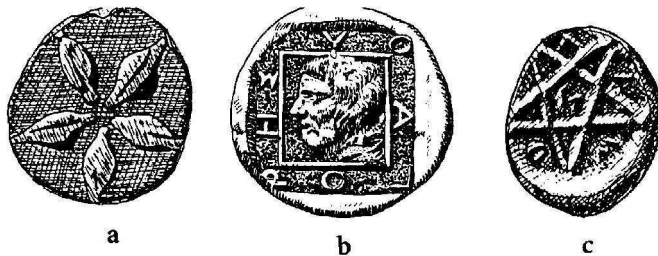


Κεφάλαιο 5

Πηγές των μαθηματικών ΙΙΙ: Πυθαγόρας ο Σάμιος

Ο Πυθαγόρας έζησε γύρω στο 570–490 π. Χ. Η μόνη αχνά προσδιορισμένη ημερομηνία στη ζωή του είναι το 530, όταν έφυγε από τη Σάμο για να εγκατασταθεί στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας (Μεγάλης Ελλάδας). Εκεί ίδρυσε μία θρησκευτική και φιλοσοφική σχολή η οποία σύντομα απέκτησε ισχυρή πολιτική επιρροή στις Ελληνικές πόλεις της Κάτω Ιταλίας. Εκδιώχθηκε από τον Κρότωνα γύρω στο 500 για να εγκατασταθεί στο Μεταπόντιο της Σικελίας όπου και πέθανε. (Βλ. Σχήμα παρακάτω).



Σχήμα 5.1: (a) Νόμισμα του Μεταποντίου με ένα ‘πεντάγραμμα’ από σπόρους κριθαριού (γύρω στο 440 π.Χ. (b) Νόμισμα των Αβδήρων (γύρω στο 430 π.Χ.) όπου απεικονίζεται σε ιδεατό πορτραίτο ο (Π)ΥΘΑΓΟΡΗΣ. (c) Νόμισμα της Μήλου, πριν το 420 π.Χ. με πεντάγραμμα.

Οι Πυθαγόρειοι, όπως καλούνταν οι μαθητές του, συνέχισαν να εξασκούν

πολιτική επιρροή, έως ότου γύρω στα μέσα του πέμπτου αιώνα, μία επανάσταση των δημοκρατικών τους εκδίωξε οριστικά από τις πόλεις της Κάτω Ιταλίας. Κάποιοι απ' αυτούς πήγαν στη Σικελία και κάποιοι άλλοι στην μητροπολιτική Ελλάδα, όπου ίδρυσαν νέα κέντρα για τις δραστηριότητές τους. Οι τελευταίοι των Πυθαγορείων αναφέρονται γύρω στο 350 ως φτωχοί χορτοφάγοι περιπλανώμενοι προσκυνητές.

Η πόλη και η νήσος της Σάμου μαζί με τις γειτονικές Μίλητο και Έφεσο ήταν ανθίζοντα οικονομικά και διανοητικά κέντρα τον έκτο αιώνα π. Χ. Ο Θαλής και ο μαθητής του Αναξίμανδρος δίδαξαν στη Μίλητο το πρώτο μισό του έκτου αιώνα. Ο φιλόσοφος Ηράκλειτος ο Εφέσιος ήταν σύγχρονος του πυθαγόρα.

Δύο παραδείγματα πρακτικής γεωμετρίας καταδεικνύουν την ατμόσφαιρα της πόλης που μεγάλωσε ο Πυθαγόρας. Έξω από την πόλη της Σάμου¹ βρισκόταν το ιερό της Ήρας. Περίπου το 570 ανατέθηκε από την πόλη της Σάμου στους αρχιτέκτονες Ροίκο και Θεόδωρο η κατασκευή ενός νέου ναού κολοσιαίων διαστάσεων: Οι διαστάσεις του ήταν 52.5×105 μέτρα και οι 104 κίονες του είχαν ύψος 18 μέτρα. Η βάση κάθε κίονα είχε διάμετρο μέχρι 1.80 μέτρα και ζύγιζε περίπου 1500 κιλά η κάθε μία. Παρά τις μεγαλειώδεις διαστάσεις του, οι αρχιτέκτονες είχαν τις απαραίτητες γνώσεις για να κατασκευάσουν τον ναό χρησιμοποιώντας πηχάκια! Ο ναός αυτός ήταν το πρότυπο του λεγόμενου Ιωνικού ρυθμού.²

