Κεφάλαιο 8

Στοιχείων Βιβλίο γ′: Περί κύκλου

8.1 Περιεχόμενα του Βιβλίου γ′

Ορισμοί 1–11

Πρόταση 1	Πως βρίσκουμε το κέντρο του κύκλου.
Προτάσεις 2–15	Α: Χορδές, κύκλοι τεμνόμενοι και εφαπτόμενοι.
Προτάσεις 16–19	Β: Εφαπτόμενες.
Προτάσεις 20–22	Γ1: Γωνίες σε τμήματα κύκλου και τετράπλευρα σε κύκλους.

Προτάσεις 23–29	Γ2: Χορδές, τόξα και γωνίες.
Πρόταση 30	Πως διχοτομείται ένα τόξο.
Προτάσεις 31–34	Γ3: Περισσότερα περί γωνιών σε κύκλους.
Προτάσεις 35–37	Δ: Τομές χορδών, τεμνουσών και εφαπτομένων.

8.2 Ορισμοί του Βιβλίου γ΄

Ορισμοί

1. *Ίσοι κύκλοι είναι αυτοί, των οποίων οι διάμετροι είναι ίσες, ή οι αποστάσεις τους από τα κέντρα είναι ίσες.*[1]

Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι η έννοια της ισότητας κύκλων *δεν* είναι ισότητα περιεχομένου όπως στα παραλληλόγραμμα, αλλά μάλλον ισότητα διαμέτρων (ή ακτίνων). Ο Ευκλείδης σκοπεύει να αποδείξει την αρχή του Ιπποκράτη, από την οποία προκύπτει η ισοδυναμία των ορισμών.

2. [Της εφαπτομένης του κύκλου] *Μία ευθεία λέγεται ότι εφάπτεται σε ένα κύκλο, αν όταν συναντά*[2] *τον κύκλο και προεκτείνεται, δεν τέμνει τον κύκλο.*

...

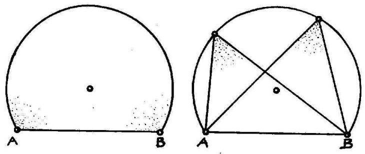
6. *Τμήμα κύκλου είναι το περιεχόμενο από τον κύκλο και μία ευθεία σχήμα.*

[1] Κατά πολλούς όπως λ.χ οι Tartaglia, Borelli, Playfair τούτος ο ορισμός έπρεπε να είναι αξίωμα. Κατ΄ άλλους, όπως ο Simson, είναι δυνατόν να αποδειχθεί ως πρόταση χρησιμοποιώντας φερ΄ ειπείν την εναπόθεση, αλλά ο Ευκλείδης το αποφεύγει αυτό όπου μπορεί. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ορισμός της ακτίνας, οι Αρχαίοι δεν χρησιμοποιούσαν αυτόν τον όρο. Έτσι ακτίνα εδώ είναι η απόσταση από το κέντρο.

[2] *άπτεται* στο αρχαίο κείμενο. Ας παρατηρήσουμε τη διαφορά του άπτεται=συναντά και εφάπτεται.

7. **Γωνία τμήματος**[3] *είναι η περιεχόμενη από κάποια ευθεία και περιφέρεια κύκλου.*

8. **Γωνία σε τμήμα**[4] *είναι η γωνία που περιέχεται στα συνδεδεμένα τμήματα, όταν κάποιο σημείο ληφθεί επί της περιφέρειας του τμήματος, και οι ευθείες συνδεθούν από αυτό προς τα άκρα της ευθείας, η οποία είναι η βάση του τμήματος.*[5]



Σχήμα 8.1: Γωνία τμήματος (αριστερά) και γωνία σε τμήμα (δεξιά).

...

11. *Όμοια τμήματα κύκλων είναι τα δεχόμενα ίσες γωνίες, η σε αυτά οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

8.3 Βιβλίο γ′, Μέρος Α: Χορδές κύκλων, κύκλοι τεμνόμενοι και εφαπτόμενοι

Πρίν ξεκινήσει με το Μέρος Α, ο Ευκλείδης παραθέτει το πρόβλημα γ′ 1: πως βρίσκεται το κέντρο ενός κύκλου. Τούτο φαίνεται παράξενο, αφού η ύπαρξη του κέντρου εξασφαλίζεται στους Ορισμούς α′ 15, 16 και είναι εμφανές ότι η κατασκευή του κύκλου με διαβήτη εξασφαλίζει τον προσδιορισμό του κέντρου. Μάλλον η παράθεση αυτής της πρότασης απηχεί παλιότερες τεχνικές. Ας φανταστούμε έναν αρχαίο γεωμέτρη (ή τεχνίτη) να γράφει ένα κύκλο στο χώμα χρησιμοποιώντας τη βάση ενός αγγείου. Που είναι το κέντρο; Η απάντηση είναι εύκολη. Ο Ευκλείδης παίρνει μία τυχαία χορδή και την μεσοκάθετό της.[6] Κατόπιν αποδεικνύει ότι το μέσον της μεσοκαθέτου είναι το κέντρο του κύκλου,

[3] Ο ορισμός της γωνίας σε τμήμα απηχεί την παράδοση της μεικτής γωνίας. Σήμερα είναι παντελώς ξεπερασμένος.

