Κεφάλαιο 6

Στοιχείων Βιβλίο β′: Η Γεωμετρία των Ορθογωνίων

6.1 Ορισμοί του βιβλίου β′

Το Βιβλίο β′ είναι σύντομο και ομογενές, με μόνο 14 προτάσεις και δύο ορισμούς στην αρχή. Στο μεγαλύτερο μέρος του πρόκειται για αποτελέσματα που αφορούν σε διάφορους συνδυασμούς ορθογωνίων και τετραγώνων ίσου περιεχομένου. Στο τέλος του, υπάρχει η γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, που σήμαρα καλούμε Νόμο των Συνημιτόνων, όπως και το πως τετραγωνίζουμε ένα κυρτό πολύγωνο.[1] Σύμφωνα με κάποιους ιστορικούς, το Βιβλίο β′ έχει Πυθαγόρεια προέλευση.

Ως συνήθως, ακολουθούμε τον Ευκλείδη όταν μιλά για ‘ ίσα’ ορθογώνια, ενώ καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται περί ισεμβαδικών.

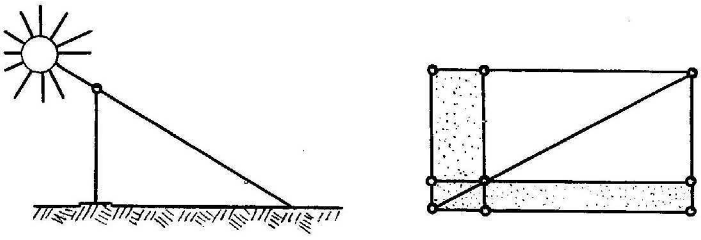
Ορισμοί

1. *Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται ότι περιέχεται σε δύο ευθείες που περιέχουν την ορθή γωνία.*

2. *Και σε κάθε παραλληλόγραμμο χωρίο, οποιοδήποτε από τα παραλληλόγραμμα γύρω από την διάμετρό του μαζί με τα δύο του παραπληρώματα, καλείται γνώμων.*[2]

[1] Τετραγωνίζω=κατασκευάζω κάτι ίσου εμβαδού με δοθέν τετράγωνο. Δείτε και την υποσημείωση στην Πρόταση β′ 14.

[2] Γνώμων στην κυριολεξία σημαίνει ένα πράγμα που επιτρέπει σε κάτι να γίνει γνωστό, εξ′ ου και τα σημερινά *εμπειρογνώμονας, νηογνώμονας*. Κατά τον Ηρόδοτο, οι Έλληνες έμαθαν



Σχήμα 6.1: Γνώμονες.

Ένας γνώμονας ήταν ένα είδος πρωτόγονου ηλιακού ρολογιού, ένα ραβδί κάθετο στον ορίζοντα το οποίου η σκιά χρησιμοποιείτο για να μετράται ο χρόνος. Οι μαθηματικοί προφανώς μετέφεραν το όνομα στο παρόμοιο γεωμετρικό σχήμα (Σχήμα 6.1).

6.2 Οι Προτάσεις του Βιβλίου β′

Παραλείπουμε την Πρόταση β′ 1, που είναι μία γενίκευση των Προτάσεων β′ 2/3 και μάλλον παρεμβλήθηκε στους μετα-ευκλείδειους χρόνους. Σημειώνουμε μόνο ότι το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί ως αυτό που σήμερα καλούμε επιμεριστική ιδιότητα:

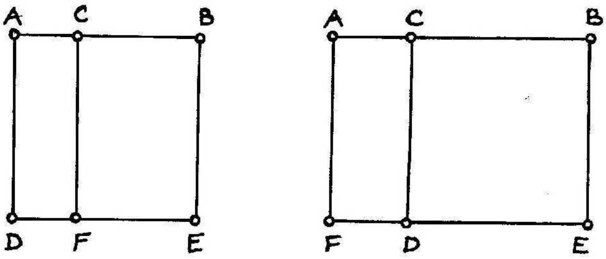
$$a(b+c) = ab + ac.$$

Για τις Προτάσεις β′ 2/3 το παρακάτω Σχήμα 6.2 και η επεξήγηση αρκεί:[3] Ας σημειώσουμε μόνο ότι η Πρόταση β′ 2 αναφέρεται σε τετράγωνα, ενώ η β′ 3 σε ορθογώνια.

