Κεφάλαιο 3

Στοιχείων Βιβλίο α′: Βασική Γεωμετρία

3.1 Περιεχόμενα του Βιβλίου α′

Ορισμοί 1–23	Βασικές έννοιες ορίζονται και περιγράφονται.
Αξιώματα 1–5, Κοινές έννοιες 1–5	Τα αξιώματα και οι κοινές έννοιες είναι τα αξιώματα της επιπεδομετρίας.
Προτάσεις 1–26	Α: Θεμελίωση της επιπεδομετρίας χωρίς την χρήση των παραλλήλων.
Προτάσεις 27–32	Β: Η θεωρία των παραλλήλων ευθειών. Γωνίες τριγώνου.
Προτάσεις 33–45	Γ: Η θεωρία των παραλληλογράμων και των εμβαδών τους.
Προτάσεις 46–48	Δ: Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

3.2 Ορισμοί και αξιώματα

Ο Ευκλείδης δημιούργησε το μοντέλο ενός μαθηματικού κειμένου: Ξεκινά με επακριβώς τυποποιημένους ορισμούς και αξιώματα, κατόπιν συνεχίζει με θεωρήματα και αποδείξεις. Από την αρχή καθιστά καθαρό το περί τίνος μιλά, ή δίδει κάποιου είδους περιγραφή των αντικειμένων της γεωμετρίας. Το κάνει αυτό με την πρώτη ομάδα ορισμών 1–9.

Ορισμοί

1. *Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος.* [1]
2. *Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος.* [2]
3. *Τα άκρα γραμμής είναι σημεία.*

...

8. *Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο τεμνόμενων γραμμών του επιπέδου που δεν κείνται επί της ίδιας ευθείας.* [3]

9. *Όταν οι περιέχουσες τη γωνία γραμμές είναι ευθείες, η γωνία καλείται ευθύγραμμη.*

Έχει συχνά παρατηρηθεί ότι ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί τους παραπάνω ορισμούς στις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν. Οι ορισμοί αυτοί είναι εξηγήσεις που πρέπει να ξεκαθαρίζουν στον αναγνώστη την σημασία κάθε όρου, αλλά δεν παίζουν κάποιο ρόλο στα επαγόμενα συμπεράσματα. Στον Ορισμό 8, οι γραμμές μπορεί να είναι καμπυλόγραμμες. Στο Βιβλίο γ΄ ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί γωνίες μεταξύ κύκλων και ευθειών, αλλά, ενδείξεις για μεγαλύτερη δημοφιλία γωνιών καμπύλων γραμμών υπάρχουν περισσότερο στους προ–Ευκλείδειους χρόνους.

Οι περισσότεροι από τους ακόλουθους ορισμούς είναι συντομεύσεις κατά τον σύγχρονο τρόπο, φερ΄ ειπείν:

Ορισμοί

[1] Κατά τον Αριστοτέλη *μέρος μεν ουν εστίν και του είδους* δηλαδή, υπάρχει μέρος ακόμα και στη μορφή. (Μετά τα Φυσικά, 1035 b 32). Κατά τον Πρόκλο, ο πρώτος ορισμός του σημείου δόθηκε από τους Πυθαγορείους ως *μονάς προσλαβούσα θέσιν*. Κατά τον Πλάτωνα σημείο είναι *αρχή γραμμής*.

[2] Κατά τον Πρόκλο, γραμμή είναι *μέγεθος εφ΄ εν διαστατόν*, δηλαδή μονοδιάστατο μέγεθος.

[3] Ένας αρχαιότερος ορισμός της γωνίας οφείλεται στον Απολλώνιο τον Περγαίο, σύμφωνα με τον οποίο, γωνία είναι *συναγωγή επιφανείας η στερεού προς ενί σημείω υπό κεκλασμένη γραμμή ή επιφανεία.*

19. ... *τρίπλευρα σχήματα είναι αυτά που περιέχονται σε τρεις ευθείες* ...[4]

20. *Από τα τρίπλευρα σχήματα, ισόπλευρο τρίγωνο είναι αυτό που έχει τις τρεις πλευρές του ίσες, ισοσκελές τρίγωνο είναι αυτό που έχει μόνο τις δύο πλευρές του ίσες, και σκαληνό*[5] *τρίγωνο είναι αυτό που έχει τις πλευρές του άνισες.*

Κατά τον σύγχρονο φορμαλισμό, ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές, αλλά όχι για τον Ευκλείδη. Παρόμοια, στον Ορισμό 22, ένα ορθογώνιο (που καλείται εκεί *ετερόμηκες*) δεν είναι τετράγωνο. Προφανώς από μία λογική άποψη, είναι προτιμότερο να συμπεριλάβουμε τα τετράγωνα στα ορθογώνια.

Μετά τους ορισμούς, ο Ευκλείδης προχωρά στα περίφημα αιτήματά του (αξιώματα). Τα σύγχρονα αξιώματα της γεωμετρίας ομοιάζουν αρκετά με τα αιτήματα αυτά.

Αξιώματα

1. *Ας έχει αξιωθεί ότι μπορεί να αχθεί ευθεία γραμμή από κάθε σημείο προς κάθε σημείο.*
2. *Και από πεπερασμένη ευθεία μπορεί να παραχθεί άπειρη ευθεία κατά συνεχή τρόπο.*
3. *Και μπορεί να γραφεί κύκλος παντός κέντρου και κάθε διαστήματος.* [6]
4. *Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*[7]
5. *[Το πέμπτο αίτημα θα συζητηθεί χωριστά παρακάτω.]*

Τα αιτήματα 1 και 2 θα μπορούσαν να διατυπωθούν κατά τον σύγχρονο τρόπο ως εξής: Δεδομένων δύο διαφορετικών σημείων, υπάρχει μοναδική ευθεία που περνά από αυτά. Η έμφαση του Ευκλείδη είναι περισσότερο στην κατασκευή και όχι στην ύπαρξη, η διαφορά δηλαδή είναι στον τρόπο και όχι στην ουσία.

Ακολουθούν οι κατά τον Ευκλείδη *Κοινές Έννοιες*. Αυτές είναι αξιώματα περί της συμπεριφοράς γενικότερων μεγεθών, και όχι μόνο γεωμετρικών αντικειμένων.

---

[4] Ο διαχωρισμός των σχημάτων σε τρίπλευρα, τετράπλευρα κλπ. οφείλεται στον ίδιο τον Ευκλείδη, αφού δεν απαντάται ούτε στον Πλάτωνα ούτε στον Αριστοτέλη.

[5] Η λέξη *σκαληνό* προέρχεται είτε από το *σκάζω* (= κουτσαίνω) είτε από το *σκολιός* (= επικλινής, λοξός).

[6] Εδώ *διάστημα* = ακτίνα, αν και ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον όρο διάστημα και για τη διάσταση.

[7] Το αίτημα αυτό είναι ισοδύναμο με την ισχύ της ισοδυναμίας των σχημάτων, ή με άλλα λόγια, της *ομογένειας* του χώρου.

Κοινές έννοιες

1. *Τα προς το ίδιο πράγμα ίσα πράγματα, είναι και ίσα μεταξύ τους.*[8]
2. *Και εάν ίσα πράγματα προστεθούν σε ίσα πράγματα, τα συνολικά πράγματα είναι ίσα.*
3. *Και εάν από ίσα πράγματα αφαιρεθούν ίσα πράγματα, τα υπολειπόμενα πράγματα είναι ίσα.*
4. *Και τα εφαρμόζοντα μεταξύ τους πράγματα είναι ίσα μεταξύ τους.*[9]
5. *Και το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.*

Πολλοί συγγραφείς παρατήρησαν την ανεπάρκεια των αξιωμάτων του Ευκλείδη σε σύγκριση με τα σύγχρονα θεμέλια της γεωμετρίας. Το πλέον προφανές σημείο είναι η απουσία οποιασδήποτε σκέψης για την διάταξη των σημείων πάνω σε μία γραμμή, ή της έννοιας του 'μεταξύ'. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί όλες τις υποθέσεις περί την διάταξη των σημείων επάνω σε μία διαισθητική βάση. Παρ' όλα αυτά, κατά κανένα τρόπο δεν μειώνεται το έργο του Ευκλείδη και το βασικό του κατόρθωμα: Στα μαθηματικά, κάποιος πρέπει να ξεκινήσει από αναλυτικά τιθέμενες αρχές και να παράγει όλα τα επόμενα συμπεράσματα από τις αρχές αυτές.

3.3 Βιβλίο α', Μέρος Α: Θεμέλια

Τα ουσιαστικά περιεχόμενα του Μέρους Α του Βιβλίου α' είναι πρώτα τα βασικά θεωρήματα ισότητας τριγώνων και στοιχειώδεις κατασκευές, όπως η διχοτόμηση γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων, και δευτερευόντως κάποιες προτάσεις περί 'μεγαλύτερων' σχέσεων των γωνιών και των πλευρών ενός τριγώνου, που βασίσονται στην α' 16 και κορυφώνονται με την τριγωνική ανισότητα α' 20.

[8] Κατά τον Αριστοτέλη, κανείς προσπαθεί να αποδείξει αξιώματα μόνον από αδημοσύνη. Σαν παράδειγμα, ο Πρόκλος παραθέτει την ακόλουθη 'απόδειξη' του Απολλωνίου, της κοινής έννοιας 1: Ας είναι $A = B$ και $B = C$. Λέγω ότι $A = C$. Διότι, εφ' όσον $A = B$, τα A, B καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο, και εφ' όσον $B = C$ τα B, C καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο. Άρα $A = C$.

Η απόδειξη αυτή εμπεριέχει τις επιπλέον υπόθεσεις ότι α) $A = B$ αν και μόνο εάν τα A, B καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο και β) πράγματα που καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο με κάποιο άλλο πράγμα καταλαμβάνουν και τον ίδιο χώρο μεταξύ τους. Με άλλα λόγια προσπαθείται να εξηγηθεί το προφανές με κάτι περισσότερο ομιχλώδες, αφού ο χώρος είναι μία ποσότητα πιο 'δύσκολη' από τα καθεαυτά πράγματα του ίδιου του χώρου.

