z) = (x^2+y^2, z, xy)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0,\pi]$.

3. Υπολογίστε το $\int_C F \cdot d\mathbf{s}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$, και C είναι η τεθλασμένη ευθεία που ενώνει τα $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$.
(2) $F(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$, και C είναι η παραβολή $z = x^2$ στο επίπεδο $y = 0$ από το $(-1,0,1)$ στο $(1,0,1)$.
(3) $F(x,y,z) = (x,y,z)$, και C είναι η παραβολή $y = x^2$ στο επίπεδο $z = 0$ από το $(-1,1,0)$ στο $(2,4,0)$.

4, Έστω το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = (3x^2, 2xz - y, z)$.

(1) Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\gamma}} F \cdot d\mathbf{s}$ όπου $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ με τύπους $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2t, t, 3t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2t^2, t^2, 3t^3)$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2t, t^2, 3t^3)$.
(2) Υπολογίστε το $\mathrm{curl} F$.

(3) Είναι το F πεδίο κλίσεων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας με δύο διαφορετικούς τρόπους.

5. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = \left(y^2z^3\cos x - 4x^3z, 2yz^3\sin x, 3y^2z^2\sin x - x^4\right).$$

Δείξτε ότι $\mathrm{curl}F = \mathbf{0}$ και βρείτε συνάρτηση f ώστε $\nabla f = F$.

6. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = (yz, xz + z^2, xy + 2yz).$$

(1) Έστω $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$. Δείξτε ότι $\int_{\boldsymbol{\gamma}} F \cdot d\mathbf{s} = 0$.
(2) Δείξτε ότι $\mathrm{curl}F = \mathbf{0}$.
(3) Βρείτε συνάρτηση f ώστε $\nabla f = F$.
(4) Εξηγήστε το αποτέλεσμα του 1) μέσω του 3), αναφέροντας τι ακριβώς χρησιμοποιείτε.
(5) Έστω $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t\sin^7 t, t^2\cos^5 t, \cos^4 t + \sin^4 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\gamma}} F \cdot d\mathbf{s} = 0$.