$$\begin{aligned}
&\beta'\,2.\ AE = DC + FB, \quad \text{αλγεβρικά, } a^2 = ab + ac \text{ αν } a = b + c,\\
&\beta'\,3.\ AE = AD + BD, \quad \text{αλγεβρικά, } (a+b)a = ab + a^2.
\end{aligned}$$

τον πόλο, τον γνώμονα και τις δώδεκα ώρες τις μέρας από τους Βαβυλωνίους. Σύμφωνα δε με το λεξικό του Σουίδα, ο Αναξίμανδρος (611-545 π.Χ.) ήταν αυτός πρωτοχρησιμοποίησε τον γνώμονα.

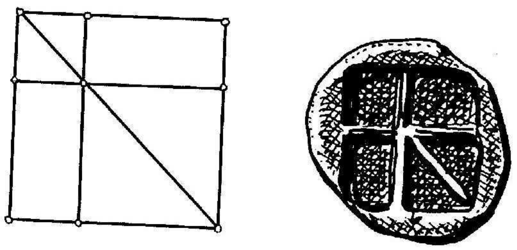
[3]Ακολουθούμε τον Ευκλείδη συμβολίζοντας τετράγωνα, ορθογώνια και παραλληλόγραμμα, με τις διαγωνίους τους.



Σχήμα 6.2: Προτάσεις β′ 2/3.

Πρόταση β′ 4.

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία, τότε το τετράγωνο όλης της ευθείας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των τμημάτων της ευθείας και δύο φορές του περιεχομένου ορθογωνίου.



Σχήμα 6.3: Πρόταση β′ 4.

Πρόκειται βεβαίως για τον γνωστό διωνυμικό τύπο

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Μία ημι-αλγεβρική απόδειξη που βασίζεται στις προηγούμενες προτάσεις του Βιβλίου β′ είναι η εξής:

Απόδειξη της β′ 4.

Από την Πρόταση β′ 2,

$$(a+b)^2 = (a+b)b + a(a+b).$$

Αλλά από την Πρόταση β′ 3 έχουμε επίσης

$$(a+b)a = a^2 + ba, \quad (a+b)b = ab + b^2.$$

Άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

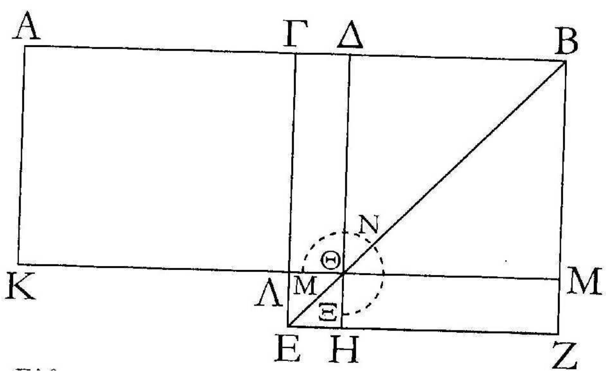
Ο Ευκλείδης βέβαια το βλέπει καθαρά γεωμετρικά.[4] Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη, αλλά μάλλον σχοινοτενής.[5]

Περιέργως πως, η Πρόταση β′ 4 αναπαρίσταται στην Ελληνική Νομισματική. Παρατηρείστε στο Σχήμα 6.3 το νόμισμα της Αίγινας του 400 π.Χ. περίπου.

Πρόταση β′ 5.