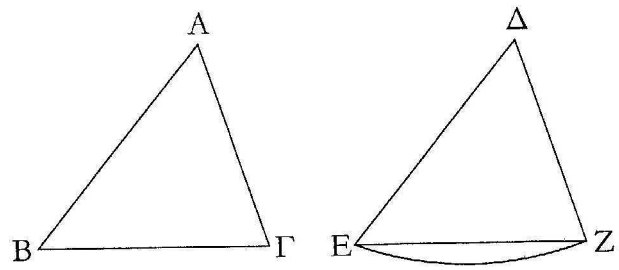
[9] Τούτη η κοινή έννοια νομιμοποιεί την χρησιμοποίηση της *εναπόθεσης* για την απόδειξη της ισότητας δύο σχημάτων που έχουν τα αναγκαία μέρη αντίστοιχα ίσα.

Οι αρχικές προτάσεις δείχνουν πως κατασκευάζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο και πως αντιγράφουμε τμήματα χωρίς να τα μετακινούμε. Οι λεπτές κατασκευές στις α΄ 2,3 βασίζονται ευθέως στα Αξιώματα 1,2 και 3. Η Πρόταση α΄ 4 είναι το πρώτο σημαντικό θεώρημα, το κριτήριο ισότητας της περιεχόμενης γωνίας.

Πρόταση α΄ 4

Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές και τις περιεχόμενες υπό των ίσων πλευρών γωνίες αντίστοιχα[10] *ίσες, τότε έχουν και τις βάσεις ίσες και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες .*

Έστω δύο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν τις δύο πλευρές ΑΒ, ΑΓ ίσες αντίστοιχα με τις ΔΕ, ΔΖ, δηλαδή, την ΑΒ με την ΔΕ και την ΑΓ με την ΔΖ. Και έστω ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ. Λέγω ότι και η βάση ΒΓ είναι ίση με την βάση ΕΖ, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ, και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες υποτείνονται οι ίσες πλευρές είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες, δηλαδή η ΑΒΓ είναι ίση με την ΔΕΖ και η ΑΓΒ είναι ίση με την ΔΖΕ.



Σχήμα 3.1: Πρόταση α΄ 4.

Πριν πάμε στην απόδειξη ας εξετάσουμε ορισμένες ιδιαιτερότητες του τρόπου γραφής του Ευκλείδη. Πάντα εκθέτει τα θεωρήματά του με δύο τρόπους: αρχικά με γενικά λόγια, και με μία δεύτερη φορά ειδικεύει καταδεικνύοντας σημεία, γραμμές, γωνίες, κ.ο.κ. με διάφορα γράμματα.[11] Πολύ συχνά το θεώρημα

[10] Αντί του 'μία προς μία' που αντιστοιχεί στο Ευκλείδειο ' εκατέρα εκατέρα' προτιμούμε στο εξής το *αντίστοιχα*.

[11] Αυτό γίνεται και στις μέρες μας: Θεώρημα: Μία συνεχής πραγματική συνάρτηση απεικονίζει κλειστά διαστήματα σε κλειστά διαστήματα. Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής…

συνοδεύεται από κατάλληλο σχήμα. Μία συγκεκριμένη φράση χρήζει περαιτέρω επεξήγησης: *το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ.* Απλώς σημαίνει ότι *τα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν.* Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την λέξη ' εμβαδόν' μόνο περιστασιακά.[12]

Απόδειξη της Πρότασης α′ 4.

Διότι εάν το τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμοστεί[13] επί του τριγώνου ΔΕΖ και το σημείο Α τεθεί στο σημείο Δ, και η ευθεία ΑΒ επί την ΔΕ, τότε το σημείο Β εφαρμόζει επί το σημείο Ε αφού η ΑΒ είναι ίση με την ΔΕ.

Έτσι, επειδή η ΑΒ εφαρμόζει επί την ΔΕ, η ευθεία ΑΓ εφαρμόζει επίσης επί την ΔΖ λόγω του ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ.

Ώστε και το σημείο Γ εφαρμόζει επί το Ζ επίσης διότι η ΑΓ είναι ίση με την ΔΖ.

Αλλά και το σημείο Β εφαρμόζει επί το Ε, ώστε η βάση ΒΓ εφαρμόζει επί τη βάση ΕΖ. Διότι εάν το Β εφαρμόσει επί το Ε και το Γ επί το Ζ, και η βάση ΒΓ δεν εφαρμόσει επί την ΕΖ, τότε δύο ευθείες γραμμές θα περιέχουν εμβαδόν, το οποίο είναι αδύνατο.[14]

Άρα, η βάση ΒΓ θα εφαρμόσει επί την ΕΖ, και θα είναι ίση με αυτήν. Ώστε και όλο το ΑΒΓ τρίγωνο θα εφαρμόσει επί όλο το ΔΕΖ τρίγωνο και θα είναι ίσο με αυτό, και οι λοιπές γωνίες θα εφαρμόσουν επί τις λοιπές γωνίες και θα είναι ίσες με αυτές, δηλαδή η ΑΒΓ θα είναι ίση με την με την ΔΕΖ και η ΑΓΒ με την ΔΖΕ.

Εάν άρα δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές και τις περιεχόμενες υπό των ίσων πλευρών γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις βάσεις ίσες και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες· όπερ έδει δείξαι.[15] □

[12]Οι Έλληνες ήξεραν πολύ καλά να μετρούν τις γαίες τους, και ήξεραν επίσης ότι οι φοροεισπράκτορες του Φαραώ μετρούσαν τα χωράφια των Αιγυπτίων αγροτών με τρόπο που δεν ήταν καθόλου προς όφελος των τελευταίων. Στα μαθηματικά, αποφεύγουν την έννοια του ' εμβαδού' προτιμώντας φράσεις όπως την παραπάνω, δηλαδή, 'το ορθογώνιο είναι ίσο με το ορθογώνιο' κ.ο.κ.

[13]εναποτεθεί.

[14]Λόγω του Αξιώματος 1.

[15]= το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την φράση αυτή στο τέλος όλων των αποδείξεων. Ο όρος χρησιμοποιείται αυτούσιος ως τις μέρες μας και στο εξής θα γράφουμε απλώς Ο.Ε.Δ.

Σχόλια πάνω στην απόδειξη της Πρότασης α′ 4

Η μέθοδος απόδειξης της Πρότασης α′ 4 είναι σε πλήρη αντιδιαστολή με τις λεπτομερείς αποδείξεις των προτάσεων α′ 1–3. Απ′ ότι βλέπουμε ο Ευκλείδης απλώς εναποθέτει το τρίγωνο ΑΒΓ επί του τριγώνου ΔΕΖ με τρόπο ώστε το Α να τεθεί επί του Δ, το Β επί του Ε και το Γ επί του Ζ και από κεί προκύπτει το συμπέρασμα.

Από τη μία πλευρά, η μέθοδος της εναπόθεσης δεν έχει καμμία βάση στα Ευκλείδεια αξιώματα, αλλά από την άλλη, πρακτικά τίποτε δεν γίνεται χωρίς τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. (Στην Πρόταση α′ 8 ακολουθείται η ίδια μέθοδος). Ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε εδώ είναι άλλο ένα αξίωμα. Σύγχρονες αξιωματικές μελέτες από τον Χίλμπερτ και άλλους, κατέδειξαν ότι δεν υπάρχει τρόπος να ξεπεραστεί αυτό το δίλλημα: Είτε η Προταση α′ 4 θα πρέπει να γίνει αξίωμα[16] ή θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την εναπόθεση σε κάποια εκδοχή που θα βασίζεται σε ένα αίτημα ύπαρξης κάποιων στερεών κινήσεων του επιπέδου.

Στο επόμενο ζεύγος προτάσεων α′ 5–6 ο Ευκλείδης αποδεικνύει ένα θεμελιώδες λήμμα περί ισοσκελών τριγώνων που χρησιμοποείται συχνά στα Βιβλία α′–στ′.

Πρόταση α′ 5[17]

Οι πρός την βάση γωνίες των ισοσκελών τριγώνων είναι ίσες...[18]

Έστω ισοσκελές τρίγωνο το ΑΒΓ που έχει ίση την πλευρά ΑΒ με την πλευρά ΑΓ... λέγω, ότι η ΑΒΓ γωνία είναι ίση με την ΑΓΒ...

Πρόταση α′ 6[19]

Εάν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, τότε και οι πλευρές που υποτείνονται από τις ίσες γωνίες είναι ίσες.

Για την απόδειξη, ο Ευκλείδης κατασκευάζει δύο τρίγωνα ΒΓΖ και ΓΗΒ:

Έστω τυχαίο σημείο Ζ επάνω στην ΒΔ· και έστω ΑΗ να έχει αφαιρεθεί από την ΑΕ και να είναι ίση με την ΑΖ. Ενώνουμε τις ευθείες ΖΓ, ΗΒ.

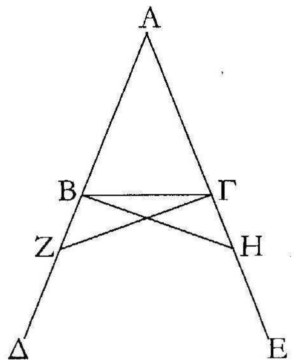
---

[16] Όπως προτείνει ο Ράσσελ στα Principia Mathematica.

[17] Σύμφωνα με τον Πρόκλο, η απόδειξη αυτής της πρότασης οφείλεται στον Θαλή. Μία προ–Ευκλείδεια απόδειξη που χρησιμοποιεί 'μεικτέσ' γωνίες και οφείλεται στον Αριστοτέλη παρατίθεται στον Heath, vol. I–II, p.252.

[18] Παραλείπουμε το επόμενο συμπέρασμα που λέει ότι και οι εξωτερικές γωνίες είναι ίσες.

[19] Είναι η αντίστροφη της α′ 5.



Σχήμα 3.2: Πρόταση α΄ 5.

Στα επόμενα δύο βήματα δείχνεται πρώτα η ισότητα των τριγώνων △ΑΖΓ και △ΑΗΒ διά του κριτηρίου της περιεχόμενης γωνίας, και μετά, πάλι από το ίδιο κριτήριο η ισότητα △ΒΖΓ=△ΓΗΒ:

1. Έχουμε ∠ΖΑΓ=∠ΗΑΒ και ΑΖ=ΑΗ από κατασκευή, και ΑΓ=ΑΒ, άρα △ΑΖΓ=△ΑΗΒ και ειδικότερα ΒΗ=ΓΖ και ∠ΒΖΓ=∠ΓΗΒ.

