Κεφάλαιο 10

Πηγές των μαθηματικών VI: Τα πολύγωνα μετά τον Ευκλείδη

10.1 Τί χάσαμε στο Βιβλίο δ′

Στην Πρόταση δ′ 16 ο Ευκλείδης κατασκευάζει ένα κανονικό 15-γωνο εναποθέτοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε ένα κανονικό πεντάγωνο (Σχήμα 10.1). Πεπλεγμένη σε αυτή τη λύση είναι η παρακάτω γενική αρχή:

Εάν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό r-γωνο και ένα κανονικό s-γωνο και επιπλέον γνωρίζουμε αριθμούς x, y τέτοιους ώστε $xr + ys = 1$, τότε μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε ένα κανονικό rs-γωνο.

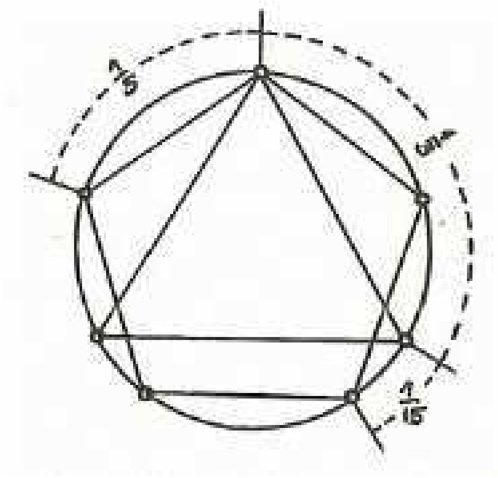
Χρειαζόμαστε τόξο ίσο με το $1/rs$ του κύκλου και x, y όπως παραπάνω. Τότε,

$$\frac{1}{rs} = \frac{xr + ys}{rs} = x\frac{1}{r} + y\frac{1}{s}.$$

Άρα, ο συνδυασμός αυτός δίδει το ζητούμενο τόξο. Στην περίπτωση του 15-γώνου είναι

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

Εφ′ όσον για κάθε αριθμούς r, s με μέγιστο κοινό διαιρέτη $(r, s) = 1$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο (ζ′ 1,2) και να βρούμε x, y με την ζητούμενη ιδιότητα, οδηγούμαστε εύκολα στην περίπτωση (3) του καταλόγου της επόμενης παραγράφου. Εννοείται, ότι η γενική μορφοποίηση είναι σύγχρονη. Ο Ευκλείδης δεν είχε κανένα λόγο να παραθέσει την γενική αρχή (3)· του χρειάζεται μόνο η ειδική περίπτωση που διαπραγματεύεται.



Σχήμα 10.1: Η κατασκευή του κανονικού δεκαπενταγώνου.

10.2 Τι γνώριζε ο Ευκλείδης

Μπορούμε με τις οποιεσδήποτε επιφυλάξεις να θεωρήσουμε ότι ο Ευκλείδης 'γνώριζε' την (3) παρακάτω, και οπωσδήποτε και αυτός και ο προ-ευκλείδειος συγγραφέας του Βιβλίου δ΄ γνώριζαν τις τετριμμένες παρατηρήσεις (1) και (4):

1. Για κάθε $n > 1$, το κανονικό 2^n-γωνο είναι κατασκευάσιμο.

2. Τα κανονικά 3-γωνα και 5-γωνα είναι κατασκευάσιμα.

3. Εάν τα κανονικά r-γωνα και s-γωνα είναι κατασκευάσιμα και $(r, s) = 1$. τότε και το κανονικό rs-γωνο είναι κατασκευάσιμο.

4. Εάν το κανονικό n-γωνο είναι κατασκευάσιμο και ο k διαιρεί τον n, τότε και το κανονικό k-γωνο είναι κατασκευάσιμο.

Δεδομένων των (1)–(4), το πρόβλημα για το τυχαίο n ανάγεται σε δυνάμεις πρώτων p^i, $p \neq 2$. [1]

10.3 Τι έκανε ο Αρχιμήδης

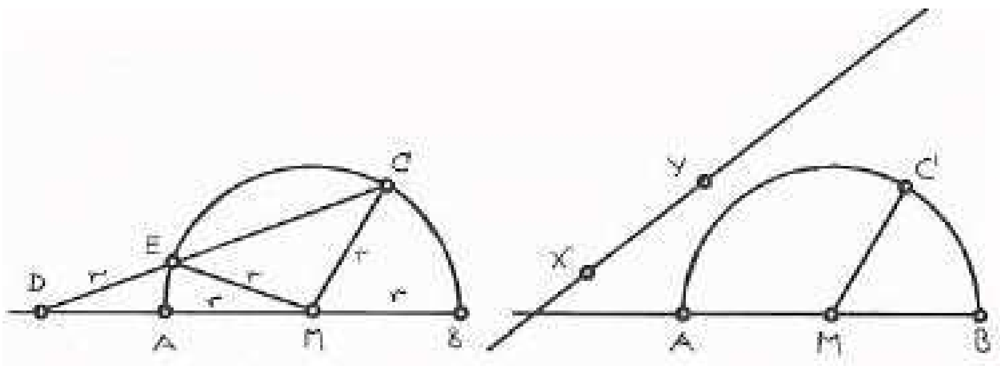
Με κάποια συγκεκριμένη παραλλαγή της μεθόδου της νεύσης, ο Αρχιμήδης κατασκεύασε το κανονικό επτάγωνο και με την συνήθη νεύση το κανονικό εννεάγωνο. Τούτη η νεύση δίνει την λύση της τριχοτόμησης της γωνίας:

Ας δούμε το σχήμα 10.2 και ας προχωρήσουμε με ανάλυση και σύνθεση:

Ανάλυση: Έστω ο κύκλος κέντρου M και ακτίνας r και η ευθεία DEC με τη απόσταση $CE = r$ δοθείσα.

Χρησιμοποιώντας τις α′ 32 και α′ 5 βρίσκουμε για τις α, β ότι

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle MDE + \angle MCD \\ &= \angle MDE + \angle MEC \\ &= \angle MDE + 2\angle MDE \\ &= 3\beta. \end{aligned}$$



Σχήμα 10.2: Η Αρχιμήδεια τριχοτόμηση γωνίας με νεύση.

Σύνθεση: Έστω δοθείσα γωνία $\alpha < \pi/2$. Χαράσσουμε απόσταση $XY = r$ στον κανόνα και τον γλιστράμε στη θέση όπου το X βρίσκεται στην προεκτεταμένη ευθεία AB, το Y είναι επάνω στον κύκλο και η XY περνά από το C. Η γωνία β είναι $\alpha/3$.

[1]Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής: Για κάθε $n > 1$ υπάρχουν πρώτοι $p_1, \dots, p_j$ ξένοι μεταξύ τους και φυσικοί $m_1, \dots, m_j$ τέτοιοι ώστε $n = p_1^{m_1} \dots p_j^{m_j}$.

Εφαρμογή: Τριχοτομείται γωνία $\pi/3$ ώστε $\beta = \pi/9$. Με την 2β στο κέντρο του κύκλου κατασκευάζεται το κανονικό εγγεγραμμένο εννεάγωνο.

10.4 Τι απέδειξε ο Gauss

Ο Carl Friedrich Gauss (1777–1855) αρχίζει το επιστημονικό του ημερολόγιο με την παρακάτω καταχώρηση.

Το θεμέλιο στο οποίο βασίζεται η διαίρεση του κύκλου, είναι η γεωμετρική του διαίρεση σε δεκαεπτά μέρη, και ούτω καθ΄ εξής.

Ο έφηβος Gauss δεν είχε βρει μόνο την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου, αλλά επίσης και τις γενικές αρχές πίσω απ΄ αυτήν. Στην πρώτη του δημοσίευση[2] γράφει:

Για ένα περιττό πρώτο p, το κανονικό p^i-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη εάν και μόνο εάν $i = 1$ και $p = 2^{2^k} + 1$, δηλαδή ο p είναι ένας αριθμός του Fermat.

Δεν είναι όλοι οι αριθμοί του Fermat πρώτοι. Λ.χ. οι αριθμοί $F_5, \dots F_{23}$ είναι γνωστό ότι είναι σύνθετοι. Κατά συνέπεια, από τη στιγμή που δεν είναι ακόμη γνωστό κανένα γενικό αποτέλεσμα για το πότε ένας αριθμός Fermat είναι πρώτος, το πρόβλημα κατασκευής του κανονικού εγγεγραμμένου n-γώνου παραμένει ανοικτό.[3]

10.5 Πως το έκανε ο Gauss

Θα παραθέσουμε τη μέθοδο του Gauss για την περίπτωση του κανονικου πενταγώνου. Στο μιγαδικό επίπεδο, το κανονικό n-γωνο παρίσταται από τις n-οστές ρίζες της μονάδας, δηλαδή από τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^n - 1 = 0.$$