[4] Είναι η γνωστή σε όλους εγγεγραμμένη γωνία.

[5] Δηλαδή, η χορδή.

[6] Προτάσεις α′ 9 και 11. Εδώ όμως υπάρχει ένα χάσμα: από πουθενά δεν δικαιολογείται ότι η μεσοκάθετος θα τέμνει τον κύκλο σε ακριβώς δύο σημεία! Τούτο οδήγησε τον De

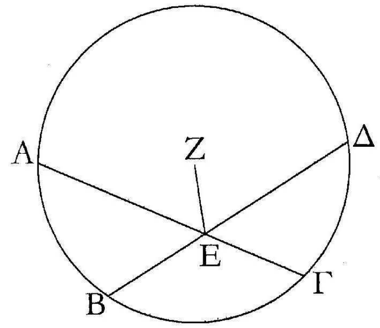
με την απαγωγή σε άτοπο. Αν το κέντρο ήταν κάποιο άλλο σημείο εντός του κύκλου, το ενώνει με τα άκρα της χορδής και το μέσον της και αποδεικνύει ότι η εξωτερική γωνία του ενός σχηματιζόμενου τριγώνου είναι ίση με την εσωτερική του άλλου, το οποίο είναι αδύνατο.

Στην Πρόταση γ′ 2 αποδεικνύεται ότι η χορδή ενός κύκλου ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου, ενώ στην Πρόταση γ′ 3 αποδεικνύεται ότι μία διάμετρος διχοτομεί μία χορδή αν και μόνο αν είναι κάθετη σε αυτήν.

Πρόταση γ′ 4.

Εάν σε ένα κύκλο δύο ευθείες που δεν περνούν από το κέντρο τέμνονται μεταξύ τους, τότε δεν διχοτομούνται.

Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ, και μέσα σ′ αυτόν δύο ευθείες οι ΑΓ, ΒΔ που δεν περνούν από το κέντρο και τέμνονται μεταξύ τους στο Ε· λέγω, ότι δεν διχοτομούνται.



Σχήμα 8.2: Πρόταση γ′ 4.

Απόδειξη.

Διότι, έστω ότι είναι δυνατόν να διχοτομηθούν ώστε η ΑΕ να είναι ίση με την ΕΓ, και η ΒΕ με την ΕΔ· ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου, έστω το Ζ,[7] και ας συνδεθεί η ΖΕ.

Morgan να δώσει μία εναλλακτική μέθοδο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι *η ευθεία που διχοτομεί κάθετα μία χορδή περιέχει το κέντρο του κύκλου.* Παρ′ όλα αυτά, και αυτή η μέθοδος έχει προβλήματα· για λεπτομέρειες, κοιτάξτε τον Heath, vol. II, σελ. 7–8.

[7] Πρόταση γ′ 1.

Επειδή λοιπόν κάποια ευθεία ΖΕ που περνά από το κέντρο διχοτομεί κάποια ΑΓ, την τέμνει και καθέτως,[8] είναι άρα ορθή η ΖΕΑ.

Πάλι, επειδή κάποια ευθεία ΖΕ διχοτομεί κάποια ΒΔ, την τέμνει και καθέτως, άρα είναι ορθή η ΖΕΒ. Δείχθηκε ότι και η ΖΕΑ είναι ορθή, άρα η ΖΕΑ είναι ίση με την ΖΕΒ, η μικρότερη με την μεγαλύτερη· το οποίο είναι αδύνατο.

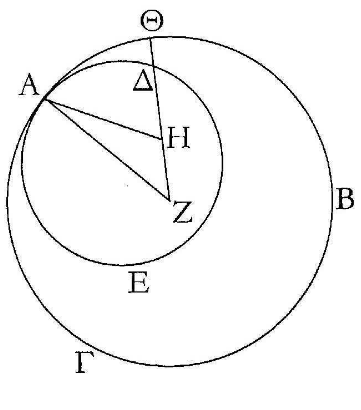
Άρα, εαν σε ένα κύκλο δύο ευθείες που δεν περνούν από το κέντρο τέμνονται μεταξύ τους, τότε δεν διχοτομούνται, Ο.Ε.Δ. □

Οι Προτάσεις γ′ 11/12 είναι 'δίδυμες '. Θα δείξουμε μόνο την Πρόταση γ′ 11 που μιλά για εσωτερικά εφαπτόμενους κύκλους· η απόδειξη της γ′ 12 που μιλά για εξωτερικά εφαπτόμενους κύκλους είναι παραπλήσια.

Πρόταση γ′ 11.

Εάν δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους εσωτερικά, και ληφθούν τα κέντρα τους, τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους, προεκτεινόμενη θα περάσει από το σημείο επαφής των κύκλων.

Διότι ας είναι δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ που εφάπτονται μεταξύ τους εσωτερικά στο σημείο Α, και ας ληφθεί το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓ και το κέντρο Η του κύκλου ΑΔΕ.[9] *Λέγω ότι η ευθεία που συνδέει τα Η και Ζ προεκτεινόμενη περνά από το Α.*



Σχήμα 8.3: Πρόταση γ′ 11.

