Κεφάλαιο 11

Στοιχείων Βιβλίο ε′: Η γενική θεωρία των αναλογιών

11.1 Οι αναλογίες έξω από τα μαθηματικά

Μία από τις κύριες ανακαλύψεις του Πυθαγόρα ήταν η σχέση μεταξύ των μουσικών αρμονικών και των λόγων των τμημάτων του μονοχόρδου· η απλούστερη ήταν 2:1 για την οκτάβα. Έχουν γραφεί πολλά για αυτό το θέμα.[1] Παρακάτω θα μιλήσουμε για την επιρροή τους στην αρχιτεκτονική και τις τέχνες.

Μέρος της γεωμετρικής ορολογίας έχει προέλθει από την οικοδομική τέχνη, όπου ήταν απαραίτητα τα ακριβή σχέδια. Γύρω στο 540 π.Χ. χτίστηκε ο ναός του Απόλλωνα στην Κόρινθο. Είναι ο παλαιότερος γνωστός ναός με καθαρή αναλογία

$$\text{μήκος} : \text{πλάτος} = \text{πλάτος} : \text{ύψος}.$$

Ο ναός του Διός στην Ολυμπία, χτισμένος γύρω στο 450 π.Χ. κυβερνάται από την αναλογία $1 : 2$. Ο ναός του Παρθενώνα, χτισμένος από τον Ικτίνο και τον Καλλικράτη στα 447-432 π.Χ. βρίθει από τον λόγο $9 : 4$, δηλαδή αυτόν των μικρότερων τετράγωνων αριθμών. Πράγματι είναι μεταξύ άλλων,

$$81 : 36 = \text{μήκος} : \text{πλάτος} = \text{πλάτος} : \text{ύψος} = 36 : 16.$$

Περίπου την ίδια εποχή, ο Πολύκειτος και ο Φειδείας, έγραψαν μία διατριβή για τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, με τίτλο *Κανών*, η οποία δυστυχώς χάθηκε. Ο Πλάτων στο *Σοφιστή* λέγει:

[1] Κοιτάξτε λ. χ. την ιστοσελίδα
http://www.musicheaven.gr/html/modules.php?name=News&file=article&sid=2190

Το τέλειο παράδειγμα (για την σημασία των αναλογιών) έγκειται στο ότι από αυτές, φτιάχνεται ένα αντίγραφο σύμμορφο με τις αναλογίες του πρωτοτύπου σε όλες τις τρεις διαστάσεις.

Ο Αριστοτέλης είχε τις αναλογίες σε μεγάλη εκτίμηση. Ακόμα και τη δικαιοσύνη την ορίζει σαν αναλογία στα *Ηθικά Νικομάχεια*.[2] Στο ίδιο βιβλίο ο Αριστοτέλης αναφέρει τις πιο τεχνικές διαδικασίες της εναλλαγής και της σύνθεσης του λόγου που θα εξηγηθούν παρακάτω στους Ορισμούς 12 και 14.

Κατά τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο,[3] οι αναλογίες είναι *ο ενοποιητικός δεσμός των μαθηματικών επιστημών*. Η επιδέξια χρήση των αναλογιών υπήρξε ένα κύριο εργαλείο των μαθηματικών έως την εποχή του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα που τις χρησιμοποίησαν με ανυπέρβλητο τρόπο.

Ίσως φαίνεται παράξενο, αλλά οι αναλογίες υπάρχουν και στην Καινή Διαθήκη. Το Κατά Ιωάννη Ευαγγέλιο ξεκινά ως εξής: *Εν αρχή ην ο Λόγος και ο Λόγος ην προς τον Θεόν και Θεός ην ο Λόγος. Ούτος ην αρχή προς τον Θεόν...*