Τούτες οι ρίζες είναι οι

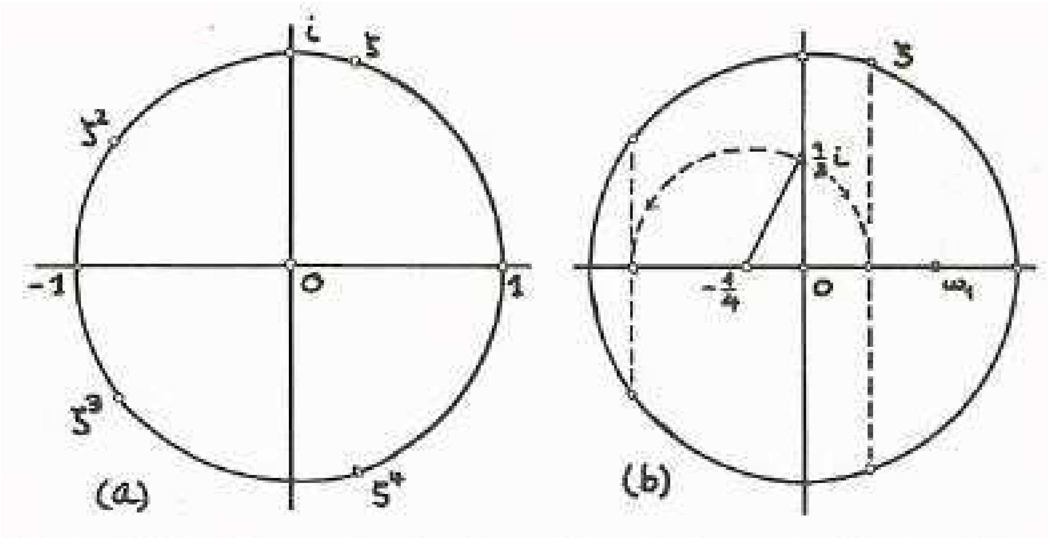
$$\zeta_k = \cos\frac{2\pi}{k} + \sin\frac{2\pi}{k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

[2] Disquisitiones Arithmeticae, Αριθμητικές Έρευνες, 1801.

[3] Σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss το κανονικό εννεάγωνο δεν είναι κατασκευάσιμο, πράγμα που δείχνει ότι η μέθοδος της νεύσης είναι ισχυρότερη από αυτή του κανόνα και του διαβήτη.

και επίσης ισχύει ότι αν $\zeta_1 = \zeta$ τότε $\zeta_k = \zeta^k$, $k = 2, \ldots, n$. Μολαταύτα, ο παραπάνω τύπος δεν βοηθά. Για την περίπτωση του πενταγώνου (Σχήμα 10.3) θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$



Σχήμα 10.3: Η μέθοδος του Gauss για το κανονικό πεντάγωνο.

Ο πρώτος παράγοντας δίδει την λύση $\zeta_1 = 1$ και δεν έχει άλλο ενδιαφέρον πλην του ότι σταθεροποιεί την θέση του πενταγώνου στον μοναδιαίο κύκλο. Επειδή όλες οι λύσεις είναι μη μηδενικές, διαιρούμε τον δεύτερο παράγοντα με z^2 και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ &= z^2 + 2 + z^{-2} + z + z^{-1} - 1 \\ &= (z + z^{-1})^2 + (z + z^{-1}) - 1. \end{aligned}$$

Με αυτό το μικρό τέχνασμα, θέτουμε $w = z + z^{-1}$ και καταλήγουμε στην τετραγωνική εξίσωση

$$w^2 + w - 1 = 0, \text{ που έχει λύσεις τις } \quad w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Άρα λοιπόν, οι πέμπτες ρίζες της μονάδας που είναι διαφορετικές του 1, ικανοποιούν τις

$$z + z^{-1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

Αν ζ είναι μία πέμπτη ρίζα της μονάδας διαφορετική του 1, τότε το ίδιο ισχύει για την ζ^2 και οι παραπάνω εξισώσεις δίδουν

$$\Re(\zeta) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \Re(\zeta^2) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

τα οποία είναι κατασκευάσιμα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10.3 (b): Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα 0, (κέντρο του κύκλου), $i/2$, $(-1)/4$ (κατασκευάσιμα). Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, η ακτίνα του είναι $\sqrt{5}/2$. Με κέντρο το $(-1)/4$ και με αυτή την ακτίνα, φέρεται κύκλος που τέμνει τον πραγματικό άξονα (τη διάμετρο του κύκλου που ορίζεται από τα $0, 1)$ στα σημεία $\Re(\zeta)$ και $\Re(\zeta^2)$.

Απομένει να προσδιοριστεί το φανταστικό μέρος y του $\zeta = x + iy$. Επειδή $x^2 + y^2 = 1$, παίρνουμε

$$y_1 = \Im(\zeta) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}, \quad y_2 = \Im(\zeta^2) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}.$$

Άρα η πλευρά f του κανονικού πενταγώνου και η διαγώνιος του d δίδονται από τις

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad d = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Η σύγκριση της εξίσωσης $w^2 + w - 1 = 0$ και αυτής που δίδεται στην δεύτερη ανάλυση του πενταγώνου, μας δίδει να καταλάβουμε ότι τούτη είναι η *αφηρημένη ουσία* του προβλήματος. Ο Gauss έφτασε εκεί ψάχνοντας το *γενικό* πρόβλημα και χρησιμοποιώντας το νέο εργαλείο των μιγαδικών· ο Ευκλείδης διαπραγματευόταν κάθε περίπτωση χωριστά. Η γενίκευση και η αφηρημένη διαπραγμάτευση έκαναν το πρόβλημα προσβάσιμο και την λύση διάφανη.