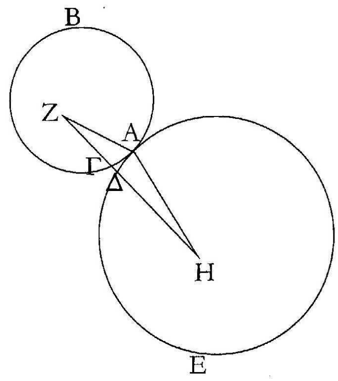
Απόδειξη.

[8] Πρόταση γ′ 3.
[9] Πρόταση γ′ 1.

Διότι εάν δεν είναι δυνατόν, ας εμπέσει όπως η ΖΗΘ, και ας συνδεθούν οι ΑΖ, ΑΗ.

Επειδή λοιπόν το άθροισμα των ΑΗ, ΗΖ είναι μεγαλύτερο από την ΖΑ, δηλαδή και από την ΖΘ,[10] ας αφαιρεθεί η κοινή ΖΗ. Άρα η λοιπή ΑΗ είναι μεγαλύτερη της λοιπής ΗΘ. Η ΑΗ είναι ίση με την ΗΔ, άρα και η ΗΔ είναι μεγαλύτερη από την ΗΘ, δηλαδή η μικρότερη είναι μεγαλύτερη από την μεγαλύτερη, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η από τα Ζ και Η συνδεδεμένη ευθεία δεν θα περάσει έξωτερικά (από τον ένα κύκλο, αλλά εσωτερικά του άλλου)· άρα θα περάσει από το κοινό σημείο Α.

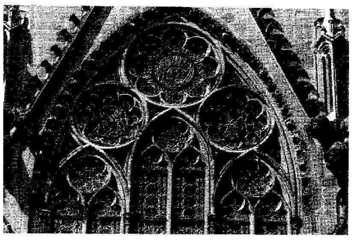
Άρα, εάν δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους εσωτερικά, και ληφθούν τα κέντρα τους, τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους, προεκτεινόμενη θα περάσει από το σημείο επαφής των κύκλων, Ο.Ε.Δ. □



Σχήμα 8.4: Πρόταση γ΄ 12.

Οι Προτάσεις γ΄ 11/12 είχαν αναρίθμητες εφαρμογές στην αρχιτεκτονική του Μεσαίωνα, και είναι ουσιαστικό συστατικό του λεγόμενου Γοτθικού ρυθμού. (Σχήμα 8.5)

[10] Πρόταση α΄ 20.



Σχήμα 8.5: Εφαρμογές των Προτάσεων γ′ 11/12 στην μεσαιωνική αρχιτεκτονική: Η αψίδα της Ritterstiftskirche στο Wimpfen της Γερμανίας, 1280.

Σχόλια στις Προτάσεις γ′ 11/12: Σχετική θέση κύκλων

Είναι γενικά παραδεκτό από τους μελετητές των Στοιχείων, ότι οι αποδείξεις των Προτάσεων γ′ 11/12 είναι αρκετά προβληματικές.[11] Η σημερινή πρακτική, που αντικαθιστά αυτές τις Προτάσεις, αλλά εξακολουθεί να βασίζεται στα προηγούμενα Ευκλείδεια θεωρήματα, συνδέει τον αριθμό, την φύση και την θέση των κοινών σημείων δύο κύκλων, με την σχέση που έχει η απόσταση των κέντρων τους με το μήκος των ακτίνων τους. [12]

Συνολικά, οι Προτάσεις γ′ 11/12 αντικαθίστανται από τις επόμενες:[13]

1. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι εξωτερικοί ο ένας προς τον άλλον.*

2. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο άνισων κύκλων είναι μικρότερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και ο μικρότερος κύκλος κείται ολόκληρος εσωτερικά του μεγαλύτερου.*

3. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και μόνο, το οποίο κείται στην διάκεντρο. Οι κύκλοι είναι εξωτερικοί ο ένας προς τον άλλον.*

4. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο άνισων κύκλων είναι ίση με τη διαφορά*

[11] Δείτε λ.χ. τον Heath, Vol. II, σελ. 24–32.

[12] Οι ρίζες αυτής της μεθόδου βρίσκονται στους Veronese, Legendre και άλλους.

[13] Για τις αποδείξεις, κοιτάξτε τον Heath, Vol. II, σελ. 30–32, ή τα βιβλία της Γεωμετρίας του Λυκείου.

των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και μόνο, το οποίο κείται στην διάκεντρο. Ο μικρότερος κύκλος κείται εσωτερικά του μεγαλύτερου.

5. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων είναι μικρότερη από το άθροισμα και μεγαλύτερη από τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε έχουν δύο κοινά σημεία που βρίσκονται συμμετρικά ως προς τη διάκεντρο, αλλά δεν κείνται σ′ αυτήν.*

8.4 Βιβλίο γ′, Μέρος Β: Εφαπτόμενες

Οι τέσσερις προτάσεις αυτής της παραγράφου είναι θεμελιώδεις για την στοιχειώδη γεωμετρία, διότι μετασχηματίζουν την διαισθητική έννοια της εφαπτομένης ως ‘μίας γραμμής που ακουμπά τον κύκλο’ σε ένα εύχρηστο εργαλείο, με το να δώσουν μία απλή κατασκευή της εφαπτόμενης: Η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην ακτίνα που άγεται από το κέντρο προς στο σημείο επαφής.

