Κεφάλαιο 12

Στοιχείων Βιβλίο στ′: Ομοιότητα

12.1 Τα περιεχόμενα του Βιβλίου στ′

Ορισμοί	Ορισμοί της ομοιότητας ευθυγράμμων σχημάτων.
Πρόταση 1	Το βασικό θεώρημα.
Προτάσεις 2–8	Α: Ομοιότητα τριγώνων.
Προτάσεις 9–13	Β: Ανάλογη διαίρεση τμημάτων.
Προτάσεις 14–17	Γ: Αναλογίες και εμβαδά.

Προτάσεις 18–22	Δ: Όμοια ευθύγραμμα σχήματα.
Πρόταση 23	Σύνθετοι λόγοι.
Προτάσεις 24–30	Ε: Η εφαρμογή των εμβαδών.
Προτάσεις 31–31	Διάφορα.

12.2 Ορισμοί

1. Όμοια σχήματα είναι αυτά που έχουν τις γωνίες αντίστοιχα ίσες και τις *περί*[1] τις ίσες γωνίες αντίστοιχες πλευρές ανάλογες.

2. Μία ευθεία λέγεται ότι τέμνεται σε άκρο και μέσο λόγο όταν όλη προς το μεγαλύτερο τμήμα είναι ίση με το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο.[2]

3. Ύψος παντός σχήματος είναι η αγόμενη από την κορυφή κάθετος προς τη βάση.[3]

[1] Ο Ευκλείδης δεν λέγει ότι οι αντίστοιχες πλευρές είναι αυτές που υποτείνονται από τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.

[2] Και πάλι η χρυσή τομή. Αν a είναι το όλο μήκος και x το μεγαλύτερο τμήμα, έχουμε

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Η θετική λύση της εξίσωσης αυτής (για $a = 1$) είναι ο αριθμός του Fibonacci

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

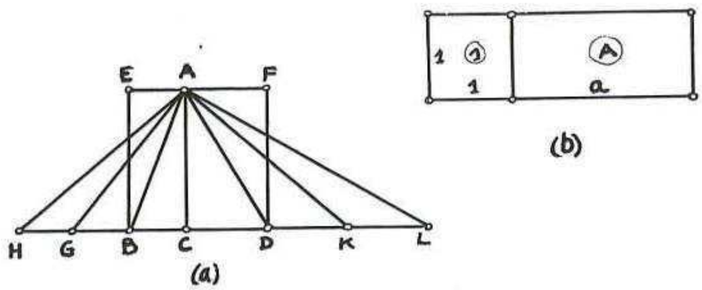
[3] Ο Αριστοτέλης δεν χρησιμοποιεί τον όρο, αλλά προτιμά το *κάθετος*.

12.3 Η βάση της γεωμετρίας της ομοιότητας

Το βασικό θεώρημα του Βιβλίου στ′ δείχνει αρκετά αθώο, αλλά είναι το θεμέλιο της Ευκλείδειας γεωμετρίας της ομοιότητας.

Πρόταση στ′ 1.

Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που είναι κάτω από το ίδιο ύψος είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους.[4]



Σχήμα 12.1: (a) Πρόταση στ′ 1. (b) Ο ορισμός του εμβαδού.

Έστω $\triangle_1 = \triangle ABC$ και $\triangle_2 = \triangle ACD$ δύο τρίγωνα κάτω από το ίδιο ύψος. (Σχήμα 12.1 (a)). Τότε

$$\text{Εμβαδόν } \triangle ABC : \text{Εμβαδόν } \triangle ACD = \text{Μήκος } BC : \text{Μήκος } CD.$$

Για την απόδειξη πρέπει να βεβαιωθεί ο ορισμός 5 του βιβλίου ε′. Αν $HC = nBC$ τότε το $\triangle HCA$ θα έχει εμβαδόν $n(\text{Εμβαδόν}\triangle BCA)$. Το ίδιο επιχείρημα χρησιμοποιείται για τα CD και το $\triangle CDA$. Άρα,

$$nBC > mCD \Rightarrow n\ (\text{Εμβαδόν } \triangle BCA) > m\ (\text{Εμβαδόν } \triangle CDA), \quad \text{κλπ.}$$

Σχόλιο. Το κύριο στην Πρόταση αυτή είναι ότι συνδέει μεγέθη διαφορετικού είδους: εμβαδά και μήκη. Ας χρησιμοποιήσουμε προς στιγμή σύγχρονη

[4]Ώς συνήθως, λέγοντας ‘τρίγωνα’ και ‘παραλληλόγραμμα’ ο Ευθκλείδης εννοεί τα εμβαδά τους.