Εάν ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα, τότε το άθροισμα του περιεχόμενου στα άνισα τμήματα της όλης ευθείας ορθογώνιο και του τετραγώνου της διαφοράς των ανίσων και των ίσων τμημάτων, είναι ίσο με το τετράγωνο του μισού της ευθείας.

Διότι αν η ευθεία ΑΒ τμηθεί σε ίσα τμήματα στο Γ και σε άνισα τμήματα στο Δ, λέγω ότι το άθροισμα του ορθογωνίου που περιέχεται στις ΑΔ, ΔΒ και του τετραγώνου της ΓΔ, είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΒ.

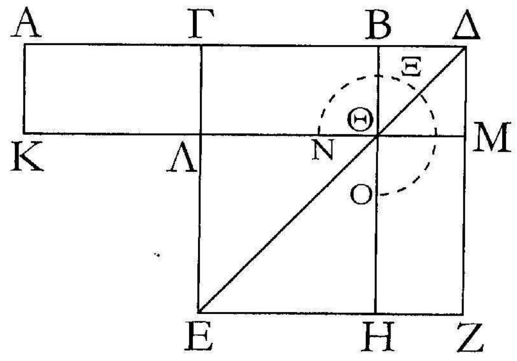


Σχήμα 6.4: Πρόταση β′ 5: $ab + [(a+b)/2 - b]^2 = [(a+b)/2]^2$.

Για την 'δίδυμη' της β′ 5 Πρόταση β′ 6, παραθέτουμε μόνο το σχήμα (Σχήμα 6.5). Η αλήθεια της Πρότασης φαίνεται ξεκάθαρα.

[4] Αν και, εφαρμόζει την Πρόταση β′ 6 στους αριθμούς στο Λήμμα της Πρότασης ι′ 28.

[5] Οι παλαιότερες εκδόσεις των Στοιχείων περιείχαν και μία άλλη απόδειξη της Πρότασης β′ 4 που αποδίδεται στον Θέωνα τον Αλεξανδρέα. Η απόδειξη αυτή διαφέρει ελάχιστα από την υπάρχουσα.



Σχήμα 6.5: Πρόταση β′ 6: $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$.

Σχόλια στις Προτάσεις β′ 5/6.

Ας παρατηρήσουμε τα σχήματα 6.4 και 6.5 και ας θέσουμε ΑΒ$=b$ και ΔΒ$=x$. Όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, οι Προτάσεις β′ 5/6 μπορούν να μεταφραστούν εύκολα στις εξισώσεις

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}-x\right)^2+x(b-x),$$
$$(b+x)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2,$$

δηλαδή στις εξισώσεις

$$x^2-bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}-x\right)^2,$$
$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2,$$

αντίστοιχα.[6] Δηλαδή, οι Προτάσεις 5/6 μας δείχνουν στην κυριολεξία πως συμπληρώνεται το τετράγωνο. Ο Ευκλείδης θεωρεί δύο ξεχωριστές περιπτώσεις αφού δεν υπάρχουν αρνητικά μήκη ή εμβαδά. Η συμπλήρωση του τετραγώνου είναι το πρώτο βήμα για τη λύση της τετραγωνικής εξίσωσης, όπως όλοι

[6] Παρατηρείστε ότι οι όροι $x(b-x)$ και $(b+x)x$ δίδουν το αντίστοιχο εμβαδόν του γνώμονα.

θυμόμαστε από το σχολείο. Ας δούμε τα βήματα:

$$\begin{aligned}
&x^2 + bx + c = 0,\\
&x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,\\
&\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.
\end{aligned}$$

Στο επόμενο βήμα, πρέπει να εξαχθεί η τετραγωνική ρίζα του $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Αυτό εξαρτάται από το μέγεθος και το πρόσημο του c και άρα απαιτεί ειδική θεώρηση από τον Ευκλείδη, ο οποίος, αν και έχει το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα χέρια του, αναβάλλει αυτό το βήμα μέχρι την Πρόταση δ′ 25, όπου και πάλι, το βήμα αυτό είναι κάπως κρυμμένο. Άρα λοιπόν, δεν μπορούμε να μιλάμε για λύσεις της τετραγωνικής εξίσωσης, όσον αφορά στις Προτάσεις β′ 5/6, αλλά μάλλον για επιβεβαιώσεις γνωστών ήδη λύσεων.