11.2 Γενικά σχόλια περί του Βιβλίου ε′

Στο Βιβλίο ε′ δεν υπάρχουν διακριτές παράγραφοι. Έχει μόνο ένα αντικείμενο: την θεωρία των αναλογιών για γενικότερα μεγέθη. Ένα σχόλιο μας λέγει ότι τα θεωρήματα του Βιβλίο ε′ είναι του Εύδοξου του Κνίδιου και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τους ορισμούς. Τρία είναι τα σημεία που θα υπογραμμίσουμε:

1. Το Βιβλίο ε′ έχει τον πιο αφηρημένο χαρακτήρα από όλα τα άλλα βιβλία των Στοιχείων. Οι προτάσεις του εφαρμόζονται σε διάφορων ειδών μεγέθη όπως ευθείες, επιφάνειες, στερεά γωνίες, κ.λ.π. Λόγω του υψηλού επιπέδου των αφηρημένων ιδεών, το Βιβλίο ε′ είναι το πιο κοντινό στις πλατωνικές ιδέες.

[2]Βέβαια, οι απόψεις του για την κοινωνική δικαιοσύνη και την κατανομή των φόρων είναι αρκετά διαφορετικές από τις σύγχρονες: Η δικαιοσύνη είναι *μία κατανομή χρημάτων από το δημόσιο ταμείο, που ακολουθεί τον ίδιο λόγο με αυτόν που έχουν οι αντίστοιχες συνεισφορές (του καθενός πολίτη προς το δημόσιο ταμείο) μεταξύ τους.*

[3]($\sim 250 - 200$ π.Χ.) Υπήρξε βιβλιοθηκάριος της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Φίλος του Αρχιμήδη, διατηρούσε αλληλογραφία με αυτόν. Είναι γνωστός για το *κόσκινό* του, μία διαδικασία που δίδει τους πρώτους αριθμούς μέχρι ένα δοθέντα φυσικό n, και για την μέτρηση -με σφάλμα λίγων χιλιομέτρων- του Ισημερινού της Γης με την χρήση σφαιρικής τριγωνομετρίας.

2. Το Βιβλίο ε′ είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα βιβλία των Στοιχείων. Θα μπορούσε να είναι είτε μονογραφία, είτε εισαγωγή κάποιων 'Στοιχείων' γραμμένων από τη σχολή του Ευδόξου. Η θέση του εντός του έργου του Ευκλείδη, ανοίγει την πύλη της γεωμετρίας της ομοιότητας στο Βιβλίο στ′.

3. Οπωσδήποτε, η αφηρημένη θεώρηση των αναλογιών, δεν θα μπορούσε να αποτελέσει την πρώτη διαπραγμάτευσή τους από τους Έλληνες μαθηματικούς. Μπορεί μόνο να εικασθεί, ότι ο Λέων και ο Ιπποκράτης θα παρέθεταν διαφόρων ειδών θεωρήματα επάνω στις αναλογίες στα δικά τους *Στοιχεία.*

Υπάρχουν δύο διαφορετικά θέματα που θα μας απασχολήσουν στην περαιτέρω συζήτηση του Βιβλίου ε′. Το πρώτο έχει να κάνει με την αφηρημένη φύση και τα λεπτά σημεία του ορισμού των μεγεθών που 'είναι στον ίδιο λόγο'. Το δεύτερο είναι ευκολότερο· αφορά στην εξοικείωση μας με τον διαισθητικό χαρακτήρα των διαφόρων προτάσεων που διατυπώνονται με αφηρημένο τρόπο. Αυτό θα το επιτύχουμε με την χρήση της άλγεβρας. Θα ασχοληθούμε πρώτα με το δεύτερο θέμα.

11.3 Οι αναλογίες σε σύγχρονη εκδοχή

Στο εξής όλα τα γράμματα θα αναπαριστούν μήκη τμημάτων και θα τα μεταχειριζόμαστε σαν (θετικούς) πραγματικούς αριθμούς.