ορολογία. Έστω $a = BC$ και $b = CD$ οι βάσεις των τριγώνων με κοινό ύψος h. Τότε

$$\triangle_1 = \frac{1}{2}ah, \quad \text{και} \quad \triangle_2 = \frac{1}{2}bh$$

και η συνεπαγωγή $\triangle_1 : \triangle_2 = a : b$ είναι προφανής.

Υπάρχει όμως ένα πολύ λεπτό σημείο και στη σύγχρονη παρουσίαση της γεωμετρίας και σε αυτή των Στοιχείων. Ο πιο πάνω τύπος προκύπτει από την Πρόταση στ΄ 1 αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει!

Γιατί όμως; Λόγω της Πρότασης α΄ 41 ο τύπος για το εμβαδόν του τριγώνου προκύπτει αμέσως από τον τύπο για το εμβαδόν του ορθογωνίου. Περιοριζόμαστε λοιπόν στα ορθογώνια· ας είναι ορθογώνιο μήκους a και ύψους 1. Αντιμετωπίζουμε τώρα το εξής ερώτημα: Τι σημαίνει να μετράμε ένα ορθογώνιο (ή τι σημαίνει να μετράμε ένα τμήμα); Κάποιος σταθεροποιεί ένα μοναδιαίο τμήμα OE και ψάχνει για ένα πραγματικό a τέτοιον ώστε $AB = aOE$ δηλαδή

$$AB : OE = a : 1.$$

Είδαμε πως αυτό συνδέεται με τη θεωρία των πραγματικών αριθμών στη συζήτηση του Ορισμού 5 του Βιβλίου ε΄. Η Πρόταση στ΄ 1 κάνει ένα βήμα παραπάνω. Σταθεροποιώντας το OE σημαίνει ότι σταθεροποιείται το μοναδιαίο τετράγωνο στο οποίο αντιστοιχεί εμβάδόν (μέτρου) 1. Μέτρηση ορθογωνίου σημαίνει μέτρησή του ως πολλαπλάσιο του μοναδιαίου τετραγώνου.[5] Οι δυσκολίες στην στ΄ 1 προκύπτουν από τα άρρητα τμήματα. Ως συνήθως, ο Ευκλείδης σιωπά περί αυτού–ούτε καν έχει αναφέρει την έννοια μέχρι στιγμής. Στο Σχήμα 12.1 (b) βλέπουμε πως ένα άρρητο τμήμα a, λαμβανόμενο ως όριο κλασμάτων m/n, οδηγεί στο ίδιο πολλαπλάσιο A του μοναδιαίου τετραγώνου.

12.4 Τα βασικά θεωρήματα της γεωμετρίας της ομοιότητας

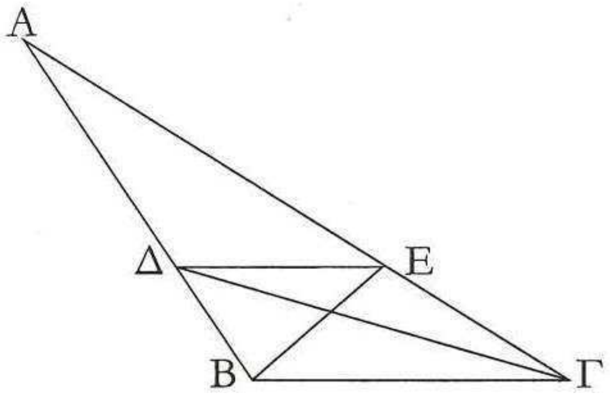
Το θεμελιώδες θεώρημα στ΄ 1 χρησιμοποιείται άμεσα για την απόδειξη του θεωρήματος των αναλόγων τμημάτων που είναι το καθολικό εργαλείο στη γεωμετρία της ομοιότητας.

[5] Δηλαδή, νέτρηση των πλευρών σημαίνει το πέρασμα από το 2–διάστατο μέτρο στο 1–διάστατο μέτρο. Η Πρόταση στ΄ 1 με άλλα λόγια είναι ο πρώτος αξιοσημείωτος πρόλογος κατασκευής μέτρων γινομένων στη θεωρία μέτρου.

Πρόταση στʹ 2.

