Κεφάλαιο 7

Πηγές των μαθηματικών IV: Τετραγωνίζοντας τον Κύκλο

Το Θεώρημα β΄ 14 λύνει ένα σημαντικό πρόβλημα: Κάθε πολυγωνικό σχήμα μπορεί να τετραγωνιστεί. Όπως συνήθως στα μαθηματικά, η λύση ενός προβλήματος δεν είναι παρά η αρχή ενός άλλου. Το επόμενο σημαντικό σχήμα είναι ο κύκλος. Πως τον τετραγωνίζουμε; Ο Πρόκλος υποστηρίζει, ότι η Πρόταση α΄ 45, που είναι το τελευταίο βήμα πρίν την β΄ 14, ήταν αυτή που οδήγησε στο πρόβλημα.

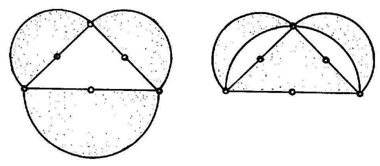
Το πρόβλημα του τετραγωνισμού ήταν τόσο εξέχον στους κλασσικούς χρόνους[1] και πασίγνωστο στους κύκλους της διανόησης και όχι μόνο, που ακόμη και ο Αριστοφάνης κάνει μία αναφορά σε αυτό στους *Όρνιθές* του (414 π.Χ.).[2] Λέγεται ότι ο Αναξαγόρας ($\sim$ 500-430 π.Χ.) προσπάθησε να τετραγωνίσει τον κύκλο όντας έγκλειστος στη φυλακή. Περίπου την ίδια χρονική περίοδο, ο Ιπποκράτης ο Χίος τετραγώνισε τους *μηνίσκους*.[3]

[1] Ήταν ένα από τα λεγόμενα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Τα άλλα δύο ήταν ο διπλασιασμός του κύβου (το *Δήλιον πρόβλημα*) και η τρχοτόμηση της γωνίας.

[2] Λέγει ο Μέτων, ο αυτοδιορισμένος πολιτικός επίτροπος της Νεφελοκοκκυγίας:

Ορθῶ μετρήσω κανόνι προστιθείς,
ο κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος καν μέσω
αγορά, φέρουσαι δ΄ ώσιν εις αυτήν οδοί
ορθαί προς αυτό το μέσον, ώσπερ δ΄ αστέρος
αυτού κυκλοτερούς όντος ορθαί πανταχή
ακτίνες απολάμπωσιν.

[3] Μηνίσκος =μικρός μήνας. Αν εννοήσουμε *σεληνιακό* μήνα, τότε καταλαβαίνουμε την



Σχήμα 7.1: Τετραγωνισμός του μηνίσκου.

Ο Ιπποκράτης βασίστηκε στην εξής αρχή:

Ο λόγος των εμβαδών των τμημάτων ενός κύκλου είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των βάσεων των τμημάτων.

Κατόπιν, (δείτε και το σχήμα 7.1) σε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο κατασκεύασε ημικύκλια με βάσεις τις αντίστοιχες πλευρές. Χρησιμοποιώντας το Π.Θ. και την πιο πάνω αρχή, έδειξε ότι το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα είναι διπλάσιο του εμβαδού του καθενός από τα ημικύκλια με διάμετρους τις (ίσες) κάθετες πλευρές. Ύστερα, με εντυπωσιακό για την εποχή του τρόπο, ανακλά το ημικύκλιο της υποτείνουσας επάνω σε αυτήν και παρατηρεί ότι το άθροισμα του εμβαδού των δύο μηνίσκων και του εμβαδού του μεγάλου ημικυκλίου είναι ίσο με το άθροισμα του εμβαδού των δύο μικρών ημικυκλίων και του εμβαδού του τριγώνου. Λόγω όμως του ότι το εμβαδόν του μεγαλύτερου ημικυκλίου δείχθηκε ίσο με δύο φορές το εμβαδό του καθενός μικρού ημικυκλίου, προκύπτει ότι το διπλάσιο του εμβαδού του μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου! Με άλλα λόγια ο μηνίσκος είναι το τεράγωνο με πλευρά το μισό της πλευράς του ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή το μισό της βάσης του.

Η αρχή του Ιπποκράτη αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη στην Πρόταση ιβ′ 2, χρησιμοποιώντας μεθόδους του Ευδόξου. Αν έχουμε δύο κύκλους με εμβαδά $E_1,\ E_2$ και ακτίνες $r_1,\ r_2$, τότε η ιβ′ 2 μας λέγει ότι

$$E_1 : E_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Άρα, ισοδύναμα

$$E_1 : r_1^2 = E_2 : r_2^2,$$

ονομασία. Οι ασχολούμενοι με τα αθλητικά θα ξέρουν βέβαια ότι ο μηνίσκος είναι σύνδεσμος του γονάτου, στον οποίο έχουν ευπάθεια οι ποδοσφαιριστές. Και αυτός ο μηνίσκος έχει σχήμα σελήνης στη χάση.

που σημαίνει ότι ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς το τετράγωνο της ακτίνας του είναι σταθερός και συμβολίζεται με π. Δηλαδή,

$$E : r^2 = \pi, \quad \acute{\eta} \quad E = \pi r^2.$$

Ο προσδιορισμός του π έγινε στην αρχαιότητα[4] με μεγάλη ακρίβεια απο τον Αρχιμήδη:[5]

$$3.1408 = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} = 3.1429.$$

Κατά τον μαθητή του Πρόκλου Αμμώνιο, που γράφει 900 χρόνια μετά τον Ιπποκράτη, είναι μόνο ο Αρχιμήδης που βρήκε μία ακριβή προσέγγιση του π, ενώ όσοι προσπάθησαν να τον κατασκευάσουν (και άρα να τετραγωνίσουν τον κύκλο) απέτυχαν οικτρά.