Το δεύτερο παράδειγμα υψηλής τεχνολογίας ήταν το περίφημο *Ευπαλίνειο όρυγμα*. Ήταν μία σήραγγα υδραγωγείου, μήκους 1 χιλιομέτρου που διέσχισε ένα βουνό και μετέφερε νερό στην πόλη της Σάμου. Το επαναστατικό ήταν ότι η σήραγγα ανοιγόταν ταυτόχρονα και από τις δύο πλευρές του βουνού. Οι εργάτες συναντήθηκαν στη μέση του βουνού έχοντας απόκλιση μόνο 10 μέτρων.³

Αυτό ήταν το υπόβαθρο της νεότητας του Πυθαγόρα. Πιθανόν να ταξίδεψε

¹Το σημερινό Πυθαγόρειο.

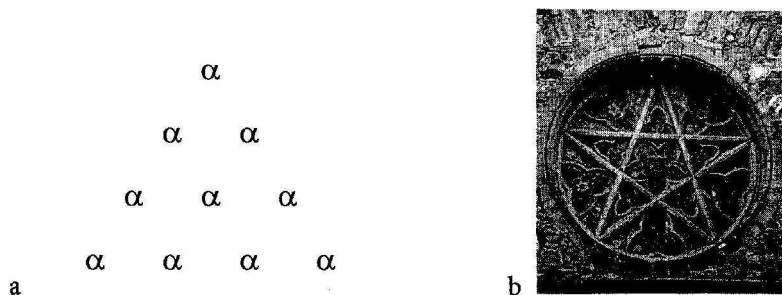
²Παρά όλα αυτά καταστράφηκε σχεδόν αμέσως κατά την επανάσταση που έφερε στην εξουσία τον τύραννο Πολυκράτη. Αυτός έδωσε αμέσως εντολή για την ανέγερση ενός ακόμα πιο επιβλητικού ναού 155 κίωνων. Ο σημερινός επισκέπτης βλέπει σήμερα μόνο έναν από τους 155 γιγάντιους κίονες του ναού της Ήρας. Για τα σχέδια του ναού δείτε την ιστοσελίδα http://www.greatbuildings.com/buildings/Fourth_Temple_of_Hera.html

³Πρόκειται για τους ανθρώπινους μετροπόντικες της εποχής. Με την διαφορά, ότι ήταν πιο γρήγοροι από τους σημερινούς και μάλλον άξιζαν περισσότερο τα χρήματα που τους πλήρωσαν οι πολίτες της Σάμου... Για το Ευπαλίνειο όρυγμα, δείτε λ.χ. την http://el.wikipedia.org/wiki/Ευπαλίνειο_όρυγμα

στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα, αλλά η Σάμος ήταν το κέντρο της εποχής.

Τα Μαθηματικά των Πυθαγορείων

Σχεδόν τίποτε δεν είναι γνωστό για τα μαθηματικά επιτεύγματα του ίδιου του Πυθαγόρα. Η προφορική παράδοση των μαθητών του γράφτηκε πολύ αργότερα, από τους μαθητές του αριστοτέλη. Είναι γνωστό ότι οι μαθητές του Πυθαγόρα στην Κάτω Ιταλία χωρίζονταν σε δύο ομάδες: τους *Ακουσματικούς*, αυτούς δηλαδή που επαναλάμβαναν τις θεωρίες του δασκάλου λέξη προς λέξη και τους *Μαθηματικούς*, αυτούς δηλαδή που αναλάμβαναν να τις εξερευνήσουν και να τις επεκτείνουν.⁴ οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν δύο σύμβολα: την αποκαλούμενη τετρακτύν, την διάταξη δέκα σημείων που αναπαριστούν το $1+2+3+4 = 10$, και το πεντάγραμμα (Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: (a) Η τετρακτύς κατά τον Ιάμβλιχο. (b) Πεντάγραμμα από την εκκλησία της Παναγίας του Lemgo στη Γερμανία (1300 μ.Χ.).

Συνήθως αποκαλούσαν το πεντάγραμμα *Υγεία*,⁵ αφού το πεντάγραμμα ήταν και ιατρικό σύμβολο. Αναμφίβολα, οι μουσικές αρμονίες κατείχαν κεντρική θέση στη διδασκαλία του Πυθαγόρα. Ο Μεσαιώνας τον γνώριζε ως τον Inventor Musicae, και όχι ως μαθηματικό.

