Κεφάλαιο 4

Πηγές των μαθηματικών ΙΙ: Το Αίτημα των Παραλλήλων

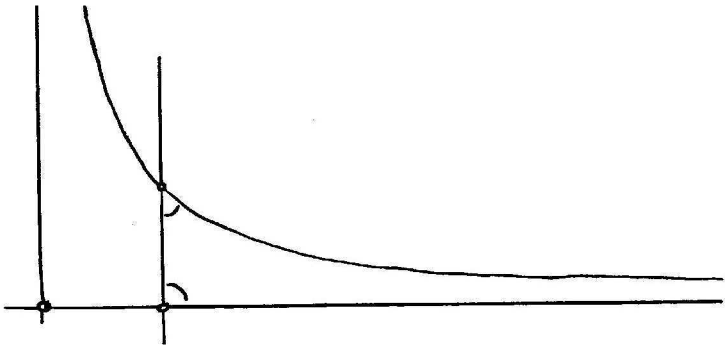
Η συζήτηση για το αξίωμα των παραλλήλων υπήρξε η οδηγός δύναμη για την αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών. Στα παρακάτω περιγράφουμε συνοπτικά την εξέλιξη της συζήτησης αυτής στην ιστορία των μαθηματικών.

Οι ιστορικοί γενικά θεωρούν ότι η εισαγωγή του 5ου Αιτήματος και της θεωρίας των παραλλήλων γενικότερα, ήταν σχετικά πρόσφατη στους Ευκλείδειους χρόνους. Πιθανόν να είχε προηγηθεί ένας ορισμός των παραλλήλων του ιδίου τύπου με τον Ορισμό α΄ 17 της διαμέτρου του κύκλου. Εκει, η διάμετρος ορίζεται όχι απλώς ως η ευθεία που φέρεται από το κέντρο του κύκλου, αλλα επιπρόσθετα, τονίζεται ότι η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο. Συνακόλουθα, ένας ορισμός των παραλλήλων που θα μπορούσε να είχε υπάρξει, θα εξασφάλιζε την ύπαρξη, την μοναδικότητα, αλλά και το ότι θα μπορούσαν να κατασκευαστούν με την χρήση των εναλλάξ, ή απλούστερα, των ορθών γωνιών. Αυτές οι ιδιότητες των παραλλήλων ήταν και εκείνη την εποχή αρκετά φυσιολογικές σε αρχιτέκτονες και οικοδόμους, οι οποίοι εργάζονταν συνεχώς με παράλληλα στρώματα λίθων και είχαν συνηθίσει να κάνουν πολύ ακριβείς μετρήσεις.

Ο Πρόκλος σε ένα σχόλιό του δίδει μία αχνή υπόδειξη για την αρχή του αιτήματος των παραλλήλων (Αίτ. 5 στο εξής).

Το ότι υπάρχουν ευθείες που πλησιάζουν απεριόριστα η μία την άλλη αλλά δεν συναντώνται ποτέ δείχνει παράλογο και παράδοξο, μολαταύτα είναι αληθές και έχει βεβαιωθεί για άλλα είδη γραμμών.

Πιθανόν το πιο εμφατικό παράδειγμα αυτών των γραμμών είναι της υπερβολής και των ασυμπτώτων της. (Βλ. Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Υπερβολή και ασύμπτωτή της.

Αποδεχόμενοι τις 'μεικτές ' γωνίες, τούτο είναι ένα 'αντιπαράδειγμα' του Αιτ. 5, ή τουλάχιστον θα μπορούσε να τραβήξει την προσοχή των μαθηματικών της εποχής.

Ο πρώτος που έγραψε περί κωνικών τομών ήταν ο *Μέναιχμος* ($\sim 380 - 320$ π.Χ.). Άν η παραπάνω εικασία είναι σωστή, αυτό θα τοποθετούσε την εισαγωγή του Αιτ. 5 γύρω στο 340 π.Χ. Άλλοι ιστορικοί αποδίδουν το Αίτ. 5 στον ίδιο τον Ευκλείδη. Ο Αριστοτέλης δεν αναφέρει πουθενά τα αξιώματα του Βιβλίου α΄.

Συγκρινόμενο με τα άλλα αιτήματα, το Αίτ. 5 είναι μάλλον πολύπλοκο και όχι τόσο προφανές όσο ας πούμε η ισότητα όλων των ορθών γωνιών. Για αυτό το λόγο, οι μαθηματικοί της αρχαιότητας προσπάθησαν να το εξαλείψουν, προσπαθώντας είτε να το αποδείξουν, ή να το αντικαταστήσουν με κάποιο άλλο, πιο εύλογο αξίωμα. Κανείς όμως δεν τα κατάφερε.

Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε ξανά ύστερα από περίπου 1500 χρόνια. Ο John Wallis έδωσε μία ανοικτή διάλεξη στην Οξφόρδη το 1663 περί του θέματος και απέδειξε το ακόλουθο:

Εάν υπάρχουν όμοια τρίγωνα διαφορετικού εμβαδού, τότε το Αίτ. 5 αληθεύει. [1]

Το αποτέλεσμα τούτο αντικαθιστά το Αίτ. 5 με κάποιο πλέον ευλογοφανές. Ανάμεσα στους μαθηματικούς που ακολούθησαν τον δρόμο του Wallis που ξε-

[1] Ας παρατηρήσουμε ότι στην σφαιρική ή στην υπερβολική γεωμετρία όπου δεν αληθεύει το Αίτ. 5, προκύπτει άμεσα από το αποτέλεσμα του Wallis ότι δεν υπάρχουν όμοια τρίγωνα διαφορετικού εμβαδού! Αυτό ισχύει απολύτως, καθόσον εκεί, δύο όμοια τρίγωνα είναι αναγκαστικά ίσα.

κινούσε από την άρνηση του Αιτ. 5 και οδηγούσε σε πιθανά αποτελέσματα που αντέκρουαν κατεστημένα θεωρήματα, ήταν ο ιησουΐτης μοναχός Girolamo Saccheri, ο οποίος το 1793 δημοσίευσε ο βιβλίο του *Ο Ευκλείδης απαλλαγμένος από κάθε ελάττωμα.* Ο Saccheri θεώρησε εκεί ένα τετράπλευρο που κατασκευάζεται με τρεις ορθές γωνίες. Τότε, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για την λοιπή γωνία: Μπορεί να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Η περίπτωση της ορθής είναι ισοδύναμη με το Αίτ. 5. Κατάφερε να βρει μία αντίθεση υποθέτοντας ότι η γωνία είναι αμβλεία. (Η αντίθεση ήταν το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν ευθείες απείρου μήκους. Αυτή είναι η κατάσταση στη σφαίρα).

Από την υπόθεση της οξείας γωνίας, κατέληξε σε πολλά συμπεράσματα, αλλά κανένα από αυτά δεν ερχόταν σε αντίθεση με γνωστό αποτέλεσμα. Το 1766 ο Johann Heinrich Lambert συνέγραψε ένα άρθρο με τίτλο 'Η θεωρία των παραλλήλων ευθειών' που δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του το 1786. Φαίνεται ότι σκεπτόταν ότι μπορεί να κατασκευαστεί μία γεωμετρία από την υπόθεση του Saccheri της οξείας γωνίας και χρησιμοποιεί τις Προτάσεις α΄ 16/17 ως στοιχεία του ότι ο Ευκλείδης πρέπει να είχε την ίδια γνώμη.

Τελικά, γύρω στα 1830 τρείς μαθηματικοί ήταν πλήρως πεπεισμένοι για την ύπαρξη 'μη-Ευκλειδείων γεωμετριών': ο Carl Friedrich Gauss, ο János Bolyai και ο Nikolay Ivanovich Lobachevsky. Όμως ο μεν Gauss δεν δημοσίευσε ποτέ τα αποτελέσματά του, ενώ οι εργασίες των άλλων δύο ήταν πολύ δύσκολο να διαβαστούν. Έτσι, το αντικείμενο παρέμενε σε νάρκη, έως τον θάνατο του Gauss (1855) και την σχεδόν ταυτόχρονη δημοσίευση των ιδιωτικών του επιστολών. Τότε η κατάσταση άλλαξε δραματικά με την επιπρόσθετη δημοσίευση των εργασιών του Riemann περί αφηρημένων γεωμετριών και την εξέλιξη της διαφορικής γεωμετρίας. Η υπόθεση της οξείας γωνίας ονομάστηκε τότε 'υπερβολική γεωμετρία' και η πιθανότητα της πιθανής αντίθεσης με γνωστό αξίωμα επιλύθηκε από τον Beltrami το 1868, ο οποίος την παρέστησε ως τη γεωμετρία μίας επιφάνειας με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. ο Felix Klein βρήκε το 1871 το λεγόμενο Beltrami–Klein μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας και το 1882 ο Poincaré έθεσε την υπερβολική γεωμετρία εντός του πλαισίου της μιγαδικής ανάλυσης. Το ερώτημα για το αξίωμα των παραλλήλων απαντήθηκε οριστικά γύρω στο 1880: Υπάρχουν τρεις κατηγορίες επίπεδων γεωμετριών που ικανοποιούν όλα τα άλλα Ευκλείδεια αξιώματα: η ελλειπτική γεωμετρία (επάνω στη σφαίρα, με ταυτισμένα τα αντιποδικά σημεία, υπόθεση της αμβλείας γωνίας) με καθόλου παράλληλες· η Ευκλείδεια γεωμετρία με το Αίτ. 5 (υπόθεση της ορθής γωνίας, μοναδική παράλληλος) και η υπερβολική γεωμετρία (υπόθεση της οξείας γωνίας, άπειρες παράλληλες).[2]