2. Από κατασκευή έχουμε ότι ΒΖ=ΓΗ· επιπλέον, η ΒΓ είναι κοινή πλευρά και από το (1) έχουμε ∠ΖΒΓ=∠ΓΗΒ· άρα από το κριτήριο της περιεχομένης γωνίας προκύπτει △ΓΗΒ=△ΒΖΓ.

Και καταλήγει ο Ευκλείδης:

Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες από τις ίσες ευθείες γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες βάσεις ίσες, και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, και οι λοιπές γωνίες οι οποιές υποτείνονται από τις ίσες πλευρές είναι ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες, Ο.Ε.Δ. □.

Αξίζουν να σχολιασθούν οι δύο παρακάτω τρόποι απόδειξης της Πρότασης α΄ 5. Η πρώτη οφείλεται στον Πρόκλο που θεωρεί σημεία Δ και Ε *επάνω* στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, αντί να προεκτείνει τις ΑΒ, ΑΓ. Κατά τα άλλα ακολουθεί την απόδειξη του Ευκλείδη.

Ο Πάππος δίδει την παρακάτω ενδιαφέρουσα απόδειξη:

Απόδειξη της Πρότασης α΄ 5.

Έστω ΑΒΓ ένα ισοσκελές τρίγωνο, όπου ΑΒ είναι ίση με την ΑΓ. Ας θεωρήσουμε αυτό το τρίγωνο ως δύο τρίγωνα και επιχειρηματολογούμε ως εξής:

Αφού ΑΒ=ΑΓ, και ΑΓ=ΑΒ οι δύο πλευρές ΑΒ, ΑΓ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΑΓ, ΑΒ. Επίσης ∠ΒΑΓ=∠ΓΑΒ, διότι είναι η ίδια.

Άρα όλα τα αντίστοιχα μέρη του τριγώνου είναι ίσα, επακριβώς ΒΓ=ΓΒ, △ΑΒΓ=△ΑΓΒ, ∠ΑΒΓ=∠ΑΓΒ, ∠ΑΓΒ=∠ΑΒΓ, διότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ υποτείνονται από τις αυτές τις γωνίες. Άρα οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, Ο.Ε.Δ. □

3.3.1 Προτάσεις α′ 7–15

Στις Προτάσεις 7 και 8 ο Ευκλείδης αποδεικνύει το κριτήριο ισότητας των τριών πλευρών, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εναπόθεσης για δεύτερη φορά. Οι Προτάσεις 9–15 είναι αφιερωμένες στις κοινές κατασκευές και πρωταρχικές προτάσεις της επιπεδομετρίας: διχοτόμηση γωνιών και ευθύγραμμων τμημάτων, κατασκευή μεσοκαθέτων, παραπληρωματικών και ορθών γωνιών.

Πρόταση α′ 16.

Εάν κάποια από τις πλευρές κάθε τριγώνου προεκταθεί, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε μία των εσωτερικών και απέναντι γωνιών.

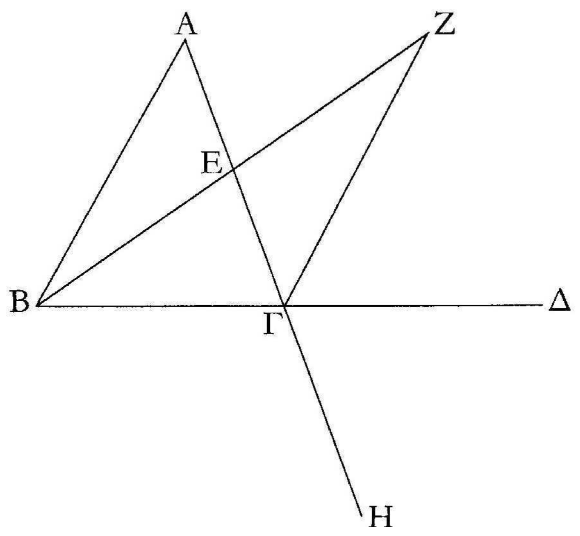
Ισχυρισμός. $\alpha = \angle\mathrm{BA\Gamma} < \delta = \angle\Delta\Gamma\mathrm{A}$.

Κατασκευή. Διχοτομούμε την ΑΓ στο Ε, φέρνουμε την ΒΕ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε ΒΕ=ΕΖ, ενώνουμε το Γ με το Ζ, και έστω $\alpha' = \angle\mathrm{Z\Gamma E}$.

Απόδειξη

1. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ίσο με το ΓΖΕ από το κριτήριο της περιεχόμενης γωνίας. Άρα $\alpha = \alpha'$
2. Αλλά η α' είναι μέρος της δ. Άρα $\alpha = \alpha' < \delta$ από την κοινή έννοια 5, Ο.Ε.Δ. □

Εάν ο Ευκλείδης είχε στη διάθεσή του τη θεωρία των παραλλήλων σε αυτό το σημείο, η Πρόταση α′ 16 θα προέκυπτε ως τετριμμένο πόρισμα της Πρότασης α′ 32 περί του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου! Βλέπουμε όμως πόσο προσεκτικά προχωρά. Ας συζητήσουμε σε αυτό το σημείο τη γέννεση της απόδειξης της Πρότασης α′ 16 με την βοήθεια των παραλλήλων.



Σχήμα 3.3: Πρόταση α′ 16.

Η απόδειξη είναι πράγματι ευφυής. Κάποιος μπορεί να δεί πως ο συγγραφέας είχε την ιδέα: Απλά προσθέστε την ΑΖ στο σχήμα. Αίφνης, βλέπουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΖ πίσω από την απόδειξη της Πρότασης α′ 16. Σε αυτό το στάδιο θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε παράλληλες και να έχουμε $\alpha = \alpha'$· η ΑΓ τέμνει τις δύο παράλληλες ΑΖ και ΒΓ. Επιπλέον το Ε θα είναι το σημείο τομής των διαγωνίων. Παρ′ όλα αυτά, και αυτή είναι η ουσιαστική ιδέα, για να αποδείξουμε την Πρόταση α′ 16 είναι δυνατό να αποφύγουμε τις παράλληλες και να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ισότητας α′ 4. [20]

Από την άλλη, υπάρχει ένα χάσμα στην απόδειξη. Ο ισχυρισμός ότι η α' είναι μέρος της δ δεν δικαιολογείται από τα αξιώματα. Επιπλέον η πρόταση δεν ισχύει σε άλλες γεωμετρίες, όπως λ.χ. η σφαιρική.[21]

[20] Η επιδεξιότητα του Ευκλείδη φαίνεται από την ικανότητά του να συνδέσει την α′ 16 με το σημαντικό θεώρημα α′ 20, την τριγωνική ανισότητα και την α′ 27, την ύπαρξη των παραλλήλων

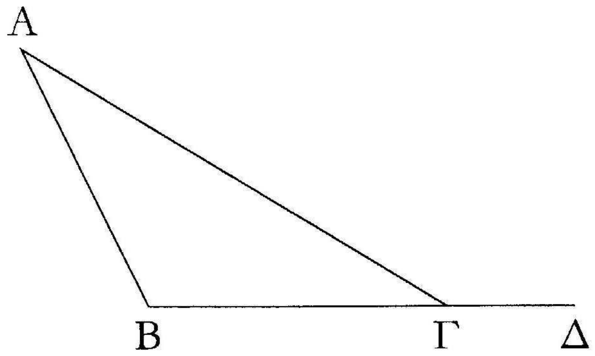
[21] Ο Μενέλαος, που έγραψε περί σφαιρικής γεωμετρίας το 100 μ.Χ. σίγουρα ήξερε το φαινόμενο.

3.3.2 Προτάσεις α′ 17–20

Η Πρόταση α′ 17 είναι πόρισμα της α′ 16. Πάλι, είναι μία ασθενής εκδοχή της α′ 32 περί του αθροίσματος γωνιών τριγώνου:

Πρόταση α′ 17.

Το άθροισμα των δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές, με όποιο τρόπο και αν αυτές ληφθούν.



Σχήμα 3.4: Πρόταση α′ 17.

Η Πρόταση α′ 18 μας λέει ότι σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά υποτείνει τη μεγαλύτερη γωνία, και η α′ 19 είναι η αντίστροφή της. Αυτές οι προτάσεις οδηγούν στην περίφημη τριγωνική ανισότητα:

Πρόταση α′ 20.

Το άθροισμα των δύο πλευρών κάθε τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο από την άλλη πλευρά, με όποιο τρόπο και αν αυτές ληφθούν.

Σχολιάζει ο Πρόκλος:

Οι Επικούρειοι που θέλουν να γελοιοποιήσουν αυτό το θεώρημα, λένε ότι είναι προφανές ακόμα και σε ένα γάϊδαρο και δεν χρειάζεται απόδειξη. . . και το συμπεραίνουν αυτό από την παρατήρηση ότι, εάν το σταχυ τοποθετηθεί στο ένα άκρο μιας πλευράς, ένας πεινασμένος γάϊδαρος που βρίσκεται στο άλλο άκρο της πλευράς θα περπατήσει πάνω στην πλευρά που βρίσκεται και δεν θα πάει στο στάχυ μέσω των δύο άλλων! [22]

[22] Οι σημερινοί Επικούρειοι θα μπορούσαν ίσως να προσθέσουν κάτι για αυτούς που διασχίζουν το γρασσίδι για συντομία, κατά τον τρόπο του γαϊδάρου. . .

Ο Πρόκλος απαντά σωστά ότι μία απλή αντίληψη της αλήθειας δεν αποτελεί επιστημονική απόδειξη. Στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η τριγωνική ανισότητα μπορεί πράγματι να παραχθεί από τα άλλα εξίσου εύλογα αξιώματα. Από την άλλη, οι Επικούρειοι κερδίζουν στην σύγχρονη θεωρία των μετρικών χώρων όπου η τριγωνική ανισότητα είναι το θεμελιώδες αξίωμα του όλου οικοδομήματος.

3.3.3 Προτάσεις α′ 21–26.

Τρεις από τις εναπομείνασες προτάσεις του Μέρους Α αφορούν στις καθολικές σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου (21, 24, 25. Η Πρόταση α′ 22 δίδει την κατασκευή ενός τριγώνου από τις πλευρές του, υπό την συνθήκη ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Ο Ευκλείδης το χρησιμοποιεί αυτό στην Πρόταση α′ 23 για να δείξει πως αντιγράφουμε μία γωνία. Τα υπόλοιπα κριτήρια ισότητας τριγώνων προσκολλώνται στην α′ 26 ως ένα είδος χαλαρού άκρου.