Πρόταση γ′ 16

Η ευθεία που φέρεται κάθετα από το άκρο της διαμέτρου ενός κύκλου, θα πέσει εκτός του κύκλου. Και στον τόπο μεταξύ της ευθείας και της περιφέρειας δεν μπορεί να παρεμβληθεί[14] *άλλη ευθεία. Και η μεν γωνία του ημικυκλίου είναι μεγαλύτερη από κάθε οξεία ευθύγραμμη γωνία, η δε λοιπή είναι μικρότερη (από κάθε οξεία ευθύγραμμη γωνία).*[15]

Έστω ο κύκλος ΑΒΓ γύρω από το κέντρο Δ και με διάμετρο ΑΒ· λέγω ότι η αγόμενη από το Α προς την ΑΒ κάθετη θα πέσει εκτός του κύκλου.

Απόδειξη.

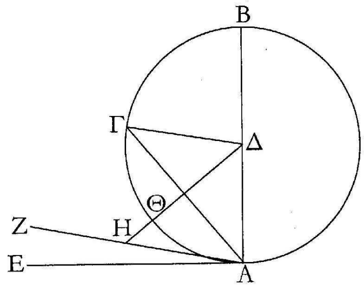
Διότι αν όχι, ας έχει πέσει εντός του κύκλου όπως η ΓΑ και ας έχει συνδεθεί η ΔΓ.

Επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΔΓ, η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΑΔΓ.[16] Η ΔΑΓ είναι ορθή, άρα και η ΑΓΔ. Έτσι στο τρίγωνο ΑΓΔ το άθροισμα των

[14] ου παρεμπεσείται στο αρχαίο κείμενο=δεν μπορεί να πέσει μεταξύ.

[15] Από την αρχαιότητα ήδη, αλλά και στο διάστημα από τον 13ο έως τον 17ο αιώνα, το τελευταίο μέρος της πρότασης έγινε αντικείμενο διαμάχης. Ποιες γωνίες εννοεί ο Ευκλείδης; Κατά τον Πρόκλο, και εδώ απηχείται η παράδοση των *μεικτών* γωνιών, τις οποίες κατά τ′ άλλα ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί από ελάχιστα έως καθόλου. Η γωνία που παρεμβάλλεται βέβεια δεν είναι μεικτή. Στν προ-Ευκλείδεια εποχή, ο Δημόκριτος είχε γράψει *περί της διαφορής γνώμης ή περί ψαύσεως κύκλου και σφαίρης.*

[16] Πρόταση α′ 5.



Σχήμα 8.6: Πρόταση γ′ 16. Ορισμός της εφαπτομένης.

δύο γωνιών ΔΑΓ, ΑΓΔ είναι ίσο με δύο ορθές, το οποίο είναι αδύνατο.[17] Άρα η αγόμενη από το Α κάθετη στην ΒΑ θα πέσει εντός του κύκλου. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι καμμία τέτοια κάθετη δε θα πέσει επί της περιφέρειας. Άρα θα πέσουν όλες εκτός.

Ας πέσει όπως η ΑΕ. Λέγω ότι στον τόπο μεταξύ της ΑΕ και της περιφέρειας ΓΘΑ δεν παρεμβάλλεται καμμία άλλη ευθεία.

Διότι αν ήταν δυνατόν, ας παρεμβληθεί όπως η ΖΑ και ας αχθεί από το σημείο Δ η ΔΗ κάθετη στην ΖΑ.[18] Και επειδή η ΑΗΔ είναι ορθή και η ΔΑΗ είναι μικρότερη από ορθή, είναι άρα μεγαλύτερη η ΑΔ από τη ΔΗ. [19] Η ΔΑ είναι ίση με τη ΔΘ, άρα η ΔΘ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΗ, η μικρότερη από τη μεγαλύτερη· το οποίο είναι αδύνατο. Άρα στον τόπο μεταξύ της ευθείας ΑΕ και της περιφέρειας δεν παρεμβάλλεται καμμία άλλη ευθεία.

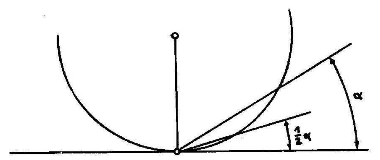
Λέγω ότι και η μεν γωνία του ημικυκλίου που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ είναι μεγαλύτερη από καθε ευθύγραμμη οξεία γωνία, η δε λοιπή που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη οξεία γωνία.

Διότι αν υπάρχει ευθύγραμμη γωνία μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ ή μικρότερη από την γωνία που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ, στον τόπο μεταξύ της περιφέρειας ΓΘΑ και της ευθείας ΑΕ θα παρεμβάλλεται ευθεία, η οποία θα κάνει την γωνία (που περιέχεται στις ευθείες) μεγαλύτερη μεν από την περιεχόμενη από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ, μικρότερη δε από την γωνία

[17] Πρόταση α′ 17.
[18] Πρόταση α′ 12.
[19] Πρόταση α′ 19.

