ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2011-12

Μ104 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 05/09/2012

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οδηγίες

(α) *Όσες /οι γράφουν για αναβαθμολόγηση να σημειώσουν τον υπάρχοντα βαθμό τους.*
(β) *Τα θέματα είναι ισοδύναμα,* **αλλά** *γράψτε υποχρεωτικά ένα από τα 4, 5. Δικαιολογήστε πλήρως τα αποδεικτικά σας βήματα.*

Θεματα

1. Υπολογίστε μέ τήν βοήθεια του Θεωρήματος του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

όπου γ απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου που δεν περιέχει το $(0,0)$.

2. Ένα συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ του $\mathbb{R}^3$ έχει σταθερό, μη μηδενικό στροβιλισμό: $\text{curl}(\mathbf{F}) = \mathbf{a}$, όπου $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3_*$. Δείξτε ότι υπάρχει επίπεδο $\mathbf{p}$ στο οποίο ισχύει: για κάθε κλειστή καμπύλη γ που περιέχεται στο $\mathbf{p}$ είναι

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

3. Επαληθεύστε το Θεώρημα απόκλισης του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ επάνω στην σφαίρα $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$. [1]

4. Με την μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

με τη μέθοδο των πινάκων.

Διάρκεια εξέτασης 120 λεπτά. Καλή επιτυχία.

[1] Πιθανόν να χρειαστεί: αν $\Phi(x,y,z)=0$ είναι επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, τότε τα $\pm\nabla\Phi/\|\Phi\|$ είναι μοναδιαία διανύσματα κάθετα στην επιφάνεια.