3.4 Βιβλίο α′, Μέρος Β: Θεωρία των παραλλήλων

Λέγει ο Ορισμός α′ 23 του Ευκλείδη για τις παράλληλες ευθείες:[23]

Παράλληλες είναι οι ευθείες, οι οποίες είναι στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες απείρως[24] *και από τα δύο μέρη* [25] *δεν συμπίπτουν μεταξύ τους σε κανένα από αυτά (τα μέρη).*

Σχετικό με τις παράλληλες ευθείες είναι το περίφημο 5ο Αίτημα:[26]

Αξίωμα 5. *Και εάν μία ευθεία εμπίπτει*[27] *σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε το άθροισμα των*[28] *εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών*[29] *να είναι μικρότερο των*

[23]Κατά τον Αριστοτέλη, παράλληλες ευθείες είναι αυτές που δεν τέμνονται. Για διάφορους άλλους ορισμούς, αρχαίους και σύγχρονους, παραπέμπουμε στον Heath, Vol I, σελ. 190.

[24]Ο Ευκλείδης λέγει *εκβαλλόμεναι εις άπειρον*. Δεν μεταφράζουμε όμως *προεκτεινόμενες στο άπειρο* διότι τότε θα πρέπει να ορίσουμε το ‘άπειρο’. Η μετάφρασή μας απλώς σημαίνει ‘απεριόριστα’.

[25]Δηλαδή από κάθε μία κατεύθυνση.

[26]Το Κεφάλαιο 4 που ακολουθεί είναι αφιερωμένο στην ιστορία του 5ου Αιτήματος.

[27]=διασχίζει, τέμνει. Στα επόμενα διατηρούμε το Ευκλείδειο ‘εμπίπτει’ αντί του ‘τέμνει’.

[28]Ο Ευκλείδης δεν γράφει την λέξη ‘άθροισμα’ αλλα την εννοεί σαφώς.

[29]Αφήνουμε αμετάφραστο τπ ‘εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών’ αντί του ‘εσωτερικών

δύο ορθών, τότε στην άπειρη προέκτασή τους οι δύο ευθείες τέμνονται από το μέρος που το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

Μία ισοδύναμη εκδοχή του 5ου Αιτήματος που χρησιμοποιείται στην σύγχρονη γεωμετρία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έστω ευθεία ε και σημείο Σ εκτός αυτής. Υπάρχει **μοναδική** *ευθεία ε′ που διέρχεται από το Σ και είναι παράλληλη με την ε.*

Η ανάγκη του Ευκλείδη να εισάγει το 5ο Αίτημα, ήταν για να αποδείξει την Πρόταση α′ 29. Πριν από αυτήν αποδεικνύει την

Πρόταση α′ 27.[30]

Εάν μία ευθεία εμπίπτει σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εναλλάξ[31] γωνίες[32] είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. [33]

Διότι εάν ΑΒ και ΓΔ είναι οι ευθείες και ΕΖ είναι η εμπίπτουσα, τότε οι εναλλάξ γωνίες ΑΕΖ, ΕΖΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Λέγω ότι η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ.

Απόδειξη

Διότι αν δεν ήταν, προεκτεινόμενες οι ΑΒ και ΓΔ θα συμπέσουν είτε από το μέρος των Β και Δ, ή από των Β και Γ.[34]

Ας προεκταθούν και συμπέσουν στο Η από το μέρος των Β και Δ.

και από το ίδιο μέρος γωνιών'.

[30] Η Πρόταση αυτή όπως και η ακόλουθη α′ 28 ήταν γνωστές στον Αριστοτέλη.

[31] Προφανώς εννοεί τις *εντός* εναλλάξ

[32] Από την δεύτερη εκφώνηση που ακολουθεί, φαίνεται ότι εννοεί τις *εντός* εναλλάξ γωνίες.

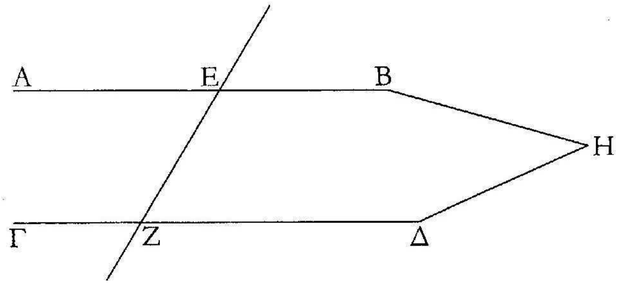
[33] Ο Ντε Μόργκαν παρατήρησε ότι η Πρόταση α′ 27 είναι λογικά ισοδύναμη της Πρότασης α′ 16: Έστω Α η πρόταση *ευθείες σχηματίζουν τρίγωνο με μία εμπίπτουσα* και Β η πρόταση *ευθείες σχηματίζουν γωνίες με μία εμπίπτουσα στο ίδιο μέρος που το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές*, έχουμε

$$A \implies B$$

του οποίου το λογικό ισοδύναμο είναι

$$\text{όχι } B \implies \text{όχι } A.$$

[34] Λόγω του Ορισμού 23.



Σχήμα 3.5: Πρόταση α′ 27.

Τότε στο τρίγωνο ΗΕΖ η εξωτερική γωνία ΑΕΖ πρέπει να είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΕΖΗ· πράγμα αδύνατο.[35]

Άρα προεκτεινόμενες οι ΑΒ και ΓΔ δεν συμπίπτουν από το μέρος των Β και Δ. Όμοια μπορεί να δειχθεί ότι δεν συμπίπτουν και από το μέρος των Α και Γ.

Αλλά ευθείες που δεν συμπίπτουν από κανένα μέρος είναι παράλληλες· άρα η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ.

Άρα εάν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους, Ο.Ε.Δ. □

Η Πρόταση α′ 28 είναι μία χρήσιμη παραλλαγή της 27:

Πρόταση α′ 28.

Εάν μία ευθεία εμπίπτει σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, ή το άθροισμα των εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

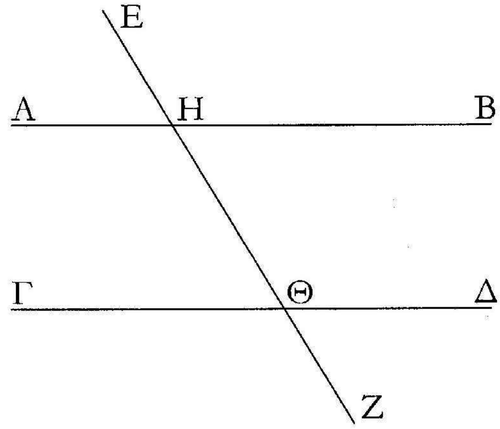
Το 5ο Αξίωμα χρησιμοποιείται τώρα για την απόδειξη της Πρότασης α′ 29.

Πρόταση α′ 29.

Η ευθεία που εμπίπτει σε δύο παράλληλες ευθείες κάνει τις εναλλάξ γωνίες ίσες και την εκτός με την εντός και απέναντι ίσες και τό άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές.

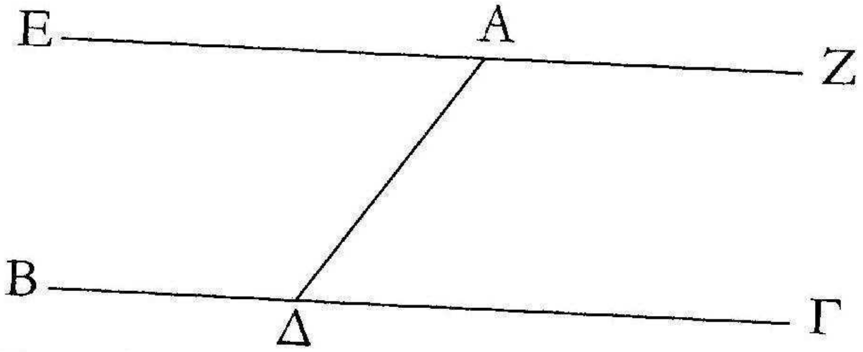
Διότι έστω ότι η ευθεία ΕΖ εμπίπτει στις παράλληλες ευθείες ΑΒ, ΓΔ· λέγω ότι κάνει τις εναλλάξ γωνίες ΑΗΘ, ΗΘΔ ίσες και την εκτός γωνία ΕΗΒ ίση

[35] Από την Πρόταση α′ 16.



Σχήμα 3.6: Πρόταση α′ 28.

με την εντός και απέναντι γωνία ΗΘΔ και τό άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ΒΗΘ, ΗΘΔ ίσο με δύο ορθές.



Σχήμα 3.7: Πρόταση α′ 29.

Απόδειξη.

Διότι έστω οτι οι γωνίες ΑΗΘ, ΗΘΔ είναι άνισες. Τότε μία από αυτές θα είναι μεγαλύτερη.

Έστω ότι η μεγαλύτερη είναι η ΑΗΘ. Έστω ότι η ΒΗΘ προστίθεται και στις δύο· άρα το άθροισμα των ΑΗΘ, ΒΗΘ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των ΒΗΘ, ΗΘΔ.

Αλλά το άθροισμα των ΑΗΘ, ΒΗΘ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα το άθροισμα των ΒΗΘ, ΗΘΔ είναι μικρότερο από δύο ορθές.

Οι ευθείες που προεκτείνονται απείρως από εσωτερικές γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι μικρότερο των δύο ορθών συμπίπτουν.[36] Άρα οι άπειρες προεκτάσεις των ΑΒ, ΓΔ θα συμπέσουν· αλλά δεν συμπίπτουν, διότι υποτέθηκε ότι αυτές είναι παράλληλες.

Άρα δεν είναι άνισες οι ΑΗΘ, ΗΘΔ, άρα είναι ίσες. Αλλά η ΑΗΘ είναι ίση με την ΕΗΒ· και η ΕΗΒ είναι ίση με την ΗΘΔ. Προστίθεται και στις δύο η ΒΗΘ· άρα (το άθροισμα των ΕΗΒ, ΒΗΘ) ισούται με το άθροισμα των ΒΗΘ, ΘΗΔ. Αλλά το άθροισμα των ΕΗΒ, ΒΗΘ ισούται με δύο ορθές, άρα και το άθροισμα των ΒΗΘ, ΗΘΔ ισούται με δύο ορθές.