⁴Κάθε μαθητής του Πυθαγόρα πάντως έπρεπε να διανύσει μία πενταετία απόλυτης σιωπής με μόνο άλλη ασχολία το άκουσμα της διδασκαλίας του Πυθαγόρα, ο οποίος μάλιστα δίδασκε πίσω από ένα παραπέτασμα. Ίσως αυτή η μέθοδος διδασκαλίας, παρότι μη πολιτικά ορθή, θα ήταν χρήσιμη για κάποιους φασαριόζους πολυλογάδες των αμφιθεάτρων. . .

⁵Όσοι έχουν διαβάσει τον κώδικα Ντα Βίντσι, του Dan Brown θα θυμούνται το σχετικό χωρίο, όπου ο συγγραφέας ρητά διαχωρίζει (και σωστά) το πεντάγραμμα του Πυθαγόρα από την πεντάλφα του Δαυίδ.

Γράφει ο Αριστοτέλης για τους Πυθαγορείους στα Μετά τα Φυσικά:

... Οι Πυθαγόρειοι αφιερώθηκαν στα μαθηματικά: ήταν οι πρώτοι που εξέλιξαν αυτή την επιστήμη, και έχοντας μεγαλώσει μέσα σε αυτήν, θεώρησαν ότι οι αρχές της είναι οι αρχές που διακατέχουν τα πάντα. Εφόσον από αυτές τις αρχές πρωταρχική είναι αυτή του αριθμού⁶ στους αριθμούς έβρισκαν πολλές ομοιότητες με τα υπάρχοντα πράγματα και με αυτά που αποκτούσαν ζωή—περισσότερο από το πύρ την γη και το ύδωρ...

Αφού επίσης είδαν ότι τα χαρακτηριστικά και οι αναλογίες των μουσικών κλιμάκων μπορούσαν να εκφραστούν με αριθμούς, από τότε όλα τα υπόλοιπα πράγματα θεωρούσαν ότι μπορούν να τεθούν εντός του πλαισίου των αριθμών...

Φαίνεται ότι υπήρχαν τέσσερα μέρη της πυθαγόρειας διδασκαλίας: Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονία (Μουσική) και Αστρονομία. Αυτό είναι το κλασικό quadrivium, μέρος των επτά ελεύθερων τεχνών. Κατά των Μεσαίων, τα τρία ‘τετριμμένα’ μέρη, το trivium, η γραμματική, η ρητορική και η διαλεκτική, ήταν απλώς τα εισαγωγικά για τα υπόλοιπα. Ο Πλάτων ήταν ο πρώτος που έδωσε στα μέρη τους quadrivium το όνομα Μαθήματα, αυτά που πρέπει να μαθευτούν.⁷

Αριθμητική

Όπως φαίνεται παραπάνω, ο Αριστοτέλης τονίζει τον προεξέχοντα ρόλο των αριθμών στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά. Στις εργασίες του Νικόμαχου που περιλαμβάνονται στο Βιβλίο η', υπάρχουν ίχνη της Πυθαγόρειας Αριθμητικής.

Εφαρμογή στα εμβαδά

Την πρώτη απλή εφαρμογή στα εμβαδά την είδαμε στην Πρόταση α' 44. Όπως φαίνεται αναλυτικά στο Βιβλίο β', το Πυθαγόρειο Θεώρημα λύνει προβλήματα που στη σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα εκφράζονται ως πολυωνυμικές εξισώσεις δεύτερου βαθμού με διακρίνουσα θετική.

Το παρακάτω σήμα παρουσιάζει την λύση της

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

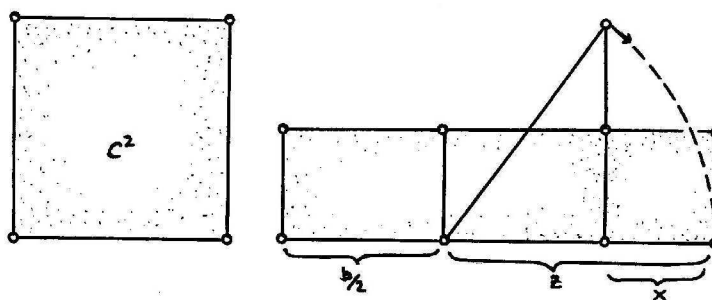
⁶Εννοούσαν τους ρητούς αριθμούς. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα οδήγησε στην ανακάλυψη των αρρήτων, κάτι που έδωσε ισχυρό κτύπημα στη Σχολή του Πυθαγόρα.