Η Πρόταση β′ 5 επιδέχεται και άλλης ερμηνείας. Θέτουμε ΑΓ=x και ΓΔ=y. Τότε ΑΔ= $x + y$ και ΒΔ=$x - y$ και παρατηρίστε ότι η σχέση της Πρότασης β′ 5 είναι η

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$$

Οι επόμενες Προτάσεις β′ 7-10 είναι παραλλαγές στα θέματα των β′ 4–6. Κατόπιν, ο Ευκλείδης στρέφεται σε τρία διαφορετικά ζητήματα· η Πρόταση β′ 11 είναι βασική για την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου στο Βιβλίο δ′, οι Προτάσεις β′ 12,13 γενικεύουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τέλος η Πρόταση β′ 14 είναι η κορωνίδα της ακολουθίας, καθώς ασχολείται με τον τετραγωνισμό πολυγώνων.

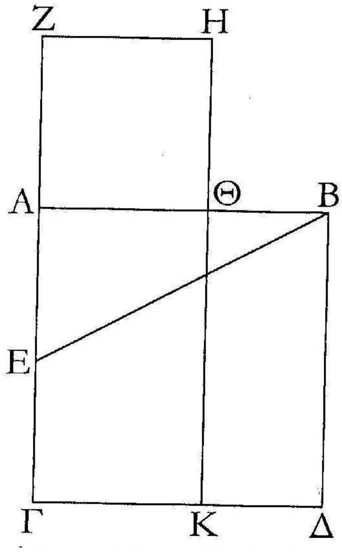
Πρόταση β′ 11.

Να τμηθεί δοθείσα ευθεία ώστε το περιεχόμενο από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα ορθογώνιο να είναι ίσο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος.

Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία· πρέπει να τμηθεί η ΑΒ ώστε το περιεχόμενο από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα ορθογώνιο να είναι ίσο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος.

Απόδειξη.

Δίνουμε την απόδειξη με σχόλια. Ζητούμε σημείο Θ επάνω στην ΑΒ τέτοιο



Σχήμα 6.6: Πρόταση β′ 11.

ώστε ΑΒ·ΘΒ=ΑΘ·ΑΘ.[7] Στην αρχή ο Ευκλείδης περιγράφει την κατασκευή του σχήματος:

[Διότι ας γραφεί το από της ΑΒ τετράγωνο το ΑΒΓΔ,[8]

και ας διχοτομηθεί η ΑΓ στο σημείο Ε,[9] και ας συνδεθεί η ΒΕ·

και ας διάγεται η η ΓΑ από Ζ το οποίο είναι τέτοιο ώστε η ΒΕ είναι ίση με την ΕΖ,[10]

και ας γραφεί από την ΑΖ το τετράγωνο ΖΘ,[11] και ας διάγεται η ΗΘ από το Κ.

Λέγω ότι η ΑΒ τέμνεται στο Θ, ώστε το ορθογώνιο που περιέχουν οι ΑΒ, ΒΘ γίνεται ίσο με το τετράγωνο ΑΘ.]

Με την βοήθεια της Πρότασης β′ 6 και του Πυθαγορείου Θεωρήματος α′ 47 δείχνει ότι το σημείο Θ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες:

[7] Το σημείο Θ χωρίζει το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή είναι η *χρυσή τομή* του ΑΒ. Για την χρυσή τομή και τις τεράστιες επιπτώσεις της στα μαθηματικά, αλλά και σε άλλες επιστήμες, δείτε λ.χ. την ιστοσελίδα http://el.wikipedia.org/wiki/Χρυσή_τομή.