Άρα, η ευθεία που εμπίπτει σε δύο παράλληλες ευθείες κάνει τις εναλλάξ γωνίες ίσες και την εκτός με την εντός και απέναντι ίσες και τό άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές· Ο.Ε.Δ. □

Η Πρόταση α′ 30 δείχνει την μεταβατικότητα της παραλληλίας και η Πρόταση α′ 31 εξερευνά την κατασκευή παραλλήλων από εναλλάξ γωνίες.

Πρόταση α′ 32.

Σε κάθε τρίγωνο, εάν μία πλευρά του προεκταθεί, τότε η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Έστω τρίγωνο το ΑΒΓ, και έστω ότι η μία πλευρά του ΒΓ προεκτείνεται επί το Δ· λέγω ότι η εξωτερική γωνία ΑΓΔ είναι ίση με το άθροισμα των δύο εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΓΑΒ και ΑΒΓ, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, ΒΓΑ και ΓΑΒ είναι ίσο με δύο ορθές.

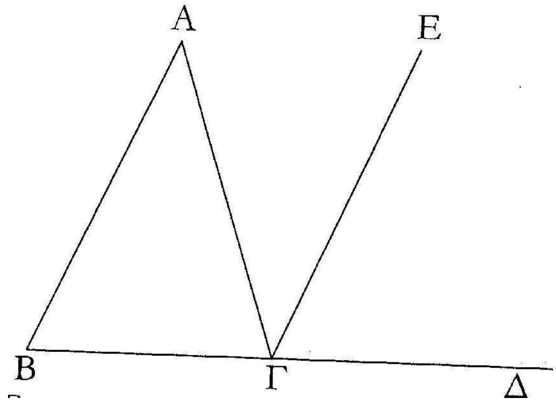
Απόδειξη.

Ας αχθεί από το σημείο Γ ευθεία ΓΕ παράλληλη στην ΑΒ.[37]

Και επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΓΕ, και εμπίπτει σε αυτές η ΑΓ, οι εναλλάξ γωνίες ΒΑΓ, ΑΓΕ είναι ίσες μεταξύ τους.[38]

Πάλι, επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΓΕ, και εμπίπτει σε αυτές η ΒΔ, η εξωτερική γωνία ΕΓΔ είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι ΑΒΓ.[39]

[36] Λόγω του 5ου Αξιώματος.
[37] Πρόταση α′ 31.
[38] Πρόταση α′ 29.
[39] ό.π.



Σχήμα 3.8: Πρόταση α′ 32.

Αλλά δείχθηκε ότι και η ΑΓΕ είναι ίση με την ΒΑΓ· άρα όλη η ΑΓΔ γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΒΑΓ και ΑΒΓ.

Προστίθεται σε αυτές η ΑΓΒ· άρα το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΓΑ και ΓΑΒ.

Αλλά το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές.[40] Άρα και το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΓΑ και ΓΑΒ είναι ίσο με δύο ορθές.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο, εάν μία πλευρά του προεκταθεί, τότε η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, Ο.Ε.Δ. □

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι η σημαντικότερη και θεμελιωδέστερη αναλλοίωτη στη σύγχρονη γεωμετρία. Ανεξάρτητα από το σχήμα του τριγώνου, το άθροισμα των γωνιών του θα είναι πάντοτε ίσο με δύο ορθές (ή 180 μοίρες, ή π.) Τούτο χρησιμοποιείται τόσο συχνά που τείνουμε να λησμονούμε τη σημασία του. Ο Heath γράφει ότι το αποτέλεσμα αυτό ανακαλύφθηκε στα πολύ πρώϊμα στάδια της Ελληνικής γεωμετρίας. Για την ιστορία του έχουν γράφει ο Ευτόκιος, ο Πρόκλος και ο Διογένης Λαέρτιος.[41]

Μία πρώτη άμεση επίπτωση είναι ο τύπος για το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου. Εάν αυτό έχει n κορυφές, μπορει να τμηθεί σε

[40] Πρόταση α′ 13

[41] Βλ. Heath, Vol. I, p.317–322.

$n-2$ τρίγωνα και έχει άθροισμα γωνιών ίσο με $2(n-2)$ ορθές $(=(n-2)\pi)$.[42] Η Πρόταση α′ 32 έχει αργότερα παίξει ρόλο και στη φιλοσοφία. Αναφέρει ο Εμμανουήλ Καντ στην *Κριτική του Καθαρού Λόγου* ότι, η πρόταση αυτή είναι η πεμπτουσία αυτού που καλεί 'συνθετική εκ των προτέρων κρίση', δηλαδή, είναι ένα συμπέρασμα απόλυτης βεβαιότητας, ανεξάρτητο της εμπειρίας, που προσθέτει στην γνώση μας.

Ο Γιάκομπ Στάϊνερ (1796–1863) βρήκε μία πολύ σημαντική απόρροια της Πρότασης α′ 32. Χρησιμοποίησε τον τύπο $(n-2)\pi$ για να δώσει μία απλή απόδειξη του τύπου του Όϋλερ για τα κυρτά πολύεδρα: Εάν ένα τέτοιο πολύεδρο έχει K κορυφές, A ακμές και E έδρες, τότε

$$K+E-A=2.$$

Συνεπώς, η απλή αναλλοίωτος των τριγώνων προχωρά τόσο μακρυά όσο μέχρι την απόδειξη μίας εκ των πλέον σημαντικών αναλλοιώτων την σύγχρονης αλγεβρικής τοπολογίας, της χαρακτηριστικής Όϋλερ, στην πρώτη ενδεικτική περίπτωση των κυρτών πολυέδρων.

3.5 Βιβλίο α′, Μέρος Γ: Παραλληλόγραμμα και εμβαδά τους

Στο Μέρος Γ του Βιβλίου α′ βρίσκουμε μία συστηματική μελέτη των συσχετίσεων των εννοιών της 'παραλληλίας ' και του 'ίσου περιεχομένου'. Ο Ευκλείδης ορίζει διαφόρων ειδών τετράπλευρα σχήματα στον Ορισμό 22, αλλά όχι τα παραλληλόγραμμα που δεσπόζουν σε αυτό το Γ Μέρος. Αντί γι αυτό, τα εισάγει μαζί με τις βασικές τους ιδιότητες της συμμετρίας στις Προτάσεις 33 και 34.

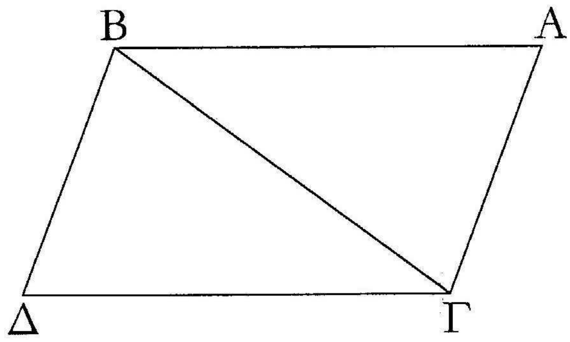
Πρόταση α′ 33.

Οι ευθείες που συνδέουν επί τα αυτά μέρη ίσες και παράλληλες ευθείες, είναι και μεταξύ τους ίσες και παράλληλες.[43]

[42] Αυτό αποδεικνύεται από τον Πρόκλο στα σχόλιά του στην Πρόταση α′ 32. Μάλιστα προσθέτει: *..η ιδιότητα ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ισούται με δύο ορθές είναι μία ουσιαστική ιδιότητα για (χαρακτηρίζει) ένα τρίγωνο.* Ο όρος *ουσιαστική ιδιότητα* είναι αριστοτέλειος.

[43] Σύμφωνα με τον Πρόκλο, η πρόταση αυτή είναι ο συνδετικός κρίκος της θεωρίας των παραλλήλων και της διαπραγμάτευσης των παραλληλογράμμων. Διότι, ενώ μιλά μόνο για παράλληλες και ίσες ευθείες που συνδέονται επί τα αυτά μέρη, δίδει, χωρίς να το εκφράζει

Έστω ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες, και έστω οι ευθείες ΑΓ, ΒΔ που τις συνδέουν επί τα αυτά μέρη· λέγω ότι και οι ΑΓ, ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες.



Σχήμα 3.9: Πρόταση α' 33.

Απόδειξη.

Ας συνδεθεί η ΒΓ. Και επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ, και η ΒΓ έχει εμπέσει σε αυτές, οι εναλλάξ γωνίες ΑΒΓ, ΒΓΔ είναι ίσες μεταξύ τους.

Και επειδή η ΑΒ είναι ίση με την ΓΔ και η ΒΓ είναι κοινή, οι ΑΒ, ΒΓ είναι ίσες με τις ΔΓ, ΓΒ.

Και η ΑΒΓ γωνία είναι ίση με τη ΒΓΔ. Άρα η βάση ΑΓ είναι ίση με τη βάση ΒΔ, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΔ, και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες υποτείνονται οι ίσες πλευρές είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες.

Άρα η γωνία ΑΓΒ είναι ίση με τη ΓΒΔ. Και επειδή η εμπίπτουσα ΒΓ στις δύο ευθείες ΑΓ, ΒΔ κάνει τις εναλλάξ γωνίες μεταξύ τους ίσες, η ΑΓ είναι παράλληλη με την ΒΔ. Δείχθηκε δε ότι και η ΑΓ είναι ίση με την ΒΔ.

Άρα, οι ευθείες που συνδέουν τις ίσες και παράλληλες επί τα αυτά μέρη ευθείες, είναι και μεταξύ τους ίσες και παράλληλες, Ο.Ε.Δ. □

Πρόταση α' 34.

ρητά, την κατασκευή του παραλληλογράμμου. Έτσι, στην επόμενη ακριβώς πρόταση, αναφέρει 'παραλληλόγραμμα χωρία' χωρίς καμμία άλλη εξήγηση.

Οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες των παραλληλογράμμων[44] είναι ίσες μεταξύ τους, και η διάμετρος[45] τα διχοτομεί.