Με την σειρά του ο μαθητής του Αμμώνιου Σιμπλίκιος, γράφει το 540 μ.Χ. ότι ο λόγος που το πρόβλημα του τετραγωνισμού είναι διάσημο, δεν είναι μόνο το ότι κανείς δεν τετραγώνισε τον κύκλο, αλλά και το ότι κανείς δεν μπόρεσε να δείξει ότι ο κύκλος *δεν* τετραγωνίζεται.[6]

Ως σχολιαστής του Αριστοτέλη, ο Σιμπλίκιος διαβαζόταν πολύ στον Μεσαίωνα. Αυτό φαίνεται και από το ότι ο Δάντης[7] αφιερώνει στους τελευταίους δώδεκα στίχους της Θείας Κωμωδίας του μία αναφορά στο πρόβλημα:

Σαν τον γεωμέτρη, που βυθίζεται βαθειά στη σκέψη του,
για να μετρήσει τον κύκλο, και δεν μπορεί,
όσο και να σκεφτεί, την κατάλληλη αρχή να βρει.

[4] Δείτε και εδώ: http://www.joyofpi.com/

[5] Στο βιβλίο του *Κύκλου Μέτρησις*. Εκεί απέδειξε ότι και η περιφέρεια του κύκλου είναι ίση με $2\pi r$.

[6] Χωρίς την προϋπόθεση της χρησιμοποίησης μόνο κανόνα και διαβήτη, ο κύκλος είχε τετραγωνιστεί από τον Δεινόστρατο, τον αδελφό του μεναίχμου και τον Νικομήδη, γύρω στο 350 και στο 200 π.Χ. αντίστοιχα. Αυτοί χρησιμοποίησαν την καμπύλη του Ιππία του Ηλείου ($\sim$450 π.Χ.), που για αυτό το λόγο ονομάστηκε *τετραγωνίζουσα*, η οποία δεν είναι όμως κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη. Για λεπτομέρειες, δείτε λ.χ. την ιστοσελίδα
http://users.ira.sch.gr/thafounar/Genika/problemGeometry/SquaringTheCircle/Dinostratus/dinostratus.html
Σε πολικές συντεταγμένες, η τετραγωνίζουσα είναι η $r = \theta/\sin\theta$. Γνωστή επίσης ήταν η λύση του Αρχιμήδη, που χρησιμοποίησε την έλικά του, $r = \theta$. Δείτε λ.χ. και την ιστοσελίδα
http://el.wikipedia.org/wiki/Σπείρα_του_Αρχιμήδη

[7] Dante Aligheri (1265-1321). Φλωρεντίνος ποιητής, ο πρώτος που έγραψε ποίηση στη δημώδη γλώσσα και όχι στα κατεστημένα ως τότε, αλλά νεκρά Λατινικά.

Κατά τον δέκατο έβδομο αιώνα, και με τη συστημ,ατικότερη μελέτη των ορίων, είχε ήδη αρχίσει να διαφαίνεται ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ήταν ουσιαστικά πρόβλημα που αφορούσε την ίδια τη φύση των αριθμών. Ο James Gregory διατύπωσε το 1667 την εικασία ότι η μέτρηση του κύκλου χρειάζεται εισαγωγή νέων αριθμών. Ο Leibniz εξεπλάγη όταν διαπίστωσε ότι το π είναι το όριο μίας άπειρης σειράς, αλλά μόνο από την μιγαδική ανάλυση και τον γνωστό τύπο του Euler $e^{2\pi i} = 1$ το π καθιερώθηκε στην κύρια αιχμή των μαθηματικών.

Εκατό χρόνια μετά τον Gregory, ο Lambert έδωσε μία μερική απάντηση στον Σιμπλίκιο, αποδεικνύοντας ότι το π είναι άρρητος. Οι Euler, Legendre διαπίστωσαν γύρω στα 1750 ότι ένας άρρητος μπορεί να είναι ρίζα μιας πολυωνιμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές,[8] μπορεί και να μην είναι. Στην τελευταία περίπτωση, οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται *υπερβατικοί*[9] και ο Legendre είκασε ότι ο π είναι υπερβατικός.

Σύμφωνα με τη Θεωρία του Galois που ανεπτυσσόταν ραγδαία περί τα τέλη του 19ου αιώνα, ένας αριθμός κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν δεν είναι υπερβατικός. Ο Lindemann απέδειξε το 1882 ότι ο π είναι υπερβατικός, και απάντησε οριστικά αρνητικά στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Αυτό βέβαια δεν κατέστη αρκετό για να σταματήσει τη χορεία των περίφημων *τετραγωνιστών* που ακόμη και στις μέρες μας αποτελούν μία αρκετά ισχυρή, αν και τελείως ετερόκλητη ομάδα. Οι 'αποδείξεις ' τους ότι ο κύκλος τετραγωνίζεται κινούνται από τα όρια της γελοιότητας έως της πολύ σοβαρής, αν και καταδικασμένης εκ των προτέρων, προσπάθειας. Στο διαδίκτυο,[10] αλλά όχι μόνο εκεί, μπορεί κανείς να δει τέτοιες αποδείξεις.

[8] Τέτοιοι αριθμοί λέγονται αλγεβρικοί. Λ.χ. ο $\sqrt{2}$ ίναι αλγεβρικός εφόσον είναι ρίζα της $x^2 - 2 = 0$.

[9] Διότι υπερβαίνουν τις δυνάμεις των αλγεβρικών μεθόδων.

[10] Απλώς πληκτρολογείστε 'τετραγωνισμός κύκλου' σε μία οποιαδήποτε μηχανή αναζήτησης, και τα τέρατα θα εμφανιστούν μπροστά σας.