

**M104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5–ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ MARSDEN–TROMBA

1. Ασκήσεις της Παραγράφου 7.3. Όλες. Ιδιαίτερα η 14, η 15 (η μισή έχει γίνει στην τάξη) και η 16, που αναφέρονται σε θεμελιώδεις έννοιες και θεωρήματα του Λογισμού.
2. Όλες είναι σχετικά απλές. Λύνοντάς τες θα σας βοηθήσει να θυμηθείτε την διπλή ολοκλήρωση.

2. ΔΙΑΦΟΡΕΣ

1 *. Η μοναδιαία σφαίρα του Heisenberg έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$(x^2 + y^2)^2 + z^2 = 1.$$

Η σφαίρα αυτή μοιάζει με την γνωστή Ευκλείδεια σφαίρα. Το ιδιαίτερο που έχει είναι μια δική της γεωμετρία διαφορετική από αυτήν των επιφανειών που περιγράφουμε στο μάθημα. Τα στοιχεία αυτής της γεωμετρίας περιγράφονται χωρίς λεπτομέρειες στα ερωτήματα 2 και 3.

(1) Βρείτε μία παραμέτρησή της. (Υπόδειξη:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (\cos^{1/2} u \cos v, \cos^{1/2} u \sin v, \sin u), \quad (u, v) \in \mathcal{R} = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε τα διανύσματα Φ_u και Φ_v και κατόπιν το

$$\mathbf{n}_h =: \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + 2y(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - 2x(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Ποιο είναι το $\|\mathbf{n}_h\|$; (Δείτε ότι το $\|\mathbf{n}_h\|$ είναι ένα διδιάστατο διάνυσμα που περιέχει στοιχεία του καθέτου διανύσματος $\Phi_u \times \Phi_v$).

(3) Δείξτε ότι

$$\mathcal{A}_h = \iint_{\mathcal{R}} \|\mathbf{n}_h(u, v)\| dudv = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{1/2} u du.$$

(Το τελευταίο ολοκλήρωμα λέγεται οριζόντιο επιφανειακό εμβαδόν και ισούται με $B(3/4, 1/2)$ όπου B είναι η συνάρτηση βήτα. Για όσους ενδιαφέρονται ας ψάξουν στο διαδίκτυο γράφοντας beta function).

(4) Βρείτε τον όγκο της.

(Υπόδειξη: Ο όγκος προκύπτει από την παραμέτρηση

$$\begin{aligned} \Psi(r, u, v) &= (x(r, u, v), y(r, u, v), z(r, u, v)) \\ &= (r \cos^{1/2} u \cos v, r \cos^{1/2} u \sin v, r^2 \sin u), \end{aligned}$$

όπου $(r, u, v) \in \mathcal{W} = [0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ και ισούται με

$$\iiint_{\mathcal{W}} |J(r, u, v)| dr du dv.$$

Εδώ, $J(r, u, v)$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού Ψ .

** Η άσκηση αυτή είναι έξω από τα καθιερωμένα και προαιρετική. Περιμένω τον πρόθυμο ή την πρόθυμη που θα μου φέρει μια καλή λύση. Ο ευρών αμειφθήσεται!*