που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ.

Αλλά δεν παρεμβάλλεται. Άρα δεν υπάρχει ευθύγραμμη οξεία γωνία που να είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ ή μικρότερη από τη γωνία που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ. □



Σχήμα 8.7: 'Κερατοειδείς γωνίες '.

Σχολιάζοντας την απόδειξη, ας δούμε ξανά την 'κερατοειδή '[20] γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία και τον κύκλο στο σημείο επαφής. Είδαμε ότι ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι η γωνία μεταξύ του κύκλου και της εφαπτομένης είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία.

Τούτο έχει σοβαρές συνέπειες στη διάταξη των γωνιών αναλόγως του μεγέθους τους. Η γωνία α του σχήματος 8.7 μπορεί να διχοτομηθεί (ξανά και ξανά), αλλά ποτέ η προκύπτουσα γωνία δεν θα γίνει μικρότερη από την κερατοειδή. με σύγχρονους όρους, η διάταξη αυτή των γωνιών (των μεικτών συμπεριλαμβανομένων) είναι μη Αρχιμήδεια.[21]

Ο Ευκλείδης ήταν ενήμερος της κατάστασης, διότι σε άλλες περιπτώσεις αποκλείει μη-Αρχιμήδειες διατάξεις. Στον Ορισμό ε′ 4, μιλά για μεγέθη 'ικανά όταν πολλαπλασιαστούν, να ξεπεράσουν το ένα το άλλο', και στην Πρόταση ι′ 1 έχει ακριβώς την κατάσταση της γ′ 16 και δείχνει με τη βοήθεια του ορισμού ε′ 4 ότι τα διαδοχικά μισά, τελικά θα γίνουν μικρότερα από το δεύτερο μέγεθος. Οι Αρχιμήδειες και οι μη-Αρχιμήδειες διατάξεις ήταν γνωστές εκατό περίπου χρόνια πριν τον Αρχιμήδη.

Πόρισμα.

[20] Ο όρος οφείλεται στον Πρόκλο.

[21] Ας είναι x η γωνία μεταξύ του κύκλου και της εφαπτομένης και y μία τυχαία ευθύγραμμη γωνία. Ο Ευκλείδης απλά μας λέγει ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, το $nx < y$ δηλαδή το x είναι *απειροστό* ως προς το y. Ένα σύνολο που έχει μία αλγεβρική δομή και μία διάταξη κατά την οποία υπάρχουν x, y με το x να είναι απειροστό ως προς το y καλείται μη-Αρχιμήδειο.

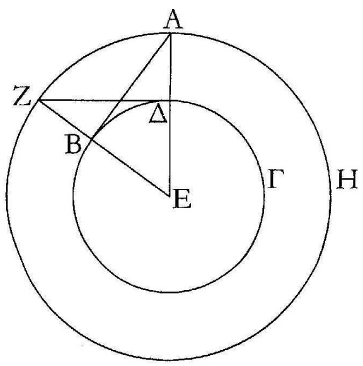
Από τούτο είναι φανερό, ότι η ευθεία που άγεται κάθετα από τα άκρα μιας διαμέτρου κύκλου, εφάπτεται στον κύκλο [και ότι η ευθεία εφάπτεται σε ένα μόνο σημείο, επειδή δείχθηκε ότι η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία πέφτει εντός του κύκλου.[22]]. Ο.Ε.Δ.

Οι Προτάσεις γ′ 18/19 είναι (μερικά) αντίστροφα του Πορίσματος. Η Πρόταση γ′ 17 είναι ειδικού ενδιαφέροντος λόγω της τυπικής της χρήσης της συμμετρίας σε ένα μαθηματικό επιχείρημα.

Πρόταση γ′ 17.

Να αχθεί εφαπτομένη του κύκλου από δοθέν σημείο του.

Έστω Α το δοθέν σημείο, και ΒΓΔ ο δοθείς κύκλος. Πρέπει να αχθεί από το Α εφαπτομένη του κύκλου ΒΓΔ.



Σχήμα 8.8: Πρόταση γ′ 17.

Απόδειξη.

Διότι ας έχει ληφθεί το κέντρο Ε του κύκλου,[23] και ας έχει συνδεθεί η ΑΕ. Και ας έχει γραφεί ο κύκλος ΑΖΗ με κέντρο Ε και διάστημα[24] ΕΑ. Και ας έχει αχθεί κάθετα στην ΕΑ η ΔΖ από το Δ[25] και ας έχουν συνδεθεί οι ΕΖ, ΑΒ. Λέγω ότι η εφαπτομένη από το Α στον κύκλο ΒΓΔ έχει αχθεί η ΑΒ.

[22] Πρόταση γ′ 2.
[23] Πρόταση γ′ 1.
[24] διάστημα=ακτίνα.
[25] Πρόταση α′ 11.