Όπως βλέπουμε στην παραπάνω πρόταση, ο Ευκλείδης μιλά σαφώς για εμβαδά χωρίς να αναφέρει την λέξη αυτή καθεαυτή ούτε εδώ, αλλά ούτε και στις επόμενες προτάσεις. Στν καθημερινή τους ζωή οι Έλληνες μετρούσαν τις περιουσίες τους –άλλωστε η λέξη γεωμετρία σημαίνει ακριβώς αυτό– δηλαδή προσαρτούσαν έναν αριθμό σε κάποιο συγκεκριμένο (πολυγωνικό) σχήμα. Στα μαθηματικά ξέρουμε ότι αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από μία συνάρτηση· μολαταύτα η έννοια της συνάρτησης είναι ξένη στα Στοιχεία. Ο Ευκλείδης δεν τη χρησιμοποιεί και ακόμη, δεν χρησιμοποιει κανενός είδους τύπους που θα όριζαν ενδεχομένως κάποιες συναρτήσεις. Λέγει ο Hartshorne στο Κεφ. I.3 του βιβλίου του The Theory of Area:

Από τον τρόπο που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης την έννοια του εμβαδού, συνάγεται ότι την θεωρεί ως μία σχέση ισοδυναμίας που ικανοποιεί τις κοινές έννοιες. Ειδικότερα:

1. *Ίσα χωρία έχουν ίσο περιεχόμενο.*
2. *Εάν δύο χωρία έχουν ίσο περιεχόμενο με κάποιο τρίτο, τότε έχουν ίσο περιεχόμενο.*
3. *Εάν ζεύγη χωρίων ίσου περιεχομένου προστεθούν κατά τρόπον ώστε να μην επικαλύπτονται για να σχηματίσουν μεγαλύτερα χωρία, τότε τα προκύπτοντα χωρία είναι ίσου περιεχομένου.*
4. *Το ίδιο και για την αφαίρεση σχημάτων. Σημειωτέον ότι η ισότητα περιεχομένου των αφαιρουμένων χωρίων δεν εξαρτάται από το που αφαιρούνται τα χωρία αυτά.*

---

[44] Ο Ευκλείδης λέγει 'των παραλληλογράμμων χωρίων' και με τον όρο αυτό εννοεί χωρία φραγμένα από παράλληλες ευθείες με τον επιπλέον περιορισμό ότι κάτι τέτοιο μπορεί να ισχύει μόνο για τετράπλευρα σχήματα. Ο όρος 'παραλληλόγραμμο' είναι Ευκλείδειος, σύμφωνα με τον Πρόκλο.

[45] =διαγώνιος του παραλληλογράμμου. Ο όρος 'διάμετρος ' χρησιμοπιήθηκε παντοιοτρόπως από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Λέγει λόγου χάρη ο Απολλώνιος στα 'Κωνικά': Σε κάθε καμφθείσα καμπύλη του επιπέδου, ονομάζω διάμετρο κάθε ευθεία που φερόμενη από την δοθείσα καμπύλη, διχοτομεί όλες τις ευθείες (χορδές) που φέρονται από την καμπύλη προς δοθείσα ευθεία. Εδώ καμπύλη είναι, όπως λ.χ, στον Αρχιμήδη, κάθε σύνθετη γραμμή που αποτελείται από ευθείες και καμπύλες που συνδέονται με οποιοδήποτε τρόπο μεταξύτους.

5. *Ημιχωρία χωρίων ίσου περιεχομένου έχουν ίσο περιεχόμενο.*[46]

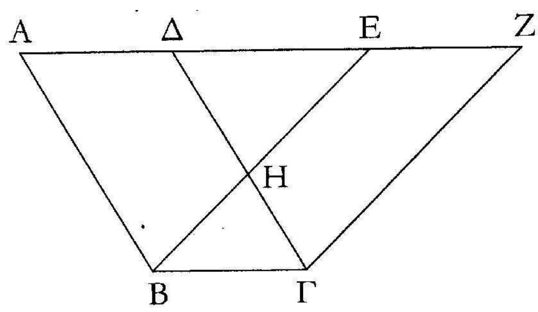
6. *Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους, το οποίο στην περίπτωση αυτή σημαίνει ότι εάν ένα χωρίο περιέχεται πλήρως σε ένα άλλο, τότε τα δύο χωρία δεν μπορεί να είναι ίσου περιεχομένου.*[47]

Προκύπτει ότι στο σημείο αυτό ο Ευκλείδης εισάγει μία νέα μη ορισμένη έννοια, αυτή του ίσου περιεχομένου, ή της ισότητας όπως λέγει ο ίδιος, και χρησιμοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ως νέα αξιώματα που χαρακτηρίζουν την έννοια αυτή.

Πρόταση α′ 35.[48]

Τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται στην ίδια βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω παραλληλόγραμμα τα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ πάνω στην ίδια βάση ΒΓ και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, των ΑΖ, ΒΓ· λέγω ότι το ΑΒΓΔ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ.



Σχήμα 3.10: Πρόταση α′ 35.

Απόδειξη.

[46] Αυτό χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Πρότασης α′ 37.

[47] Τούτο χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Πρότασης α′ 39.

[48] Ο Πρόκλος λέγει, ότι τούτη η πρόταση είανι το πρώτο *τοπικόν* θεώρημα του Ευκλείδη: δηλαδή αναφέρεται σε *γεωμετρικούς τόπους*. Το σχόλιο του Πρόκλου είναι σημαντικό, διότι, στον ίδιο, τον Ευτόκιο και τον Πάππο μπορούμε μόνο να βασιστούμε για το οτιδήποτε είναι γνωστό από την αρχαιότητα περί γεωμετρικών τόπων. Αλλά ας δούμε τον ορισμό του Πρόκλου: *Καλώ τόπον γραμμής ή επιφανείας θέσιν ποιούσαν έν και το αυτόν σύμπτωμα.*

Διότι επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, η ΑΔ είναι ίση με την ΒΓ. Για τον ίδιο λόγο, η ΕΖ είναι ίση με την ΒΓ. Ώστε και η ΑΔ είναι ίση με την ΕΖ, και είναι κοινή η ΔΕ· άρα όλη η ΑΕ είναι ίση με όλη την ΔΖ.

Είναι όμως και η ΑΒ ίση με την ΔΓ· άρα οι ΕΑ, ΑΒ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΖΔ, ΔΓ.

Και η εντός γωνία ΖΔΓ είναι ίση με την εκτός γωνία ΕΑΒ. Άρα η βάση ΕΒ είναι ίση με τη βάση ΖΓ και το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΖΓ.

Αφαιρείται το κοινό ΔΗΕ· το λοιπό τραπέζιο ΑΒΗΔ είναι ίσο με το λοιπό τραπέζιο ΕΗΓΖ, και είναι κοινό το ΗΒΓ τρίγωνο. Άρα όλο το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ίσο με όλο το παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ.

Άρα, τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται στην ίδια βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους, Ο.Ε.Δ. □

Παραλλαγή της παραπάνω πρότασης είναι η

Πρόταση α′ 36.

Τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται σε ίσες βάσεις και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.[49]

Οι Προτάσεις α′ 37–40 λένε παρόμοια πράγματα για τρίγωνα, και η Πρόταση α′ 41 συνδέει παραλληλόγραμμα και τρίγωνα.

Στο σημείο αυτό η θεωρία του ίσου περιεχομένου διακλαδώνεται σε δύο κατευθύνσεις. Ο πρώτος κλάδος οδηγεί κατευθείαν στο Πυθαγόρειο Θεώρημα (Προτάσεις α′ 46–48) και ο δεύτερος κλάδος μέσω των Προτάσεων α′ 42–45 στο σημαντικό αποτέλεσμα της Πρότασης β′ 14: *Είναι δυνατό να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσου περιεχομένου με οποιοδήποτε τετράπλευρο χωρίο.* Ή με άλλα λόγια: Οιοδήποτε τετράπλευρο τετραγωνίζεται.

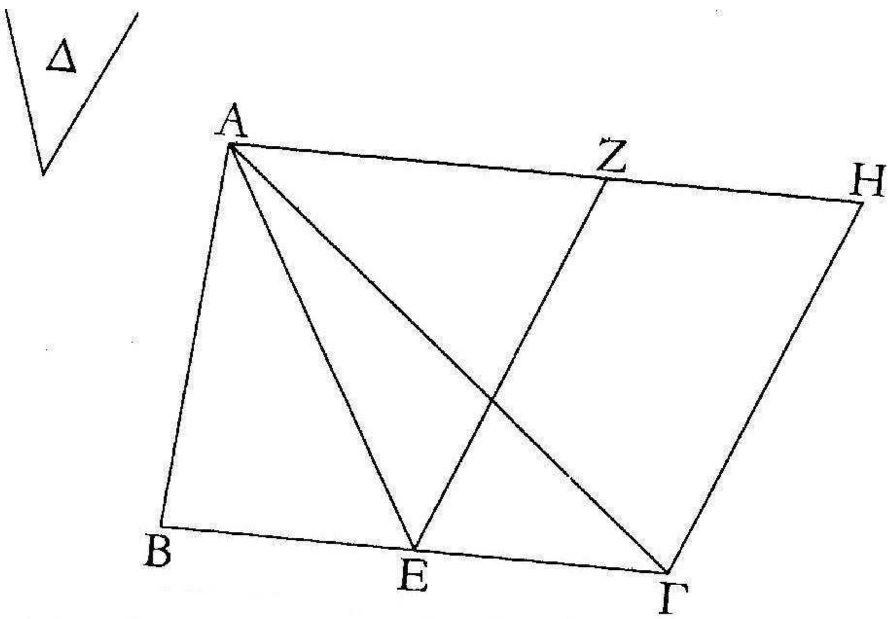
Στη γραμμή του Ευκλείδη, συζητούμε παρακάτω τις Προτάσεις α′ 42–45 των οποίων οι συνέχειες βρίσκονται στο Βιβλίο β′.

Πρόταση α′ 42.

[49]Σύμφωνα με τον Πρόκλο, οι Προτάσεις α′ 35 και 36 ανήκουν σε αυτό που οι Αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν ο 'παράδοξος τόπος '· υπό την έννοια ότι φαίνεται παράδοξο στον αρχάριο ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου παραμένει αναλλοίωτο, ενώ κάποια μήκη πλευρών μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα! Ο 'παράδοξος τόπος ', ή 'τόπος αναλυόμενος ', ή 'τόπος αστρονομούμενος ' ήταν η συλλογή τέτοιων προτάσεων, σε αντιστοιχία με τα *δείγματα* των Στωϊκών.

Να κατασκευαστεί, σε δοθείσα ευθύγραμμη γωνία, [50] *παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν τρίγωνο.*

Η απόδειξη είναι αρκετά εύκολη. Δέστε και το παρακάτω σχήμα όπου δίδεται το $\triangle$ΑΒΓ, η $\angle$ΖΕΓ και το Ε είναι το μέσον του ΒΓ.