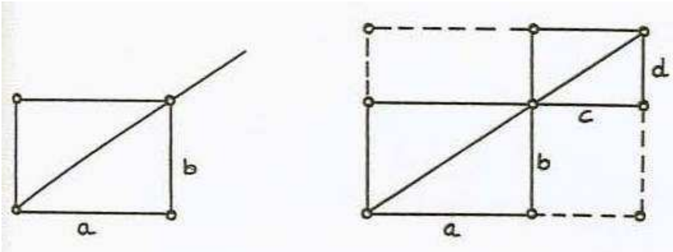
Αριθμητικά, μπορούμε να ορίσουμε ότι ο *λόγος* $a : b$ *του* a *προς το* b *είναι το κλάσμα* $\frac{a}{b}$ και έτσι

$$a : b = c : d \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Γεωμετρικά, και ακολουθώντας τον Ευκλείδη, αφήνουμε τον λόγο χωρίς ορισμό και απλώς τον αναπαριστούμε ως την *κλίση της διαγωνίου σε ένα ορθογώνιο πε πλευρές* a *και* b. Λέγουμε τότε ότι *τα* a, b *και* c, d *είναι στον ίδιο λόγο εάν είναι γύρω από την ίδια διαγώνιο* (Σχήμα 11.1.)

Βλέπουμε ότι το περίφημο Σχήμα της Πρότασης α′ 43 εμφανίζεται ξανά. Λόγω αυτής της Πρότασης έχουμε $ad = cb$. Λόγω και της Πρότασης ε′ 16 έχουμε επίσης $ad = cb$. Άρα, παίρνουμε αυτό που στο σχολείο μας μαθαίνουν ως 'χιαστί'

$$a : b = c : d \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$



Σχήμα 11.1: Ο γεωμετρικός ορισμός της ισότητας λόγων.

Ας δούμε λίγο την

Πρόταση ε′ 16.[4]

$$a : b = c : d \Leftrightarrow a : c = b : d.$$

Αριθμητική απόδειξη.

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Leftrightarrow ad = bc, \\ a : c = b : d &\Leftrightarrow ad = cb. \end{aligned}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού των αριθμών, έχουμε $bc = cb$ και προκύπτει το ζητούμενο. □

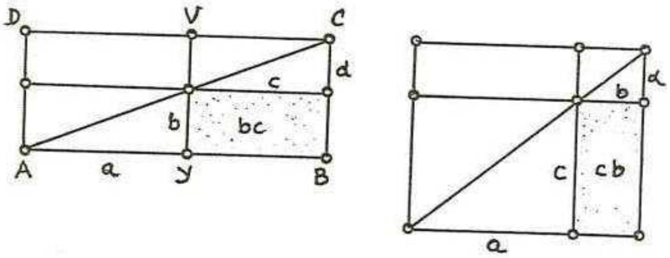
Στη σύγχρονη γεωμετρία, η μετάθετικότητα στον πολλαπλασιασμό των αριθμών είναι ισοδύναμη με την μεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων, πράγμα που θεσμοθετεί το ισχυρότερο γεωμετρικό αξώμα.[5] Έτσι, δεν είναι παράξενο που η ε′ 16 έχει σημαντικές εφαρμογές.

Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει ότι η ε′ 16 δεν είναι προφανής· λ.χ. το τμήμα b μπορεί να τοποθετηθεί με δύο τρόπους.

Ένα άλλο σημαντικό μέσο για τον χειρισμό των αναλογιών είναι η συνεπαγωγή *εξ ισότητας*:

[4]Θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την Πρόταση αυτή και ως εξής: *Η αναλογία παραμένει αναλλοίωτη από την εναλλαγή των μέσων της.*

[5]Θεώρημα του Πάππου.

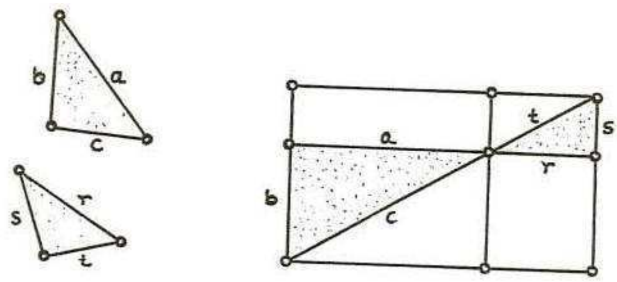


Σχήμα 11.2: Πρόταση ε΄ 16.