Εάν σε τρίγωνο αχθεί ευθεία παράλληλη με μία από τις πλευρές του, τότε τέμνει ανάλογα τις άλλες πλευρές. Και εάν οι πλευρές του τριγώνου τμηθούν ανάλογα, η ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής είναι παράλληλη με τη λοιπή πλευρά.

Διότι ας έχει αχθεί παράλληλη η ΔΕ στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ· λέγω ότι η ΒΔ προς τη ΔΑ είναι όπως η ΓΕ προς την ΕΑ.



Σχήμα 12.2: Πρόταση στʹ 2.

Απόδειξη.

Ας έχουν συνδεθεί οι ΒΕ, ΓΔ.

($\Rightarrow$) Άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΓΔΕ. Διότι έχουν την ίδια βάση ΔΕ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.[6]

Και το ΑΔΕ είναι ένα άλλο τρίγωνο. Τα ίσα μεγέθη έχουν πρός το ίδιο μέγεθος τον ίδιο λόγο.[7] Άρα, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι προς το ΑΔΕ όπως το ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ.

Αλλά το τρίγωνο ΒΔΕ είναι προς το τρίγωνο ΑΔΕ όπως η ΒΔ προς την ΔΑ, διότι βρίσκονται κάτω από το ίδιο ύψος, που άγεται από το Ε κάθετα στην ΑΒ· είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους. [8] Για τους ίδιους λόγους,

[6] Πρόταση αʹ 38.
[7] Πρόταση εʹ 7.
[8] Πρόταση στʹ 1.

το τρίγωνο ΓΔΕ είναι προς το ΑΔΕ όπως η ΓΕ προς την ΕΑ, και άρα όπως η ΒΔ προς την ΔΑ είναι και η ΓΕ προς την ΕΑ. [9]

($\Leftarrow$) Έστω ότι έχουν τμηθεί οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, ΑΒ και ΑΓ σε ανάλογα μέρη στο Δ, δηλαδή η ΒΔ προς την ΔΑ είναι όπως η ΓΕ προς την ΑΕ, και ας έχει συνδεθεί η ΔΕ. Λέγω ότι η ΔΕ είναι παράλληλη με την ΒΓ.

Συνεχίζουμε με σύγχρονη ορολογία για ευκολία: Είναι

$$\triangle \mathrm{B}\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta : \Delta\mathrm{A}, \quad \triangle \Gamma\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{E} : \mathrm{EA}$$

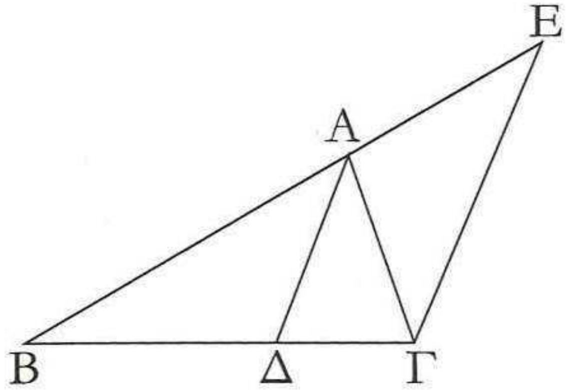
από την στ΄ 1. Άρα

$$\triangle \mathrm{B}\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \triangle \Gamma\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E}.$$

Όμως τότε[10]

$$\triangle \Gamma\Delta\mathrm{E} = \triangle \mathrm{B}\Delta\mathrm{E}$$

και τα τρίγωνα είναι στην ίδια βάση. Άρα,[11] $\Delta\mathrm{E} \| \mathrm{B}\Gamma$. □



Σχήμα 12.3: Πρόταση στ΄ 3.

Η παρακάτω είναι γνωστή και ως θεώρημα της διχοτόμου (Σχήμα 12.3):

Πρόταση στ΄ 3.

---

[9] Πρόταση ε΄ 11.
[10] Πρόταση ε΄ 9.
[11] Πρόταση α΄ 39.

Εάν διχοτομηθεί γωνία τριγώνου και η τέμνουσα την γωνία τέμνει και τη βάση, τα τμήματα της βάσης θα έχουν τον ίδιο λόγο με αυτόν των λοιπών πλευρών του τριγώνου. Και εάν τα τμήματα της βάσης έχουν τον ίδιο λόγο με αυτόν των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η ευθεία από την κορυφή πρός την τομή διχοτομεί την γωνία του τριγώνου.