Υπάρχουν όμως και άλλα στην ιστορία των γεωμετρικών αξιωμάτων. Το 1882 ο Moritz Pasch ξεκαθάρισε το αντικείμενο της διάταξης των σημείων, το οποίο ο Ευκλείδης χειρίζεται διαισθητικά. Και το έκανε αυτό, προσθέτοντας αξιώματα περί διάταξης στα ήδη υπάρχοντα του Ευκλείδη. Αλλά για τον Pasch, η γεωμετρία εξακολουθούσε να είναι επιστήμη του φυσικού χώρου. Αυτό το τελευταίο εμπόδιο ξεπεράστηκε από τον David Hilbert (1889) στα *Θεμέλια της γεωμετρίας* του (Grundlagen der Geometrie.) Ο Hilbert μας λέγει ότι τα αντικείμενα της γεωμετρίας καλούνται σημεία, ευθείες, επίπεδα κλπ. αλλά αυτό γίνεται *κατά συνθήκη*. Θα μπορούσαμε να τα ονοματίσουμε με οποιουδήποτε είδους παράξενα ονόματα και να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Τούτα τα αντικείμενα ορίζονται μόνο 'πεπλεγμένα' από το τι έχει ειπωθεί για αυτά στα αξιώματα. Λόγου χάρη, ένα σημείο μπορεί να είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, ή ένας μιγαδικός αριθμός, κ.ο.κ. Έτσι, η μελέτη της γεωμετρίας μετασχηματίστηκε από την μελέτη του χώρου στην μελέτη της λογικής αλληλεξάρτησης συγκεκριμένων προτάσεων περί κάποιων αορίστων αντικειμένων.

Ο Hilbert κατέταξε τα αξιώματά του σε πέντε κατηγορίες: αξιώματα έκτασης όπως 'Δύο διαφορετικά σημεία κείνται σε μία μοναδική ευθεία', αξιώματα διάταξης, αξιώματα ισότητας, το αξίωμα των παραλλήλων και τέλος, τα αξιώματα της συνέχειας.

Τα αξιώματα της συνέχειας εξασφαλίζουν το ότι τα σημεία μίας ευθείας μπορούν να ταυτιστούν με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Με την βοήθεια αυτού αποδεικνύει το κύριο θεώρημά του:

Οι πέντε ομάδες αξιωμάτων καθορίζουν έως ισομορφισμού το Ευκλείδειο επίπεδο κατά μοναδικό τρόπο. Μπορεί να θεωρηθεί ως το επίπεδο της αναλυτικής γεωμετρίας υπεράνω του σώματος των πραγματικών αριθμών.

Σε ένα παράρτημα του βιβλίου του ο Hilbert παρουσιάζει το πρώτο αξιωματικό σύστημα για τους πραγματικούς αριθμούς. Με αυτό σαν σημείο εκκίνησης, η αξιωματική μέθοδος κυριάρχησε στα μαθηματικά του εικοστού αιώνα.[3]

---

[2]Στν ελλειπτική γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι $> \pi$ στην Ευκλείδεια είναι $= \pi$ και στην υπερβολική είναι $< \pi$.

[3]Ο Hilbert πίστευε ακράδαντα στη δύναμη της συνολοθεωρίας του Georg Cantor. Και θεωρούσε ότι τούτη επιτρέπει την απαλλαγή των μαθηματικών από κάθε είδους παράδοξα (δηλαδή προτάσεις ταυτογχρόνως αληθείς και ψευδείς). Αλλά, το 1940 ο Kürt Gödel απέδειξε, ότι οποαδήποτε αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών εμπεριέχει παράδοξα. Ευτυχώς για τη γεωμετρία, το θεώρημα του Gödel δεν αποτέλεσε για αυτήν ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τη σχολή του Πυθαγόρα...