Πρόταση ε΄ 22.

$$\left.\begin{array}{c} a : b = r : s \\ \text{και} \\ b : c = s : t \end{array}\right\} \Rightarrow a : c = r : t.$$

Αριθμητικά, αυτό είναι απλούστατο. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και απαλείφουμε. Γεωμετρικά όμως, είναι πολύ πιο ενδιαφέρον. Έστω δύο όμοια τρίγωνα με πλευρές a, b, c και r, s, t. (Σχήμα 11.3.)



Σχήμα 11.3: Εξ ισότητος!.

Τα τρία ζεύγη των αντίστοιχων γωνιών είναι ίσα. Επειδή το άθροισμα των γωνιών είναι αναλλοίωτο, αρκεί η ισότητα δύο ζευγών. Αλλά ομοιότητα σημαίνει επίσης ότι οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών είναι ίσοι.[6] Η συνεπαγωγή εξ ισότητας μας λέγει ότι αρκούν να είναι ίσοι οι δύο λόγοι.

[6]Πρόταση στ΄ 4 και 5.

11.4 Οι ορισμοί του Βιβλίου ε΄

Ορισμοί

1. *Ένα μέγεθος είναι* **μέρος** *ενός μεγέθους, το μικρότερο του μεγαλύτερου, αν μετρά το μεγαλύτερο.*

2. *Το μεγαλύτερο είναι* **πολλαπλάσιο** *του μικρότερου, αν μετράται από το μικρότερο.*

Ο Ευκλείδης δεν καθορίζει τι είναι το μέγεθος, και ορίζει το 'μέρος ' και το 'πολλαπλάσιο από τη 'μέτρηση' η οποία επίσης δεν ορίζεται. Στις Προτάσεις ε΄ 1-6 αναπτύσσει τις ιδιότητες της 'μέτρησης ' ή του πολλαπλασιασμού ενός μεγέθους a με ένα φυσικό αριθμό n έτσι ώστε να πάρει τον na.

3. *Ένας* **λόγος** *είναι ενός είδους σχέση μεταξύ δύο ομογενών μεγεθών που αφορά το πηλίκο τους.*

Πάλι, ο λόγος φαίνεται να είναι τόσο θεμελιώδης για τον Ευκλείδη, όπως και τα σύνολα για ένα σύγχρονο μαθηματικό. Το τι σημαίνει 'ομογενή μεγέθη' προκύπτει από συγκεκριμένα παραδείγματα και γίνεται πιο συγκεκριμένος στον επόμενο ορισμό. Οι γωνίες είναι ομογενή μεγέθη· το ίδιο και οι ευθείες, τα εμβαδά κ.λ.π. Το 'πηλίκο' έχει να κάνει με μία γραμμική διάταξη των ομογενών μεγεθών, και πίσω από τον Ορισμό 3 κρύβεται ένα αξίωμα ότι η διάταξη είναι Αρχιμήδεια. Αυτό σημαίνει ότι τα απειροστά μεγέθη όπως οι κερατοειδείς γωνίες εξαιρούνται. [7] Σε σύγχρονη γλώσσα, ο παρακάτω Ορισμός 4 μεταφράζεται ως εξής: Ο λόγος $a : b$ υπάρχει εάν υπάρχουν αριθμοί n, m τέτοιοι ώστε $na > b$ και $mb > a$.