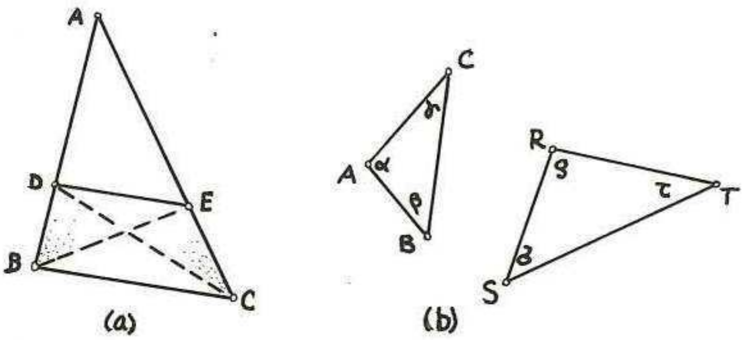
Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Φέρεται η ΕΓ‖ΑΔ. Άρα ∠ΑΓΕ=∠ΓΑΔ=∠ΒΑΔ=∠ΑΕΓ και ΑΓ=ΑΕ. Άρα,

$$\mathrm{B}\Delta : \Delta\Gamma = \mathrm{AB} : \mathrm{AE} = \mathrm{AB} : \mathrm{A}\Gamma.$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται παρόμοια. □

Προτάσεις 4/5.



Σχήμα 12.4: Προτάσεις στ΄ 4/5.

Οι Προτάσεις 4/5 συνοψίζονται στο παρακάτω συμπέρασμα. Έστω δύο τρίγωνα με πλευρές a, b, c και r, s, t και με γωνίες α, β, γ και ρ, σ, τ αντίστοιχα. Τότε

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \rho\\ \beta = \sigma\\ \gamma = \tau\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b : c = s : t\\ c : a = t : r.\\ a : b = r : s\end{array}\right.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι *εξ΄ ισότητος* κάποια από τις τρεις σχέσεις μπορεί να παραληφθεί.

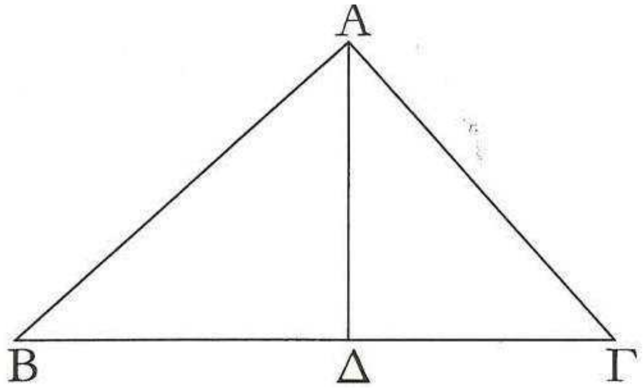
Προκύπτει ότι το σχήμα (όπως εκφράζεται με τις γωνίες) εκφράζεται μέσω αναλογιών. Στην εποχή που τα άρρητα τμήματα ήταν άγνωστα, οι λόγοι των τμημάτων εκφράζονταν με αριθμούς, και συνεπώς τα σχήματα των τριγώνων–αλλά και των σχημάτων που αποτελούνται από τρίγωνα–μπορούν να περιγραφούν με αριθμούς.[12] Όμως τα Στοιχεία δεν κάνουν μεταφυσική...

Οι Προτάσεις 4/5 είναι το πρώτο κριτήριο ομοιότητας. Οι Προτάσεις 6/7 είναι το δεύτερο κριτήριο ομοιότητας.

Προτάσεις 6/7.

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \rho \\ b : c = s : t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta = \sigma \\ c : a = t : r \end{matrix}\right. .$$

Το παρακάτω είναι γνωστό και ως Θεώρημα του Ευδόξου.



Σχήμα 12.5: Πρόταση στ΄ 8: Θεώρημα του Ευδόξου.

Πρόταση στ΄ 8

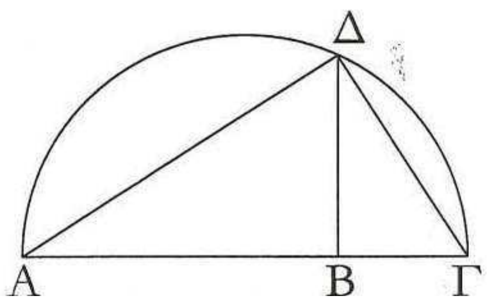
Εάν σε ορθογώνιο τρίγωνο αχθεί κάθετος από την ορθή γωνία προς τη βάση, τα τρίγωνα γύρω από την κάθετο είναι και τα δύο όμοια προς το όλο τρίγωνο και μεταξύ τους.

