ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2011-12

Μ104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7–ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Απο το βιβλιο των Marsden–Tromba

1. Όλες οι ασκήσεις των παραγράφων 8.2, 8.3, 8.4 είναι ενδιαφέρουσες. Μπορείτε να παραλείψετε αυτές που αναφέρονται στην Φυσική.

2. Διαφορες

1. Επιβεβαιώστε το θεώρημα του Green για $P(x,y) = y - \sin x$, $Q(x,y) = \cos x$ και R το τριγωνικό χωρίο με κορυφές (0.0), $(\pi/2, 0)$ και $(\pi/2, 1)$.

2. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green για να βρείτε το εμβαδόν που περικλεεείι το κυκλοειδές:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Θεωρήστε το παραβολοειδές S με τύπο $2z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$ με συνοριακή καμπύλη C και το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2).$$

(1) Βρείτε το $\mathrm{curl}F$.
(2) Δείξτε ότι μία παραμέτρηση του S δίνεται από την

$$\Phi(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}\right), \quad \text{όπου } u^2+v^2 \leq 4.$$

(3) Δείξτε ότι

$$\int_{\Phi} \mathrm{curlF} \cdot d\mathbf{S} = -20\pi.$$

(4) Υποθέτοντας ότι το κάθετο διάνυσμα της S δείχνει προς τα έξω, εξετάστε εάν η Φ διατηρεί τον προσανατολισμό.
(5) Βρείτε κατάλληλο προσανατολισμό για την C και επιβεβαιώστε το Θεώρημα του Stokes.

4, Έστω $F(x,y,z) = (2xy + 3, x^2 - 4z, -4y)$.

(1) Βρείτε το $\mathrm{curl}F$.
(2) Υπολογίστε το

$$\int_C F \cdot d\mathbf{s}$$

για οποιαδήποτε καμπύλη C που συνδέει τα σημεία $(3,-1,2)$ και $(2,1,-1)$ δικαιολογώντας τα βήματα που κάνετε.

5. Επιβεβαιώστε το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = (4x, -2y^2, z^2)$$

ορισμένο στο χωρίο V που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=4$ και τα επίπεδα $z=0$ και $z=3$. (Το κάθετο διάνυσμα κοιτά προς τα έξω).

6. Για $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, V συμμετρικό χωρίο του $\mathbb{R}^3$ με συνοριακή επιφάνεια S προσανατολισμένη ώστε το κάθετο διάνυσμα να κοιτά προς τα έξω, δείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες του Green:

(1)

$$\int_S (f\nabla g)\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)dxdydz.$$

(2)

$$\int_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)dxdydz.$$

Ως Πόρισμα αποδείξτε: εάν η f είναι αρμονική, ($\nabla^2 f = 0$) τότε

$$\int_S \nabla f\cdot d\mathbf{S} = 0.$$