4. *(Δύο) Μεγέθη λέγεται ότι* **έχουν λόγο** *το ένα προς το άλλο, εάν είναι δυνατό όταν πολλαπλασιαστούν*[8] *να υπερβούν το ένα το άλλο.*

5. *Μεγέθη λέγεται ότι* **είναι στον ίδιο λόγο***, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν οποιαδήποτε ισοπολαπλάσια και αν ληφθούν του πρώτου και του τρίτου είναι αντίστοιχα ίσα με γαλύτερα, ή μικρότερα από οποιαδήποτε ισοπολαπλάσια και αν ληφθούν του τρίτου και του τέταρτου, καθ΄ οιονδήποτε τρόπο και αν γίνει ο πολλαπλασιασμός αυτός.*

6. *Μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο, καλούνται* **ανάλογα***.*

Ο Ορισμός 5 είναι κεντρικός για το Βιβλίο ε΄. Ας δούμε τι λέγει αλγεβρικά:

---

[7] Με άλλα λόγια, λόγοι όπως $\frac{0}{0}$ εξαιρούνται.

[8] Το καθένα με κάποιο φυσικό αριθμό.

Έστω a, b, c, d τέσσερα μεγέθη και m, n φυσικοί αριθμοί. Τότε είναι $a : b = c : d$ αν για κάθε m, n

$$\begin{aligned} na > mb \;&\Leftrightarrow\; nc > md, \\ na = mb \;&\Leftrightarrow\; nc = md, \\ na < mb \;&\Leftrightarrow\; nc < md. \end{aligned}$$

Ας πάμε ένα βήμα παρακάτω και ας το συνδέσουμε αυτό με τη σύγχρονη θεωρία των πραγματικών αριθμών. Ας είναι $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} a : b \;&=\; ab^{-1} \;=\; x, \\ c : d \;&=\; cd^{-1} \;=\; y. \end{aligned}$$

Τότε, για την πρώτη από τις τρεις σχέσεις του ορισμού έχουμε,

$$\begin{aligned} &na > mb \;\Leftrightarrow\; nc > md, \\ &a > \frac{m}{n}b \;\Leftrightarrow\; c > \frac{m}{n}d, \\ &x = ab^{-1} > \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; y = cd^{-1} > \frac{m}{n} \text{ για κάθε ρητό } r = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Στη γλώσσα των συνόλων αυτό μας λέγει ότι οι θετικοί αριθμοί x, y ορίζονται να είναι ίσοι εάν το σύνολο όλων των ρητών $r < x$ είναι ίσο με το σύνολο όλων των ρητών $r < y$. Έτσι, ισότητα θετικών αριθμών ορίζεται ως ισότητα συνόλων. Τούτο ομοιάζει με την κατασκευή του Dedekind των πραγματικών, με μία ουσιώδη διαφορά: Ο Ευκλείδης ξεκινά πάντοτε από δοθέντα μεγέθη, ενώ ο Dedekind αγνοεί την εκ των προτέρων ύπαρξη (κάποιων) πραγματικών αριθμών και με σημείο εκκίνησης τους ρητούς *δημιουργεί*[9] τους πραγματικούς.

11.5 Οι Προτάσεις του Βιβλίου ε′

Οι πρώτες έξι προτάσεις του Βιβλίου ε′ θεωρούν πολλαπλάσια μεγεθών. Είναι προκαταρκτικές για τα κύρια θεωρήματα περί λόγων και αναλογιών. Σε σύγχρονη γλώσσα, για μεγέθη a, b, c, d και φυσικους αριθμούς m, n, r, s:

1. $n(a + b) = na + nb$,

[9] Η φιλοσοφία την οποία ασπαζόταν ο Dedekind δεν είχε καμμία σχέση με την πλατωνική. Κατά τον Πλάτωνα, όλα είναι ήδη δημιουργημένα, και εμείς απλώς τα ανακαλύπτουμε.

2. $(n+m)a = na + ma$,
3. $n(ma) = (nm)a$,
4. $a : b = c : d \Rightarrow (ra) : (sb) = (rc) : (sd)$,
5. $r(a - b) = ra - rb$, (αν $a > b$),
6. $(r - s)a = ra - sa$, (αν $r > s$).