Η απόδειξη είναι άμεση μέσω των κριτηρίων ομοιότητας. Μία άμεση συνέπεια της Πρότασης στ΄ 8 είναι η Πρόταση στ΄ 13 για το πως βρίσκουμε τον μέσο ανάλογο δύο τμημάτων.

Πρόταση στ΄ 13.

Να βρεθεί ο μέσος ανάλογος δύο δοθέντων τμημάτων.

[12] Πυθαγόρας: τα πάντα είναι αριθμός.



Σχήμα 12.6: Πρόταση στ′ 13: Εύρεση του μέσου αναλόγου.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τα ΑΒ, ΒΓ σε μία ευθεία και φέρουμε το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΓ. Έστω η ΒΔ κάθετη στην ΑΓ στο Δ. Επειδή η γωνία ΑΔΓ είναι ορθή έχουμε τα όμοια τρίγωνα της στ′ 8. Άρα

$$\mathrm{AB} : \mathrm{B}\Delta = \mathrm{B}\Delta : \mathrm{A}\Gamma.$$

□

Ας παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο πως ο τετραγωνισμός τετραπλεύρου της Πρότασης β′ 14 προκύπτει από την Πρόταση στ′ 13. Αν ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο, τότε βρίσκουμε τους μέσους ανάλογους κάθε δύο διαδοχικών πλευρών και πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις σύμφωνα με τις Προτάσεις ε′ 16/17.[13]

Οι υπόλοιπες προτάσεις του Μέρους Β του Βιβλίου στ′ δείχνουν πως τέμνουμε τμήμα όμοια με δοθέν τετμημένο τμήμα και πως βρίσκουμε τον τρίτο και τον τέταρτο ανάλογο σε δοθέντα τμήματα.

[13]Ο Αριστοτέλης ήξερε και τις δύο αποδείξεις. Λέγει στο *Περί Ψυχής:*

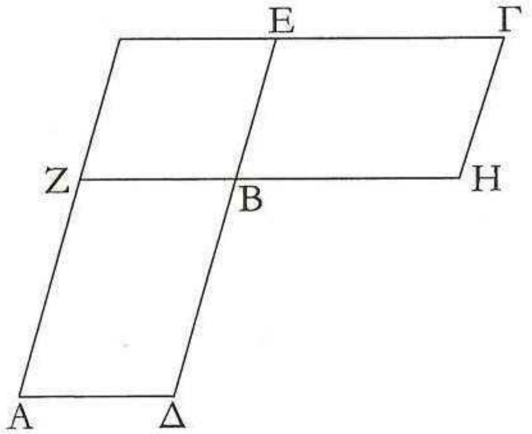
Για παράδειγμα, τι είναι ο ‘τετραγωνισμός ’; Η κατασκευή ενός τετραγώνου ίσου (σε εμβαδόν) με δοθέν ορθογώνιο. Ένας τέτοιος ορισμός είναι η παράθεση του συμπεράσματος, ενώ, εάν πείτε ότι ο τετραγωνισμός είναι η εύρεση του μέσου αναλόγου, δηλώνετε την αιτία του πράγματος που ορίστηκε.

12.5 Βιβλίο στ΄, Μέρος Γ: Αναλογίες και εμβαδά

Το κύριο θεώρημα του μέρους Γ είναι η Πρόταση στ΄ 16. Ο Ευκλείδης, όπως ένας σύγχρονος συγγραφέας, βάζει τα τεχνικά μέρη της απόδειξης σε ένα λήμμα (Πρόταση στ΄ 14) και προσθέτει κάποια συμπληρώματα (Προτάσεις στ΄ 15 και 17). Το 'Σχήμα' της α΄ 43 επανεμφανίζεται. Το Μέρος Γ δεν εξαρτάται από τα πρώτα δύο μέρη του Βιβλίου στ΄. Για την απόδειξη ο Ευκλείδης επιστρέφει στις ρίζες της στ΄ 1. Παραθέτουμε τις στ΄ 14 και 16 και σκιαγραφούμε την απόδειξη.

Πρόταση στ΄ 14

Σε ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές γύρω από τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· και ισογώνια παραλληλόγραμμα στα οποία οι πλευρές γύρω από τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες είναι ίσα.



Σχήμα 12.7: Πρόταση στ΄ 14.

Απόδειξη.

