ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2011-12

M104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4–ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Διαφορες

1. Έστω $F(x,y,z) = (z^3+2xy, x^2, 3xz^2)$ και θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\int_C F\cdot d\mathbf{s}$.
   (1) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όταν η C είναι το τετράγωνο με κορυφές $(\pm1,\pm1,0)$ με προσανατολισμό αντίθετο με την φορά των δεικτών και σημείο εκκίνησης το $(1,1,0)$.
   (2) Βρείτε πραγματική συνάρτηση f ώστε $\nabla f = F$.
   (3) Εξηγήστε την απάντησή σας στο 1) χρησιμοποιώντας γνωστό θεώρημα.
   (4) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όταν η C είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(1,-2,1)$ και $(3,1,4)$.
   (5) Το ίδιο ερώτημα όπως παραπάνω αλλά με C να είναι οποιαδήποτε καμπύλη που ενώνει τα $(1,-2,1)$ και $(3,1,4)$.

2. Υπολογίστε το $\int_{\mathbb{C}} F\cdot d\mathbf{s}$ όπου

$$F(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

όπου C είναι τυχούσα καμπύλη που ενώνει τα $(1,1,1)$ και $(1,2,4)$.

3. Θεωρήστε γνωστό ότι $\nabla f = F$, όπου $F(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ για κάθε $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Εάν $f(0,0,0)=3$ ποιο είναι το $f(1,1,2)$;

4, Έστω ο συνεχώς διαφορίσιμος δρόμος $\boldsymbol{\gamma} : [a,b]\to\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:
   (1) Εάν το $F(\boldsymbol{\gamma}(t))$ είναι κάθετο στο $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ για κάθε $t\in[a,b]$, τοτε $\int_{\boldsymbol{\gamma}} F\cdot d\mathbf{s} = 0$.
   (2) Εάν το $F(\boldsymbol{\gamma}(t))$ είναι ομόρροπο με το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ για κάθε $t\in[a,b]$, τοτε $\int_{\boldsymbol{\gamma}} F\cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \|F\| d\mathbf{s}$.
   (3) Τι γίνεται όταν το $F(\boldsymbol{\gamma}(t))$ είναι αντίρροπο με το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ για κάθε $t\in[a,b]$;

5. Έστω F ένα διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$ με $\mathrm{curl}F = \mathbf{0}$. Δείξτε ότι το F είναι πεδίο κλίσεων $(F=\nabla f)$.(Σημείωση: αν το F ήταν ορισμένο σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, τότε εάν σταθεροποιούσαμε ένα (x_0,y_y,z_0) θα έπρεπε η ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων από το (x_0,y_0,z_0) στο (x,y_0,z_0) και από κει στο (x,y,z_0) με τέλος το (x,y,z) να ήταν μέσα στο σύνολο.)

6. Έστω $r=(x,y,z)$, $\mathbf{r} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ και το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = \mathbf{r}^{-3}r,$$

ορισμένο σε όλο το $\mathbb{R}^3$ εκτός από την αρχή. Έστω p και q δύο σημεία του $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ και C απλή καμπύλη από το p στο q.
   (1) Δείξτε ότι το F είναι πεδίο κλίσεων (αυτό είναι γνωστό).

(2) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ακριβή τύπο της f, δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_C F \cdot d\mathbf{s}$$

εξαρτάται μόνο από τους αριθμούς $R_1 = \mathbf{r}_1$ και $R_2 = \mathbf{r}_2$.

7. Έστω $F(x, y) = (x^2 y, y^2)$ και η προσανατολισμένη καμπύλη $C = \bigcup_{i=1}^{4} C_i$ όπου
   (1) C_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 1)$ στο $(3, 1)$.
   (2) C_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(3, 1)$ στο $(1, 3)$.
   (3) C_3 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 3)$ στο $(4, 3)$.
   (4) C_4 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(4, 3)$ στο $(4, 1)$.

Υπολογίστε το $\int_C F \cdot d\mathbf{s}$.