[8] Πρόταση α′ 46.

[9] Πρόταση α′ 10.

[10] Πρόταση α′ 3.

[11] Πάλι λόγω της Πρότασης α′ 46.

Στην ΓΖ έχουμε την κατάσταση της β′ 6:

[Διότι επειδή η ευθεία ΑΓ διχοτομείται στο Ε, και προστίθεται σε αυτή η ΖΑ, άρα το περιεχόμενο από τις ΓΖ, ΖΑ ορθογώνιο μαζί με το τετράγωνο ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο ΕΖ.[12]]

Κατόπιν, χρησιμοποιεί την υπόθεση και το Π.Θ:

[Η ΕΖ είναι ίση με την ΕΒ, άρα το ορθογώνιο που περιέχουν οι ΓΖ, ΖΑ μαζι με το τετράγωνο της ΑΕ, είναι ίσο με το ΄τετράγωνο της ΕΒ. Αλλά το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΒ, γιατι είναι ορθή η γωνία στο Α.

Άρα το άθροισμα ορθογωνίου που περιέχουν οι ΓΖ, ΖΑ και του τετραγώνου ΑΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΕ και ΑΒ.]

Αυτό τώρα συνεπάγεται:

[Άρα το άθροισμα του περιεχομένου από τις ΓΖ, ΖΑ ορθογωνίου και του τετραγώνου ΑΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΒ, ΑΕ.]

Από δω και πέρα τα πράγματα γίνονται εύκολα:

[Ας αφαιρεθεί το κοινό τετράγωνο της ΑΕ· άρα λοιπόν το περιεχόμενο από τις ΓΖ, ΖΑ ορθογώνιο είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΒ.

Το ΖΚ είναι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΖ,ΖΑ, επειδή η ΑΖ είναι ίση με τη ΖΗ.

Το τετράγωνο ΑΔ είναι το τετράγωνο της ΑΒ. Άρα το ΖΚ είναι ίσο με το ΑΔ και ας αφαιρεθεί το κοινό ΑΚ.

Άρα το τετράγωνο ΖΘ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΘΔ. Και το μεν ΘΔ είναι αυτο που περιέχεται στις ΑΒ, ΒΘ, αφού η ΑΒ είναι ίση με την ΒΔ· το δε ΖΘ είναι το τετράγωνο της ΑΘ.

Άρα το περιεχόμενο από τις ΑΒ, ΒΘ ορθογώνιο είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΘ.] □

Σχόλιο

Ως συνήθως, ο Ευκλείδης δεν μας λέγει πως έφτασε στην κατασκευή του, αλλά μόνο βεβαιώνει την λύση του. (Δείτε και τα σχόλια στις β′ 5/6). Αποκαλύπτει το μυστικό του πολύ αργότερα, στην στ′ 30.

[12] Πρόταση β′ 6.

Έστω b το δοθέν τμήμα και x το μεγαλύτερο κομμάτι του. Έχουμε τη συνθήκη

$$b(b-x) = x^2,$$
$$b^2 = x^2 + bx.$$

Με την β′ 6, τούτο μετασχηματίζεται στην

$$b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

και το Π.Θ. μας δίδει ένα τμήμα ΕΒ=d τέτοιο ώστε

$$d^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

άρα

$$x = d - \frac{b}{2}, \text{ όπως κατασκευάστηκε.}$$

Στην στ′ 30 αυτή η επαγωγή είναι ενσωματωμένη στην γενική διαδικασία της λύσης τετραγωνικών προβλημάτων, στ′ 30. Τούτη η τελευταία πρόταση εξηγεί το πως βρίσκουμε ένα σημείο Δ (εδώ Ζ) υπό τις προϋποθέσεις της β′ 6. Ουσιαστικά, αυτό γίνεται όπως παραπάνω με την βοήθεια της α′ 47 ή, σε γενικότερες καταστάσεις, με την γενίκευσή της στ′ 25.