Τοποθετούνται τα παραλληλόγραμμα έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Ε και Ζ, Β, Η να είναι συνευθειακά. Παρατηρείστε στο Σχήμα 12.7 ότι υπάρχει ένα 'αόρατο' παραλληλόγραμμο.

(⇒) Έστω ότι τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα. Δηλώνοντας τα εμβαδά με παρενθέσεις προκύπτει

$$(\mathrm{A\Delta BZ}) = (\mathrm{BH\Gamma E}) \;\Rightarrow\; (\mathrm{A\Delta BZ}) : (\mathrm{ZE}) = (\mathrm{BH\Gamma E}) : (\mathrm{ZE})$$

όπου ZE (με τον γνωστό Ευκλείδειο συμβολισμό είναι το πάνω αριστερά παραλληλόγραμμο. Χρησιμοποιούμε τώρα την στ΄ 1

$$(\mathrm{A\Delta BZ}) : (\mathrm{ZE}) = \mathrm{\Delta B} : \mathrm{BE},$$
$$(\mathrm{BH\Gamma E}) : (\mathrm{ZE}) = \mathrm{\Gamma B} : \mathrm{BH}.$$

Άρα

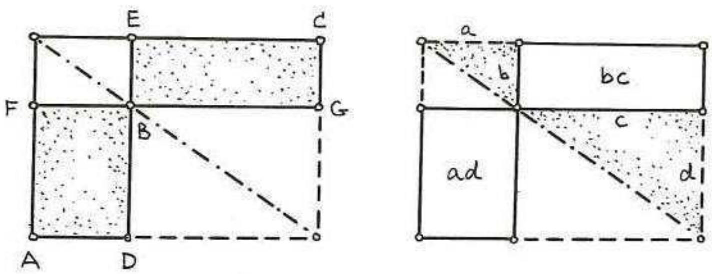
$$\mathrm{\Delta B} : \mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma B} : \mathrm{BH},$$

και οι πλευρές είναι αντιστρόφως ανάλογες.

($\Leftarrow$) Αντιστρέφουμε τα βήματα του προηγούμενου μέρους της απόδειξης. □

Πρόταση στ΄ 16.

Εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, το ορθογώνιο που περιέχεται από τα άκρα είναι ίσο με το οργογώνιο που περιέχεται από τα μέσα· και εάν το ορθογώνιο που περιέχεται από τα άκρα είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τα μέσα, οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες.



Σχήμα 12.8: Πρόταση στ΄ 16.

Απόδειξη.

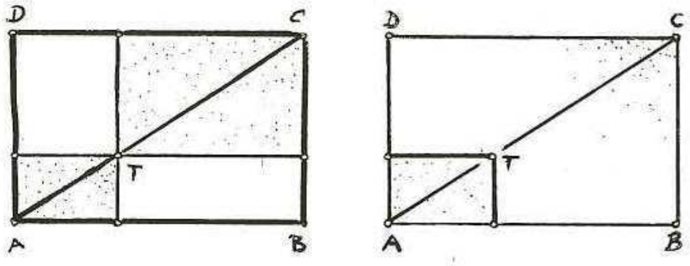
Συμβολίζουμε με a, b, c, d τα μήκη των ευθειών και με ad, bc τα εμβαδά των ορθογωνίων. Ζητείται να αποδειχθεί ότι

$$a : b = c : d \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι αυτή η σχέση είναι μία προφανής αναδιατύπωση της Πρότασης στ΄ 14. □

Οι δύο Προτάσεις στ΄ 14/16 μας λέγουν επίσης ότι εάν δύο ισογώνια παραλληλόγραμμα είναι ισεμβαδικά, θα παραμείνουν ισεμβαδικά εάν αλλάξουμε τις γωνίες κρατώντας αναλλοίωτες τις πλευρές.

Υπάρχουν δύο ακόμη θεωρήματα περί ορθογωνίων και ομοιότητας στο Μέρος Ε του Βιβλίου στ΄. Ο Ευκλείδης τα αναβάλλει για το Μέρος Ε διότι αναπτύσσει το αντικείμενο των ομοίων σχημάτων στο Μέρος Δ. Πρός στιγμήν ας δεχθούμε ως δεδομένη την ομοιότητα και ας παραθέσουμε τις Προτάσεις στ΄ 24, 26 εντός του αντικειμένου της γεωμετρίας των ορθογωνίων. Συμβολίζοντας την ομοιότητα με $\approx$ έχουμε:



Σχήμα 12.9: Προτάσεις στ΄ 24/26.