Τα παραπάνω αποτελούν κάποια από τα σύγχρονα αξιώματα των διανυσματικών χώρων. Τα μεγέθη παίζουν το ρόλο των διανυσμάτων και οι φυσικοί των πραγματικών. Η εννοιολογική διαφορά μεταξύ αριθμών και διανυσμάτων εξηγεί μερικώς γιατί ο Ευκλείδης δεν εφαρμόζει αυτή την αφηρημένη θεωρία στο Βιβλίο στ΄ όπου ξεκινά από την αρχή τις αναλογίες *για τους αριθμούς*. Η δυσκολία είναι η ίδια με το να περιγραφεί το $\mathbb{R}$ ως ο διανυσματικός χώρος όπου τα στοιχεία του είναι ταυτόγχρονα αριθμοί και διανύσματα. Στις Προτάσεις στ΄ 7-11 οι λόγοι χειρίζονται σαν μαθηματικά αντικείμενα, αλλά ο Ευκλείδης *ποτέ* δεν θεωρεί ένα λόγο ως ένα ρητό αριθμό.

Προτάσεις ε΄ 7/9.

$$\begin{aligned} a = b &\Leftrightarrow a : c = b : c. \\ c = d &\Leftrightarrow a : c = a : d. \end{aligned}$$

Προτάσεις ε΄ 8/10.

$$a > b \Leftrightarrow a : c > b : c.$$

Πρόταση ε΄ 11.

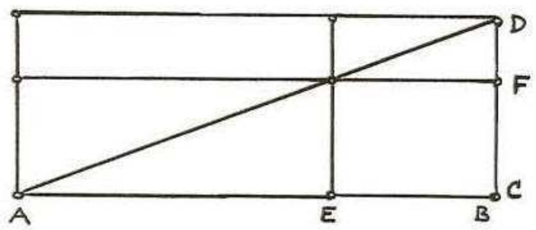
Η ισότητα των λόγων είναι μεταβατική.

Οι Προτάσεις ε΄ 12–25 είναι περί του χειρισμού των αναλογιών· είδαμε μερικά παραδείγματα στην προηγούμενη παράγραφο. Οι αποδείξεις μερικές φορές είναι ιδιαίτερα τεχνικές. Για να πάρουμε μία γεύση θα δούμε τις Προτάσεις ε΄ 17 και 19, ξεκινώντας από την

Πρόταση ε΄ 19.

Εάν ένα όλο είναι ως προς ένα όλο όπως ένα αφαιρεθέν τμήμα είναι ως προς ένα αφαιρεθέν τμήμα, το υπόλοιπο θα είναι προς το υπόλοιπο όπως το όλο προς το όλο.

Με την γεωμετρική θεώρηση το καταλαβαίνουμε αμέσως:[10]



Σχήμα 11.4: Γεωμετρική ερμηνεία της Πρότασης ε΄ 19.

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την γλώσσα των τμημάτων: έστω AB το όλο μέγεθος και τμήμα AE αφαιρείται με υπόλοιπο $EB\ldots$ τότε

$$AB : CD = BE : DF \Rightarrow EB : FD = AB : CD.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιεί τις ε΄ 11, 16 (εναλλαγή) και 17 αλλά όχι τον Ορισμό 5 αναλυτικά. Αυτό το κάνει στην

Πρόταση ε΄ 17.

Εάν μεγέθη είναι ανάλογα συντιθέμενα, τότε είναι και ανάλογα χωριζόμενα.[11]

Πάλι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την γλώσσα των τμημάτων και το σχήμα
Με τον συμβολισμό του σχήματος έχουμε $AE+EB = AB$ και $CF+FD = CD$. Ο ισχυρισμός είναι

$$AE : BE = CD : DF \Rightarrow AE : EB = CF : FD.$$

[10] Παραλλαγή αυτής της Πρότασης είναι η ε΄ 26.