Διότι επειδή το Ε είναι κέντρο των κύκλων ΒΓΔ, ΑΖΗ, άρα η ΕΑ είναι ίση με την ΕΖ και η ΕΔ με την ΕΒ. Έτσι οι δύο ευθείες ΑΕ, ΕΒ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΖΕ, ΕΔ και περιέχουν κοινή γωνία.[26]. Άρα η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΑΒ, και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΕΒΑ, και οι λοιπές γωνίες είναι ίσες με τις λοιπές γωνίες.[27] Άρα η γωνία ΕΔΖ είναι ίση με τη γωνία ΕΒΑ. Η ΕΔΖ είναι ορθή, άρα ορθή και η ΕΒΑ. Και η ΕΒ είναι από το κέντρο,[28]. Και η ευθεία που άγεται κάθετα από το άκρο της διαμέτρου εφάπτεται στον κύκλο·[29] άρα η ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο ΒΓΔ.

Άρα από το δοθέν σημείο Α του κύκλου ΒΓΔ άχθηκε εφαπτομένη ευθεία η ΑΒ, Ο.Ε.Π. □

Φυσικά, το 'κόσμημα' της απόδειξης είναι ο απροσδόκητος τρόπος με τον οποίο η εφαπτομένη ΔΖ, που στην πρώτη ματιά δεν δείχνει να έχει σχέση με το πρόβλημα, χρησιμοποιείται για να παραχθεί η ζητούμενη εφαπτομένη ΑΒ· τούτο κάνει την κατασκευή κομψοτέχνημα.

Η κατασκευή δείχνει επίσης ότι από δοθέν σημείο (εκτός κύκλου) μπορούν να αχθούν δύο εφαπτόμενες στον κύκλο. Είναι επίσης φανερό ότι τούτες οι εφαπτόμενες είναι ίσες, και ότι οι γωνίες με πλευρές τις εφαπτόμενες και την ευθεία που συνδέει το δοθεν σημείο με το κέντρο είναι επίσης ίσες.[30] Ο Ευκλείδης παραλείπει την περίπτωση όπου το δοθέν σημείο βρίσκεται επάνω στην περιφέρεια, προφανώς λόγω της λεπτομερούς ανάλυσης της Πρότασης γ′ 16. Ας παρατηρήσουμε τέλος, ότι εάν ξέραμε ότι η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή (Πρόταση γ′ 31 παρακάτω), απλώς θα είχαμε να γράψουμε κύκλο διαμέτρου ΑΕ· τούτος τέμνει τον δοθέντα κύκλο στα δύο σημεία επαφής.

8.5 Βιβλίο γ′, Μέρος Γ1: Γωνίες σε τμήματα κύκλων

Ίσως οι τέσσερις πιο σημαντικές προτάσεις των Στοιχείων είναι οι παρακάτω:

1. Η Πρόταση α′ 32 περί του αθροίσματος γωνιών τριγώνου·

[26]Με κορυφή το Ε.
[27]Πρόταση α′ 4.
[28]δηλαδή ακτίνα.
[29]Πρόταση γ′ 16.
[30]Τα παραπάνω δείχθηκαν από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα.

2. η Πρόταση α′ 47 (το Πυθαγόρειο Θεώρημα)·

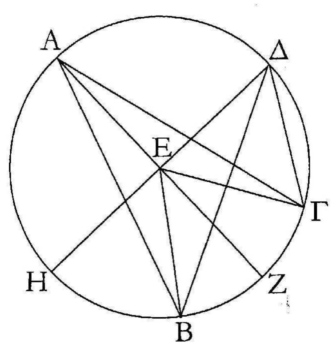
3. η Πρόταση φ′ 21 περί του αναλλοιώτου των γωνιών σε τμήμα και

4. η Πρόταση στ′ 2 περί των αναλογιών των πλευρών ομοίων τριγώνων.

Η Πρόταση γ′ 20 σηματοδοτεί μία νέα αρχή στο Βιβλίο γ′.

Πρόταση γ′ 20.

Σε ένα κύκλο, η γωνία στο κέντρο [31] *είναι διπλάσια της γωνίας στην περιφέρεια, όταν οι γωνίες έχουν την ίδια περιφέρεια βάση.*[32]



Σχήμα 8.9: Πρόταση γ′ 20. Επίκεντρη και εγγεγραμμένη γωνία.

Απόδειξη.

Χρησιμοποιούμε σύγχρονο συμβολισμό για συντομία, αλλά κατά τ′ άλλα ακολουθούμε καταλεπτώς τον Ευκλείδη. Έστω $\alpha = \angle$ΒΑΓ με βάση το τόξο ΒΓ. Το Ε είναι το κέντρο του κύκλου. Για την πρώτη περίπτωση, ας είναι το Ε στο εσωτερικό της α. Η ΑΕ προεκτείνεται στο Ζ. Τότε το $\triangle$ΑΒΕ είναι ισοσκελές· άρα η εξωτερική γωνία $\epsilon = \angle$ΒΕΖ$= 2\angle$ΑΒΕ$=2\beta$. Όμοια, $\eta = \angle$ΓΕΖ$= 2\angle$ΕΑΓ$=2\gamma$. Άρα $\mu = \angle$ΒΕΓ$= \epsilon + \eta = 2(\beta+\gamma) = 2\alpha$. Η περίπτωση του σημείου Δ αντιμετωπίζεται παρόμοια, με τη διαφορά ότι αφαιρούνται αντί να προστίθενται οι γωνίες. □

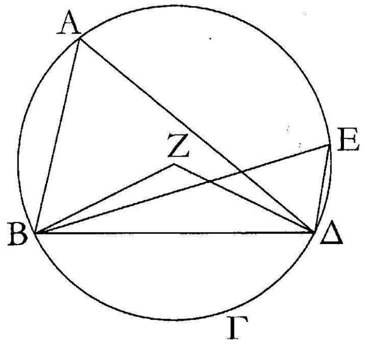
Η Πρόταση γ′ 21 είναι άμεσο πόρισμα της γ′ 20:

[31]=η επίκεντρη γωνία.