Πρόταση στ΄ 24.

$$T \in AC \Rightarrow AT \approx TC \approx AC.$$

Πρόταση στ΄ 26.

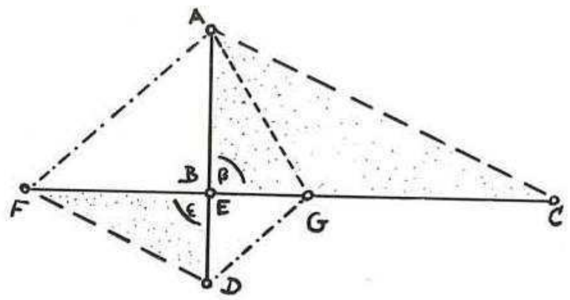
$$AT \approx AC \Rightarrow T \in AC.$$

12.6 Βιβλίο στ΄, Μέρος Δ: Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Το πρώτο πράγμα που κάνει ο Ευκλείδης σε τούτο το μέρος του Βιβλίου στ΄ είναι να δείξει το πως μπορούν να κατασκευαστούν όμοια τμήματα. (Πρόταση στ΄ 18.) Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη ομοίων σχημάτων, προχωρά στο πλέον σημαντικό θεώρημα, το οποίο συνδέει μήκη και εμβαδά ως προς την ομοιότητα.

Πρόταση στ′ 19.

Τα όμοια τρίγωνα είναι το ένα προς το άλλο στον διπλάσιο λόγο των αντίστοιχων πλευρών.



Σχήμα 12.10: Προτάσεις στ′ 24/26.

Ο διπλάσιος λόγος ορίζεται στο Βιβλίο ε′:

Ορισμός ε′ 9.

Εάν $a : b = b : c$ τότε το $a : c$ καλείται ο διπλάσιος λόγος του $a : b$.

Με σύγχρονους όρους, αν $a : b = b : c = k$ τότε $a : c = (a : b)\cdot(a : b) = k^2$. Η Πρόταση στ′ 19 μας λέγει λοιπόν ότι εάν οι πλευρές δύο ομοίων τριγώνων συνδέονται με ένα παράγοντα ομοιότητας k, τότε τα εμβαδά τους συνδέονται με τον παράγοντα k^2. Αυτό εφαρμόζεται στην παρακάτω Πρόταση στ′ 25 από την άλλη πλευρά: Αξιώνεται μία σχέση $a : c = k^2$ για τα εμβαδά, και ζητείται ο παράγοντας k ως ο μέσος ανάλογος των a και c.

Στην απόδειξη της στ′ 19 ο Ευκλείδης χειρίζεται με μαεστρία τις αναλογίες για τις ευθείες έως ότου να μπορέσει να εφαρμόσει το θεμελιώδες θεώρημα στ′ 1 για νε περάσει στα εμβαδά.

Επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα του Ευκλείδη, αλλά παραθέτουμε το Σχήμα 12.10 για να κάνουμε την διαδικασία λίγο πιο διάφανη (με την έννοια ότι δίδουμε σε ένα σημείο δύο σύμβολα, τα B και E).

Ξεκινάμε με την $\beta = \epsilon$ και την

$$AB : BC = DE : EF.$$

Η εναλλαγή δίδει

$$AB : DE = BC : EF.$$

Κατασκευάζουμε τώρα το σημείο G στην BC ούτως ώστε[14]

$$AB : DE = EF : BG.$$

Προκύπτουν δύο συμπεράσματα:

1. Το εμβαδόν του $\triangle ABG$ είναι ίσο με αυτό του $\triangle DEF$.[15]
2. $BC : EF = EF : BG$, άρα ο $BC : BG$ είναι ο διπλάσιος λόγος του $BC : EF$.

Το αποτέλεσμα προκύπτει τώρα από την Πρόταση στ′ 1:

$$(ABC) : (DEF) + (ABC) : (ABG) = BC : BG.$$

□

Η επόμενη Πρόταση στ′ 20 επεκτείνει το αποτέλεσμα της στ′ 19 στα όμοια πολύγωνα μέσω τριγωνισμού. Η Πρόταση στ′ 21 δείχνει ότι η σχέση της ομοιότητας είναι μεταβατική.