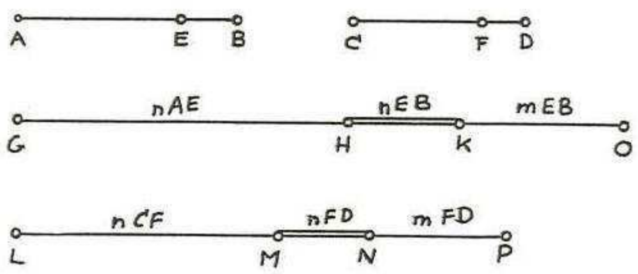
[11] Μεταφράζουμε το *συγκείμενα* και το *διαιρεθέντα* του Ευκλείδη σε συντιθέμενα και χωριζόμενα αντίστοιχα. Αυτή η μετάφραση είναι ακριβώς στο πνεύμα του Heath που χρησιμοποιεί τις λατινικές λέξεις composendo και separendo αντίστοιχα.

Απόδειξη.

Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Ευκλείδη στη σύγχρονη γλώσσα. Πρέπει να ελέγξουμε τον Ορισμό 5 για τα AE, EB, CF, DF δηλαδή

$$nAE > mEB \;\Rightarrow\; nCF > mFD, \text{ και όμοια για τα } <, = . \tag{11.1}$$

Ως ένα είδος γέφυρας μεταξύ των παραπάνω μεγεθών, ο Ευκλείδης εισάγει τα nEB, nFD.



Σχήμα 11.5: Απόδειξη της Πρότασης ε′ 17: οι γέφυρες.

Στο Βήμα 1 της απόδειξης χρησιμοποιεί τις ε′ 1,2 για να δείξει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} nAE + nEB &= nAB \\ mEB + nEB &= (m+n)EB \\ nCF + nFD &= nCD \\ mFD + nFD &= (m+n)FD. \end{aligned}$$

Στο Βήμα 2, δια μέσου της υπόθεσης

$$AB : BE = CD : DF,$$

των παραπάνω πολλαπλασίων και του Ορισμού 5 παίρνει

$$nAB > (n+m)EB \Rightarrow nCD > (n+m)FD \tag{11.2}$$

και όμοια για τα $=$ και $<$.

Βήμα 3. Γράφουμε τη σχέση 11.1 ως $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ και έστω επίσης

$$\mathcal{C} : nAB > (n+m)EB.$$

Τα nEB αφαιρούνται από τα δ΄ψο μέλη και προκύπτει η

$$\mathcal{A} : nAE > mEB.$$

Βήμα 4. Πάλι από την $\mathcal{C}$ έπεται χρησιμοποιώντας την 11.2 ότι

$$nCD > (n+m)FD.$$

Τα nCD αφαιρούντα από τα δύο μέλη και προκύπτει η

$$\mathcal{B} : nCF > mFD.$$

Βήμα 5. Από το Βήμα 3 είναι $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ και από το Βήμα 4 είναι $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$. Άρα λέγει ο Ευκλείδης, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. □

Το εμφανές λογικό λάθος στο Βήμα 5 της απόδειξης δεν είναι σοβαρό και διορθώνεται ως εξής: Στο Βήμα 3, ξεκινάμε από την $\mathcal{A}$ και δείχνουμε την $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$. Από το Βήμα 4 είναι $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$, άρα $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Πέραν τούτου, η απόδειξη είναι αυστηρή. Υπάρχει ο Ορισμός που πρέπει να ελεγχθεί, και συμπεράσματα 'εκ του σχήματος ' δεν επιτρέπονται. Επίσης, έχει μία διαισθητική, ή δημιουργική συνιστώσα. Σίγουρα ο ορισμός πρέπει να ελεγχθεί. Αλλά πώς; Σε αυτό το σημείο η ιδέα να χρησιμοποιηθούν τα δύο τμήματα γέφυρες $HK = nEB$ και $MN = nFD$ οδηγεί στη λύση. Κάποιος ενδεχομένως να μπορεί να κάνει κάποιου είδους ανάλυση αυτής της ιδέας, όμως γενικά, δεν υπάρχει συγκεκριμένη διαδικασία που να βοηθά. Η λογική και η δημιουργική συνιστώσα διαπλέκονται εδώ σε μία καλή μαθηματική απόδειξη.