Σχήμα 3.11: Πρόταση α′ 42.

Πρόταση α′ 43.

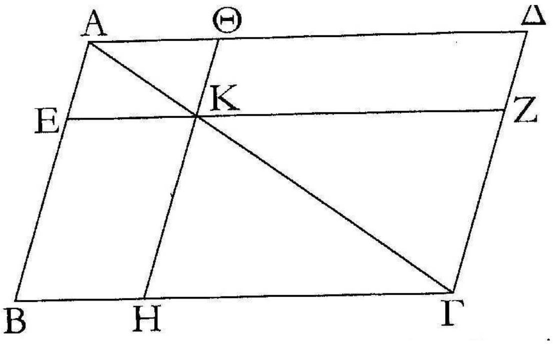
Σε κάθε παραλληλόγραμμο, τα παραπληρώματα[51] *των παραλληλογράμμων γύρω από τη διαγώνιο είναι ίσα μεταξύ τους.*

Το παρακάτω σχήμα (σχήμα 11)χρησιμοποιείται ξανά και ξανά στα Στοιχεία στην 'ορθογώνιά' του έκδοση. Μάλιστα, αρκετές φορές ο Ευκλείδης το καλεί

[50] Η δοθείσα γωνία θα είναι ορθή στις επόμενες εφαρμογές του Ευκλείδη. Για αυτό το λόγο, μπορούμε κάλλιστα να περιοριστούμε σ′ αυτήν την περίπτωση στις επόμενες προτάσεις. Δηλαδή στις Προτάσεις α′ 43–45 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα 'παραλληλόγραμμο' και 'δοθείσα γωνία' με τα 'ορθογώνιο' και 'ορθή γωνία', αντίστοιχα. Το Βιβλίο β′ ασχολείται μόνο με ορθογώνια.

[51] Ο όρος αυτός εξηγείται παρακάτω.

απλώς 'το σχήμα'. Το σημείο Κ της διαγωνίου του ΑΒΓΔ και οι ευθείες ΕΖ, ΗΘ είναι παράλληλες με τις πλευρές. Ο Ευκλείδης δηλώνει το ΒΗΚΕ απλώς με ΒΚ και το ΚΖΔΘ με ΚΔ. Τούτα τα παραλληλόγραμμα είναι τα '*λεγόμενα παραπληρώματα*'.



Σχήμα 3.12: Πρόταση α′ 43.

Απόδειξη της Πρότασης α′ 43.

Από την Πρόταση α′ 34, △ΑΒΓ=△ΔΑΓ. Παρόμοια, △ΗΚΓ=△ΖΚΓ και △ΑΕΓ=△ΚΗΑ. Αφαιρώντας τα δύο μικρότερα τρίγωνα από το μεγαλύτερο σε κάθε πλευρά της διαγωνίου, προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Πρόταση α′ 44.

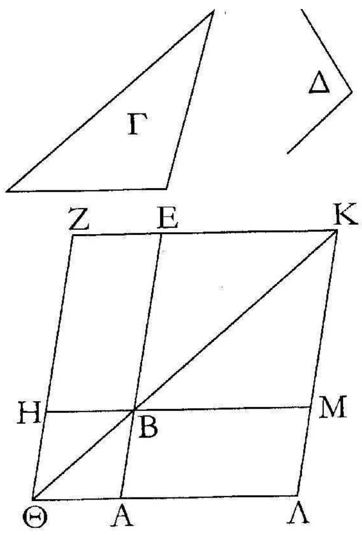
Να εφαρμοστεί[52] *παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν τρίγωνο επάνω σε δοθείσα ευθεία με δεδομένη γωνία.*

Κατασκευή. Έστω το △Γ και η ευθεία ΑΒ όπως στο σχήμα 3.12. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΒΕΖΗ ίσου περιεχομένου με το △Γ μέσω της Πρότασης α′ 42. Το τοποθετούμε έτσι ώστε η ΒΕ να είνει προέκταση της ΑΒ και κατασκευάζουμε το ΒΗΘΑ. Προεκτείνουμε τις ΖΕ και ΘΒ μέχρι να συναντηθούν στο Κ.[53] Συμπληρώνουμε τώρα το σχήμα. Το ΒΜΑΛ έχει πλευρά την ΑΒ και λόγω της Πρότασης α′ 43 είναι ίσου περιεχιομένου με το ΒΕΖΗ.

Πρόταση α′ 45.

[52] Λέγοντας 'εφαρμοστεί', ο Ευκλείδης εννοεί να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο με πλευρά τη δοθείσα, γωνία τη δοθείσα, και εμβαδό ίσο με αυτό του δοθέντος τριγώνου.

[53] Ο Ευκλείδης δείχνει ότι τούτο επιτυγχάνεψαι λόγω του 5ου αξιώματος.



Σχήμα 3.13: Πρόταση α′ 44.

Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο χωρίο[54] *με δεδομένη γωνία.*

Ο Ευκλείδης χωρίζει το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα, και μέσω της Πρότασης α′ 44 τα μετασχηματίζει σε δύο παραλληλόγραμμα που έχουν μία κοινή πλευρά. Συνδέοντάς τα, παίρνει το επιθυμητο παραλληλόγραμμο. Η απόδειξη γίνεται λεπτομερώς, δικαιολογώντας κάθε της βήμα. (Σχήμα 3.13).

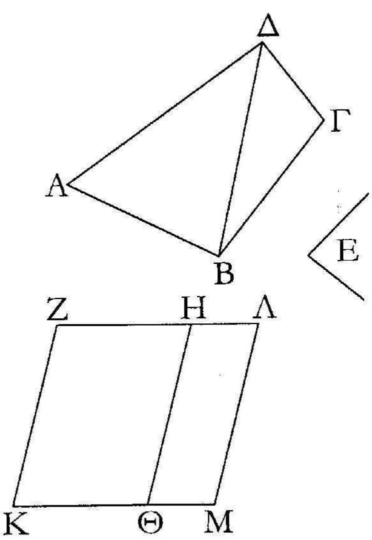
3.5.1 Μερικά σχόλια επάνω στις Προτάσεις α′ 44/45

Ας χρησιμοποιήσουμε προς στιγμή σύγχρονη ορολογία και ας υποθέσουμε ότι οι Προτάσεις α′ 44/45 αναφέρονται σε ορθογώνια. Το εμβαδόν A του ορθογωνίου με πλευρές (μήκους) a, b δίδεται από την $A = ab$. Στην α′ 44 έστω R το δοθέν ορθογώνιο και a η δοθείσα πλευρά. Με αυτή τη φρασεολογία, το πρόβλημα της α′ 45 δεν είναι τίποτε άλλο από το να βρεθεί η λύση της γραμμικής εξίσωσης

$$R = ax$$

[54] Ο Ευκλείδης λέγει *ευθυγράμμῳ*, και εννοεί με σύγχρονους όρους ένα κυρτό πλύγωνο. Είναι ενδιαφέρον το ότι ενώ η απόδειξη ασχολείται μόνο με την περίπτωση του τετραπλεύρου, περνά εύκολα στην γενική, χρησιμοποιώντας επαγωγή. Εντψπωσιακός επίσης είναι και ο τριγωνισμός του σχήματος.

όπου x είναι η δεύτερη πλευρά του επιθυμητού νέου τριγώνου. Θεωρούμενη υπό αυτό το πρίσμα, η α′ 45 είναι άλγεβρα μεταμφιεσμένη σε γεωμετρία. Δεν είναι σκοπός αυτών των σημειώσεων να πάρουν θέση στην παλαιά διαμάχη των ιστορικών που πιστεύουν ότι αυτή η ερμηνεία δεν δικαιολογείται και είναι αναχρονιστική, και (κάποιων) μαθηματικών που πιστεύουν ότι οι αλγεβρικοί τύποι όπως ο παραπάνω είναι η ισομορφική εικόνα της γεωμετρικής κατάστασης και άρα είναι ο σωστός τρόπος να ερμηνεύουμε τον Ευκλείδη.[55] Το ίδιο πρόβλημα ανακύπτει και στο Βιβλίο στ′.



Σχήμα 3.14: Πρόταση α′ 45.

3.6 Βιβλίο α′, Μέρος Δ: Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

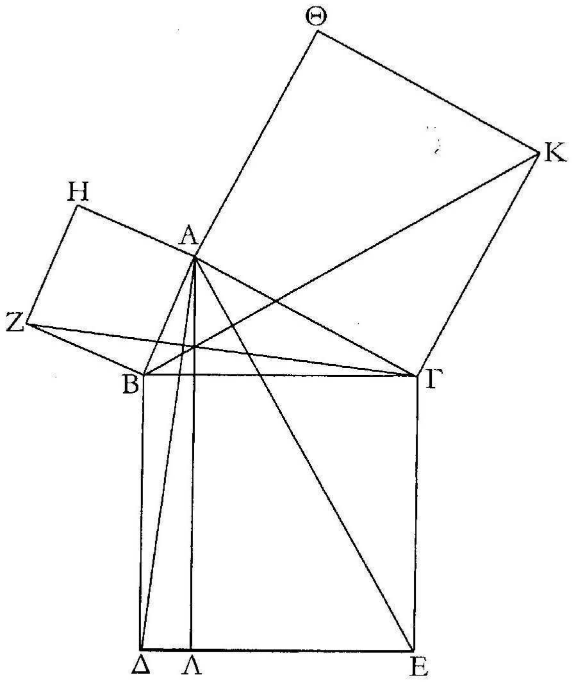
Στην Πρόταση α′ 46 ο Ευκλείδης δείχνει πως κατασκευάζεται τετράγωνο επάνω σε δοθείσα ευθεία· η α′ 47 είναι το περίφημο Πυθαγόρειο θεώρημα και η α′ 48 το αντίστροφό του.

Πρόταση α′ 47.

[55] Οι τελευταίοι είναι οι θιασώτες της λεγόμενης ‘Γεωμετρικής Άλγεβρας ’.

Στα ορθογώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της υποτείνουσας την ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ που έχει ορθή την γωνία ΒΑΓ· λέγω ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΓ.



Σχήμα 3.15: Πρόταση α′ 47. Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Απόδειξη.