Γιατί όμως η β′ 11 είναι ενδιαφέρουσα; Η Πρόταση ιγ′ 8 είναι περί του κανονικού πενταγώνου με πλευρά x και διαγώνιο b. Αποδεικνύεται εκεί ότι

$$b : x = x : (b - x)$$

δηλαδή ισοδύναμα, σύμφωνα με την Πρόταση στ′ 16

$$b(b-x) = x^2.$$

Να λοιπόν το ουσιαστικό νόημα της β′ 11: να προσδιορίσουμε την πλευρά x ενός κανονικού πενταγώνου όταν δίδεται η διαγώνιος b. Ο Ευκλείδης το αποσιωπά αυτό και στο Βιβλίο β′ αλλά και στο Βιβλίο δ′, όπου κατασκευάζει το πεντάγωνο.[13]

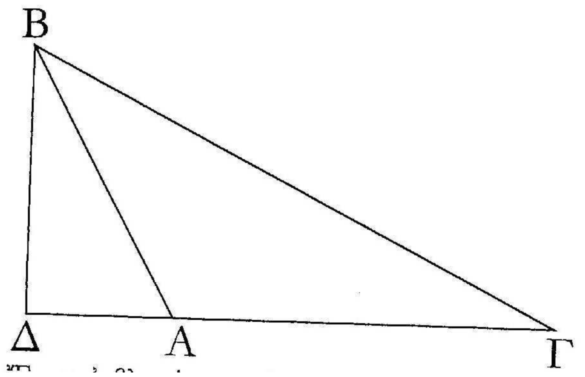
[13] Η μαθηματική αλήθεια δεν εξαρτάται από τα κίνητρα. Ο Ευκλείδης το δίδαξε αυτό σε πολλές γενεές μαθηματικών. Το να διδάσκεις σε μία τάξη είναι τελείως διαφορετικό, βέβαια. Οι μαθητές έχουν κάθε δικαίωμα να καταλαβαίνουν το πως τα ειδικότερα βήματα κατευθύνονται στο συγκεκριμένο στόχο.

Οι Προτάσεις β′ 12/13 είναι πολύ σημαντικές και σήμερα αφού δεν είναι τίποτε άλλο από τον Νόμο των Συνημιτόνων. Μολαταύτα στα Στοιχεία, παρατίθενται και δεν αναφέρονται ούτε εφαρμόζονται ποτέ ξανά.

Πρόταση β′ 12.

Στα αμβλυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την αμβλεία γωνία κατά δύο φορές το ορθογώνιο που περιέχεται από μία των πλευρών γύρω από την αμβλεία γωνία, στην οποία φέρεται η κάθετος, και από την πλευρά που λαμβάνεται εξωτερικά του τριγώνου από την κάθετο προς την αμβλεία γωνία.

Έστω αμβλυγώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ με αμβλεία γωνία την ΒΑΓ, και ας αχθεί από το σημείο Β η κάθετος ΒΔ επί την ΓΑ.[14] *Λέγω, ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ, ΑΓ κατά δύο φορές το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΑ, ΑΔ.*



Σχήμα 6.7: Πρόταση β′ 12. Νόμος συνημιτόνων για αμβλυγώνια τρίγωνα.

Απόδειξη.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα α′ 47 είναι

$$\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{B\Delta}^2+\Delta\Gamma^2,$$
$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Delta}^2+\Delta\mathrm{A}^2.$$

Από το διωνυμικό θεώρημα β′ 4,

$$\Delta\Gamma^2=\Delta\mathrm{A}^2+\mathrm{A}\Gamma^2+2\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{A}\Gamma,$$

[14] Πρόταση α′ 12.

απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

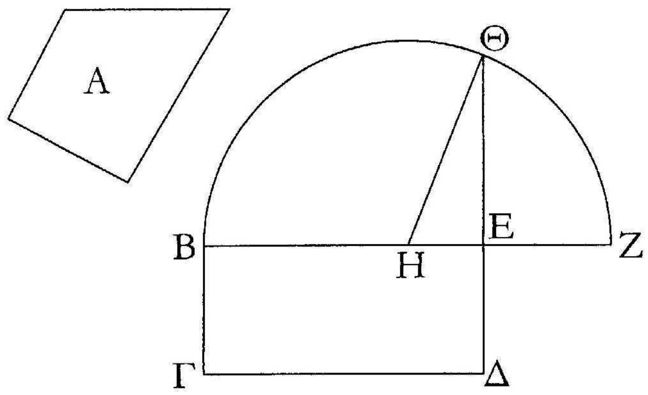
Στη σύγχρονη γλώσσα, αν ΑΒ=γ, ΒΓ=α, ΓΑ=β, και ∠ΒΑΓ=Α, είναι ΔΑ=cosΑ. Επειδή η Α είναι αμβλεία, το συνημίτονο είναι αρνητικό και παίρνουμε το αποτέλεσμα.

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\text{-}2\beta\gamma\cos A.$$ [15]

Πρόταση β΄ 14.

Να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.

Έστω Α το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Ζητείται να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσο με το Α.[16]



Σχήμα 6.8: Πρόταση β΄ 14. Τετραγωνισμός τετραπλεύρου.

Απόδειξη.

Κατασκευάζεται ορθογώνιο με πλευρές ΕΔ και ΒΕ, ίσου περιεχομένου με το Α.[17]

Εάν είναι τετράγωνο, έχουμε τελειώσει. Ειδάλλως, έστω ότι η ΒΕ είναι μεγαλύτερη από την ΕΔ.

[15] Ο Νόμος των Συνημιτόνων θα ανεπτύσσετο σε πλήρη δύναμη πολύ καιρό μετά τον Ευκλείδη.

[16] Κατά τον Αριστοτέλη στα μετά τα Φυσικά, ο τετραγωνισμός ορίζεται καλύτερα ως η εύρεση του μέσου ανάλογου, παρά του τετραγώνου ίσου περιεχομένου. Και αυτό διότι, το πρώτο αναφέρετσι στην αιτία ενώ το ύστερο στο συμπέρασμα και μόνο.

[17] Πρόταση α΄ 45.

Επεκτείνουμε την ΒΕ στο Ζ έτσι ώστε ΕΖ=ΕΔ. Διχοτομούμε την ΒΖ στο Η, γράφουμε το ημικύκλιο ΒΘΖ κέντρου Η. Επεκτείνουμε την ΒΕ στο Θ.

Ισχυριζόμαστε ότι $ΒΕ\cdot ΕΔ=ΕΘ^2$.

Πράγματι:

$$ΒΕ\cdot ΕΖ+ΕΗ^2=ΗΖ^2.$$ [18]

Η ΗΖ είναι ίση με την ΗΘ από κατασκευή. Άρα,

$$ΒΕ\cdot ΕΖ+ΕΗ^2=ΗΘ^2=ΕΗ^2+ΕΘ^2.$$ [19]

Αφαιρώντας το $ΕΗ^2$ και από τα δύο σκέλη, και παρατηρώντας ότι ΕΖ=ΕΗ προκύπτει το ζητούμενο. □

Το παραπάνω θεώρημα έχει την δική του αξία. Είναι ο σκοπός της θεωρίας που αναπτύχθηκε στις α′ 35-45 μέσω της α′ 47 και β′ 5 και κορυφώθηκε στην β′ 14. Δεν εξυπηρετεί κανένα άλλο σκοπό από το να μεταδώσει μία συγκεκριμένη γνώση ή αλλιώς, να απαντήσει σε μία σημαντική ερώτηση της θεωρίας, αλλά και της πρακτικής συνάμα.

[18] Πρόταση β′ 5.

[19] Πρόταση α′ 47.