⁷Ο διαχωρισμός των σπουδών σε κλασικές και θετικές στο σημερινό Ελληνικό Λύκειο σίγουρα κάνει τα κόκκαλα του Πλάτωνα να τρίζουν...

όπου εδώ, c^2 είναι δοθέν εμβαδόν τετραγώνου και b το μήκος δοθέντου ευθύγραμμου τμήματος. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη κάποιου z που ικανοποιεί την

$$c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = z^2$$

από την οποία βρίσκουμε το x .



Σχήμα 5.3: Η γεωμετρική λύση διωνυμικής εξίσωσης.

Ασύμμετρα τμήματα

Όπως προείπαμε, και όπως αναφέρει και ο Πάππος, τα ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα με μη ρητό λόγο, ανακαλύφθηκαν λίγο ως πολύ από την αναζήτηση του μήκους της υποτείνουσας ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου.

Το Δωδεκάεδρο

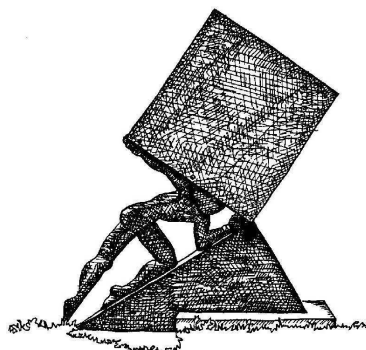
Ένας από τους ‘μαθηματικούς’ μαθητές του Πυθαγόρα ήταν και ο Ίππασος ο Μεταποντίνος. Αναφέρει ο Ιάμβλιχος:

... ήταν Πυθαγόρειος αλλά, όντας αυτός που συνέγραψε και δημοσίευσε την κατασκευή της σφαίρας με τα δώδεκα πεντάγωνα, χάθηκε σε ναύαγιο για την ασέβειά του, αλλά εξυμνήθηκε για την ανακάλυψή του.⁸

⁸Είδαμε μία διαφορετική έκδοση αυτής της ιστορίας στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η πολιτιστική σημασία του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σταματήσετε κάποιο τυχαίο ενήλικα στο δρόμο και τον ρωτήσετε τι θυμάται από τα σχολικά μαθηματικά, είναι περίπου σίγουρο ότι θα σας απαντήσει 'Το Πυθαγόρειο Θεώρημα'. Αυτό είναι μία απλή ενδειξη του γεγονότος ότι το Π.Θ. κατατάσσεται ως πολιτιστικό επίτευγμα πρώτου μεγέθους στην ανθρώπινη ιστορία, η γνώση του οποίου 'εγκαθιστάται' μέσα στη νόηση του κάθε μαθητή ως ένα δεδομένο της ζωής. Η σπουδαιότητά του έγκειται και σε ένα άλλο γεγονός: Ως μαθηματικό επίτευγμα, είναι πολιτιστική κληρονομιά διεθνής, δηλαδή ανεξάρτητη, γλώσσας, λαών, κλπ. Το Π.Θ. διδάσκεται και γίνεται κατανοητό σε όλο τον κόσμο. Και είναι πιο σημαντικό από την μουσική pop, ας πούμε. Ένα τελευταίο σχόλιο για Π.Θ. Από το σχήμα, ο τύπος $a^2 = b^2 + c^2$ δεν είναι καθόλου μα καθόλου προφανής. Μόνο η απόδειξη δίδει τις απαραίτητες πληροφορίες για την αλήθεια του θεωρήματος. Και αυτό καλείται 'βαθύ' αποτέλεσμα στα μαθηματικά. Ίσως το μέγεθος της προσπάθειας που απαιτείται για την εξαγωγή ενός 'βαθέος' αποτελέσματος να παριστάνεται στο παρακάτω γλυπτό του Lander που ειρωνικά για τους μαθηματικούς ονομάζεται 'Σίσσυφος'.



Σχήμα 5.4: Ο Σίσσυφος του Lander.