[32]Με άλλα λογια η επίκεντρη γωνία ενός τόξου είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης στο ίδιο τόξο.

Πρόταση γ′ 21.

Σε ένα κύκλο οι γωνίες στο ίδιο τμήμα είναι ίσες μεταξύ τους.



Σχήμα 8.10: Πρόταση γ′ 21. Οι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο είναι ίσες.

Η πρώτη ουσιαστική εφαρμογή της Πρότασης γ′ 21 είναι η παρακάτω.

Πρόταση γ′ 22.

Στα τετράπλευρα εντός κύκλων,[33] *το άθροισμα των απέναντι γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές.*

Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ, και μέσα σ′ αυτόν έστω τετράπλευρο το ΑΒΓΔ· λέγω, ότι το άθροισμα των απέναντι γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές.

Απόδειξη.

Ας έχουν συνδεθεί οι ΑΓ, ΒΔ.

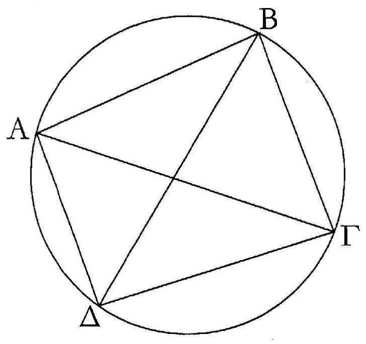
Επειδή σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των τριών γωνιών του είναι ίσο με δύο ορθές,[34] το άθροισμα των τριών γωνιών ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ είναι ίσο με δύο ορθές. Η μεν ΓΑΒ είναι ίση με την ΒΔΓ· είναι στο ίδιο τμήμα ΒΑΔΓ·[35] η δε ΑΓΒ είναι ίση με την ΑΔΒ· είναι στο ίδιο τμήμα ΑΔΓΒ.

Άρα όλη η ΑΔΓ είναι ίση με το άθροισμα των ΒΑΓ και ΑΓΒ. Προστίθεται και στις δύο η ΑΓΒ. Άρα το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΑΓ και ΑΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΔΓ. Αλλά το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΑΓ και ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα και το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσο με δύο

[33]=εγγεγραμμένα τετράπλευρα.

[34]Πρόταση α′ 32.

[35]Πρόταση γ′ 21.



Σχήμα 8.11: Πρόταση γ′ 22. Εγγεγραμμένο τετράπλευρο: Οι απέναντι γωνίες έχουν άθροισμα δύο ορθές.

ορθές. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι και το άθροισμα των γωνιών ΒΑΔ, ΔΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές.

Άρα, στα τετράπλευρα εντός κύκλων, το άθροισμα των απέναντι γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές, Ο.Ε.Δ. □

8.6 Βιβλίο γ′, Μέρος Γ2: Χορδές, τόξα και γωνίες

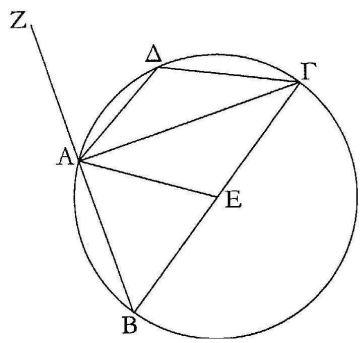
Σε τούτη τη παράγραφο του Βιβλίου γ′, τα αποτελέσματα της προηγούμενης επεκτείνονται με ένα τεχνικό τρόπο σε γενικότερες καταστάσεις, παρόμοια με τις προτάσεις περί εμβαδών παραλληλογράμμων και τριγώνων στο Βιβλίο α′ 36-38. Η ισότητα των γωνιών μεταφέρεται από 'το ίδιο τμήμα' σε 'ίσα τμήματα ίσων κύκλων' και όμοια για τις χορδές και τα τόξα: ίσα τόξα καθορίζουν ίσες χορδές και αντιστρόφως· το ίδιο ισχύει για τις γωνίες και τα τόξα. Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στο Βιβλίο δ′.

8.7 Βιβλίο γ′, Μέρος Γ3: Περισσότερα περί γωνιών σε κύκλους

Στο Μέρος Γ1, δύο ακραίες περιπτώσεις δεν μελετήθηκαν. Η πρώτη είναι αυτή της γωνίας σε ημικύκλιο. Η διάμετρος ενός κύκλου είναι μία ευθεία γραμμή και για τον Ευκλείδη αυτό δεν ορίζει γωνία (180 μοιρών ή δύο ορθών) στο κέντρο.