12.7 Βιβλίο στ′, Μέρος Ε: Η εφαρμογή των εμβαδών

Συζητήσαμε στο Βιβλίο β′ και ιδίως στις Προτάσεις β′ 5/6 το πως η εφαρμογή των εμβαδών στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά μπορεί να μεταφραστεί σαν τη λύση τετραγωνικών εξισώσεων. Γνωρίζοντας τα βασικά, δεν θα συζητήσουμε την γενίκευσή τους από τα τετράγωνα στα όμοια παραλληλόγραμμα που γίνεται στις Προτάσεις στ′ 28/29.[16]

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν στο Βιβλίο β′ χρειάζεται να τροποποιηθούν λίγο για τις ανάγκες τις απόδειξης της παρακάτω

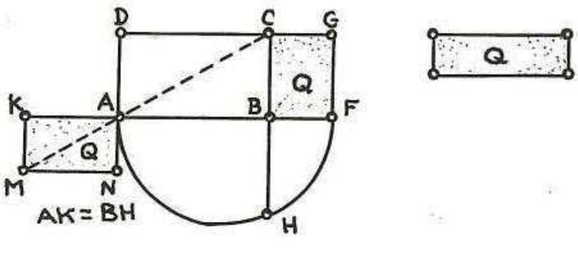
[14] Πρόταση στ′ 11.

[15] Πρόταση στ′ 14.

[16] Ξανατονίζουμε σε αυτό το σημείο την αέναη διαμάχη ιστορικών και μαθηματικών περί του αν τα Ελληνικά μαθηματικά ήταν καθαρά γεωμετρικά όπως υποστηρίζουν οι πρώτοι, ή, επηρεασμένα από τις Βαβυλωνιακές μεθόδους, δεν ήταν τίποτε άλλο από άλγεβρα μεταμφιεσμένη σε γεωμετρία όπως υποστηρίζουν οι δεύτεροι. Αυτό που είναι γεγονός, είναι ότι ενώ οι φιλόλογοι δίδουν ιδιαίτερο βάρος στην έκφραση και στη φόρμα, οι μαθηματικοί τεινουν να θεωρούν τα πάντα υπό το βλέμμα κάποιου *ισομορφισμού*. Και οι δύο όψεις είναι απαραίτητες για την κατανόηση των Αρχαίων μαθηματικών και κατ′ επέκταση των νεώτερων.

Πρόταση στ΄ 25.

Να κατασκευαστεί ένα και το αυτό σχήμα όμοιο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και ίσο με άλλο δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.



Σχήμα 12.11: Πρόταση στ΄ 25.

Αντί του τριγώνου που θεωρεί ο Ευκλείδης ως το πρώτο δοθέν σχήμα, εδώ θα πάρουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας το ορθογώνιο $ABCD$, όπως στο Σχήμα 12.11.

Έστω ότι το δοθέν εμβαδόν είναι ίσο με Q. Μέσω της α΄ 44 εφαρμόζουμε το Q στην ευθεία BC. Με την στ΄ 13 κατασκευάζουμε τον μέσο ανάλογο BH των AB και BF.[17] Τώρα το ορθογώνιο $AKMN$ με πλευρά AK ίση με BH είναι *όμοιο και ομοιόθετο* με το ορθογώνιο $ABCD$ και θα έχει εμβαδό Q σύμφωνα με τις στ΄ 19/20.

Ο Πλούταρχος ($\sim 45-125$ μ.Χ.), ο συγγραφέας των *Βίων Παραλλήλων* θεωρούσε την Πρόταση στ΄ 25 ως μία σημαντική γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Γράφει στα *Συμπόσιά* του:

Ανάμεσα στα περισσότερα γεωμετρικά θεωρήματα, ή προβλήματα, είναι και το ακόλουθο: Δοθέντων δύο σχημάτων, να εφαρμοστεί ένα τρίτο, ίσο με το πρώτο και όμοιο με το άλλο. Στη δύναμη του προβλήματος αυτού λέγεται ότι θυσίασαν οι Πυθαγόρειοι και αναντίρρητα, τούτο το πρόβλημα είναι πιο λεπτό και πιο επιστημονικό από το θεώρημα που αποδεικνύει ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών.[18]

[17] Αλγεβρικά, αυτό σημαίνει ότι βρίσκουμε τη ρίζα $BH = \sqrt{AB \cdot BF}$, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στις στ΄ 28/29.

[18] Πράγματι το Πυθαγόρειο Θεώρημα μπορεί να διαβαστεί και ως η λύση του εξής προβλήματος: Να κατασκευαστεί τετράγωνο, ίσο περιεχομένου με ένα άλλο σχήμα, το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι δύο τετράγωνα.