Διότι έστω ότι έχει γραφεί το τετράγωνο ΒΔΕΓ επάνω στην ΒΓ, και τα ΗΒ, ΘΓ επάνω στις ΒΑ, ΑΓ.[56] Και από το Α, άγεται η ΑΛ παράλληλη με κάθε μία από τις ΒΔ, ΓΕ και συνδέονται οι ΑΔ, ΖΓ.

Και επειδή κάθε μία από τις γωνίες ΒΑΓ, ΒΑΗ είναι ορθή, πρέπει οι δύο ευθείες ΑΓ, ΑΒ που δεν βρίσκονται στο ίδιο μέρος, να κάνουν τις εφεξής γωνίες

[56] Όλα τα τετράγωνα μπορούν να κατασκευαστούν λόγω της Πρότασης α′ 46. Επίσης, τα ΗΒ, ΘΓ είναι τα τετράγωνα ΗΖΒΑ και ΘΑΓΚ αντίστοιχα. Ο Ευκλείδης συνηθίζει να συμβολίζει τα παραλληλόγραμμα με τα άκρα της μιας διαγωνίου τους.

με κάποια ευθεία ΑΒ, στο σημείο Α, ίσες με δύο ορθές. Άρα η ΓΑ βρίσκεται στην ευθεία ΑΗ.[57] Για τον ίδιο λόγο, και η ΒΑ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΑΘ.

Και επειδή η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με την ΖΒΑ· είναι η κάθε μία ορθή· έστω ότι προστίθεται και στις δύο η ΑΒΓ. Άρα όλη η ΔΒΑ είναι ίση με όλη την ΖΒΓ.

Και επειδή η μεν ΔΒ είναι ίση με την ΒΓ, η δε ΖΒ με την ΒΑ, πρέπει οι ΔΒ, ΒΑ να είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΒΓ, ΖΒ[58] και η γωνία ΔΒΑ ίση με τη γωνία ΖΒΓ.

Άρα η βάση ΑΔ είναι ίση με τη βάση ΖΓ, και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ίσο με το τρίγωνο ΖΒΓ.[59]

Και είναι του μεν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιο το παραλληλόγραμμο ΒΛ γιατί έχουν την ίδια βάση τη ΒΔ και βρίσκονται και τα δύο εντός των ίδιων παραλλήλων ΒΔ, ΑΛ· του δε τριγώνου ΖΒΓ είναι διπλάσιο το τετράγωνο ΗΒ, διότι πάλι έχουν την ίδια βάση ΖΒ και βρίσκονται εντός των ίδιων παραλλήλων ΖΒ, ΗΓ.

[Τα διπλάσια ίσων πραγμάτων είναι ίσα.][60] Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΗΒ.[61]

Ομοίως, εάν συνδεθούν οι ΑΕ, ΒΚ, μπορεί να δειχθεί ότι και το παραλληλόγραμμο ΓΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΘΓ. Άρα όλο το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων ΗΒ, ΘΓ. Και είναι το μεν τετράγωνο ΒΔΕΓ αυτό που αναγράφεται από την ΒΓ, τα δε ΗΒ, ΘΓ αυτά που αναγράφονται από τις ΒΑ, ΑΓ. 'Αρα το τετράγωνο της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ, ΑΓ.

Άρα, στα ορθογώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της υποτείνουσας την ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία, Ο.Ε.Δ. □

Υπάρχουν δεκάδες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος.[62] Ο Πρόκλος

[57] Από την Πρόταση α′ 14. Αυτό είναι το πρώτο αποφασιστικό σημείο της απόδειξης.

[58] ΖΒ, ΒΓ στο αρχαίο κείμενο, κάτι που είναι προφανής παράβλεψη του αντιγραφέα.

[59] Πρόταση α′ 4.

[60] Εντός παρενθέσεως και στο αρχαίο κείμενο. Πρόκειται περί άλλης μίας κοινής έννοιας.

[61] Εδώ βρίσκεται το δεύτερο αποφασιστικό σημείο της απόδειξης. Ο Ευκλείδης ουσιαστικά δείχνει ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΖΒΓ είναι αντίστοιχα ίσου περιεχομένου με τα τρίγωνα ΒΖΑ και ΒΔΛ που δεν φαίνονται στο σχήμα! Όμως, από την Πρόταση α′ 41, τούτα είναι ίσου περιεχομένου με τα ΖΒΓ και ΒΑΔ αντίστοιχα.

[62] Δείτε λ. χ. την ιστοσελίδα http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ για γενικές πληροφορίες και πατήστε το σύνδεσμο του δεύτερου σχολίου για να δείτε 81(!) αποδείξεις του Π.Θ.

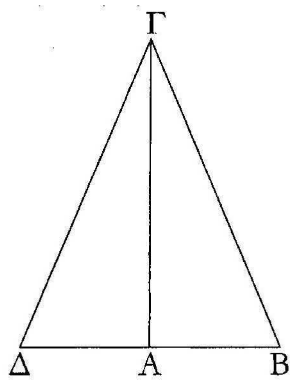
αποδίδει την παραπάνω απόδειξη προσωπικά στον Ευκλείδη. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι πρόκειται περί ενός θαυμάσιου δείγματος μαθηματικής εργασίας· δεν υπάρχουν ούτε ειδικά 'κόλπα' ούτε χρησιμοποιείται κάποιος τύπος. Με απλό τρόπο το τετράγωνο ΗΖΒΑ μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο ΒΛ, αλλά παρόλη την απλότητά του, το επιχείρημα που υποβόσκει δεν είναι καθόλου τετριμμένο.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι τόσο θεμελιώδες για τα μαθηματικά του σήμερα όσο ήταν και στην εποχή του Ευκλείδη. Είναι ο πρόγονος όλων των διαφορετικών ειδών των μετρικών και των τετραγωνικών μορφών, και θεωρημάτων όπως το $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$. Μέσω της γενίκευσής του, του νόμου των συνημιτόνων, και του αντίστοιχου εσωτερικού γινομένου σε διανυσματικούς χώρους, το θεώρημα του Πυθαγόρα διεισδύει στα μαθηματικά τόσο μακρυά όσο φτάνει το μάτι.

Πρόταση 48.

Εάν σε τρίγωνο το τετράγωνο της μίας πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η περιεχόμενη από τις λοιπές πλευρές γωνία είναι ορθή.

Γιατί έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ότι το τετράγωνο της μιας πλεράς του ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ, ΑΓ του τριγώνου· λέγω ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ορθή.



Σχήμα 3.16: Πρόταση α΄ 47. Το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Απόδειξη.

Έστω ότι από το Α άγεται η ΑΔ σε ορθή θωνία με την ΑΓ στο σημείο Α[63]

[63]Πρόταση α΄ 11.

και έστω ότι η ΑΔ είναι ίση με την ΒΑ[64] και συνδέεται η ΔΓ.

Επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΑΒ, είναι ίσο και το τετράγωνο της ΔΑ με το τετράγωνο της ΑΒ. Προστίθεται και στις δύο το τετράγωνο της ΑΓ. Άρα το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ, ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ, ΑΓ.

Αλλά το τετράγωνο της μεν ΔΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ και ΑΓ· διότι η γωνία ΔΑΓ είναι ορθή.[65] Το τετράγωνο της δε ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ, ΑΓ, διότι υποτέθηκε.

Άρα το τετράγωνο της ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΒΓ, άρα η πλευρα ΔΓ είναι ίση με την ΒΓ·[66] και επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΑΒ και είναι κοινή η ΑΓ, οι ΔΑ, ΑΓ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΒΑ, ΑΓ. Και η βάση ΔΓ είναι ίση με τη βάση ΒΓ, άρα η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΒΑΓ. Όμως είναι ορθή η ΔΑΓ· άρα είναι και ορθή η ΒΑΓ.

Εάν άρα σε τρίγωνο το τετράγωνο της μίας πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η περιεχόμενη από τις λοιπές πλευρές γωνία είναι ορθή, Ο.Ε.Δ. □

Ο συνδυασμός των Προτάσεων α′ 47/48 αποτελεί το πλήρες Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε σε ελεύθερη μετάφραση ένα σοννέτο του Γερμανού ποιητή Adelbert von Chamisso. Σύμφωνα με το μύθο, ο Πυθαγόρας θυσίασε εκατό βόδια (μία *εκατόμβη*) στους θεούς αφού ανακάλυψε το θεώρημα.[67]

Adelbert von Chamisso: Η Αλήθεια

Η ΑΛΗΘΕΙΑ: χαρακτηριστικό της η ΑΙΩΝΙΟΤΗΤΑ
Από τότε που στον ανόητο κόσμο το φως έγινε γνωστό
το θεώρημα του ΠΥΘΑΓΟΡΑ σήμερα είναι τόσο σωστό
όσο ήταν και τότε που πρωτοδείχθηκε στην ΑΔΕΛΦΟΤΗΤΑ.

[64] Πρόταση α′ 3.

[65] Πρόταση α′ 47.

[66] Άλλη μία επιπρόσθετη κοινή έννοια. Λίγο παρακάτω χρησιμοποιείται και η αντίστροφή της.

[67] Κατ άλλους, το θεώρημα ανκαλύφθηκε από τον μαθητή του *Ίππασο τον Μεταποντίνο* τον οποίον αμέσως μετά έπνιξαν οι συμμαθητές του για να μη γίνει γνωστό το θεώρημα στον υπόλοιπο κόσμο, μιας και σήμαινε την κατάρρευση της Σχολής του Πυθαγόρα. Αλλά φαίνεται ότι διαρροές υπήρχαν από τότε… Δείτε και το παρακάτω Κεφάλαιο 5.

Οι ΘΕΟΙ που του έστειλαν αυτή την αχτίδα από φως
συμβολικά σ΄ αυτούς ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ θυσίασε:
Εκατό βόδια, ψημένα, κομμένα και σε φέτες τεμάχισε
Εκφράζοντάς τους το ευχαριστώ του, προς τέρψη τους προφανώς.

Τα βόδια, από εκείνη τη μέρα, όταν ακούν στα μονοπάτια τους
ότι μία καινούρια αλήθεια μπορεί να ξεπροβάλλει απ΄ το κενό
αυτοστιγμεί τρέχουν να ξεφύγουν με δαιμονιώδη ρυθμό.

Από τον ΠΥΘΑΓΟΡΑ για πάντα θα πανικοβάλλονται-
Πολύ αδύναμα να απωθήσουν την ισχυρότητα των ακτίνων που εκπέμπονται
του ΦΩΤΟΣ, τρέμουν και σφαλίζουν τα μάτια τους.