Πρόταση γ′ 31.[36]

Σε ένα κύκλο η γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή...[37]



Σχήμα 8.12: Πρόταση γ′ 31. Η εγγεγραμμένη σε διάμετρο είναι ορθή.

Η απόδειξη κάνει πάλι χρήση ισοσκελών τριγώνων και περιληπτικά έχει ως εξής: Η εξωτερική γωνία ∠ΖΑΓ είναι ίση με το άθροισμα ∠ΑΒΓ+∠ΑΓΒ· άρα αφού ∠ΑΒΓ+∠ΑΓΒ= ∠ΒΑΕ+∠ΕΑΓ, προκύπτει ότι η ∠ΒΑΓ είναι ορθή.

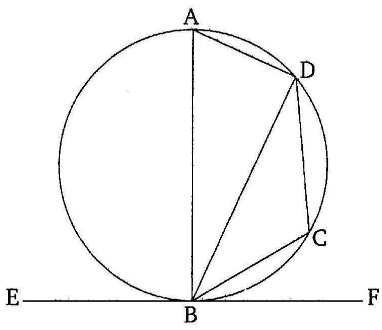
Πρόταση γ′ 32.

Εάν κάποια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, και από το σημείο επαφής αχθεί ευθεία που τέμνει τον κύκλο, οι γωνίες που σχηματίζει με την εφαπτομένη θα είναι ίσες με τις γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου.

Διότι εάν η ευθεία EF εφάπτεται στον κύκλο $ABCD$ στο σημείο B, και από το B αχθεί ευθεία BD που τέμνει τον κύκλο· λέγω ότι οι γωνίες που σχηματίζει η BD με την εφαπτομένη EF είναι ίσες με τις γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου, δηλαδή η γωνία FBD είναι ίση με τη γωνία BAD και η γωνία EBD είναι ίση με τη γωνία DCB.

[36] Το θεώρημα αυτό αποδίδεται στον Θαλή. Έχει ειπωθεί προηγουμένως ότι είναι άμεση απόρροια της Πρότασης γ′ 20, αν αυτή επεκταθεί ώστε να περιέχει την περίπτωση είναι μικρότερο *ή ίσο* του ημικυκλίου, δηλαδή η γωνία στο κέντρο είναι ίση με δύο ορθές. Υπάρχουν ενδείξεις στα Μετά τα Φυσικά του Αριστοτέλη, ότι υπήρχε διαφορετική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού γνωστής στους προ-Ευκλείδειους χρόνους.

[37] Η πρόταση περιέχει και άλλα αποτελέσματα που αφορούν γωνίες τμημάτων και γωνίες σε τμήματα μεγαλύτερα ή μικρότερα ημικυκλίων.



Σχήμα 8.13: Πρόταση γ′ 32. Θεώρημα γωνίας χορδής και εφαπτομένης.

Απόδειξη.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi = \angle FBD = \angle BAD = \alpha$ και $\psi = \angle EBD = \angle DCB = \gamma$. Εν γένει, το A είναι τυχαίο σημείο στον κύκλο, αλλά λόγω του αναλλοιώτου της γωνίας BAD μπιορούμε να υποθέσουμε ότι η BA είναι διάμετρος. Θέτουμε επίσης $\beta = \angle ABC$. Η $\angle ADB$ είναι ορθή·[38] άρα το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι ίσο μία ορθή.[39] Αλλά επίσης $\beta + \phi$ είναι μία ορθή και έτσι $\alpha = \phi$.

Επίσης, $\gamma = \pi - \alpha = \pi - \phi = \psi$.[40] □

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι παραλλαγές της γ′ 32 που είναι χρήσιμες γιατί δημιουργούν καταστάσεις κατάλληλες για την εφαρμογή της γ′ 21.

Πρόταση γ′ 33.

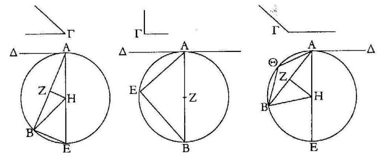
Να γραφεί σε δοθείσα ευθεία, τμήμα κύκλου που δέχεται γωνία ίση με ευθύγραμμη γωνία.

Πρόταση γ′ 34.

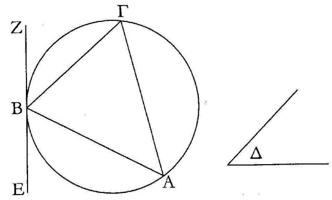
Από δοθέντα κύκλο να αφαιρεθεί τμήμα που δέχεται γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.

Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και Δ η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία· ζητείται να αφαιρεθεί τμήμα κύκλου που δέχεται γωνία ίση με την ευθύγραμμη γωνία Δ.

[38] Πρόταση γ′ 31
[39] Πρόταση α′ 32.
[40] Πρόταση γ′ 22.



Σχήμα 8.14: Πρόταση γ′ 33.



Σχήμα 8.15: Πρόταση γ′ 34.

Απόδειξη.

Ας αχθεί από το Β εφαπτομένη ΕΖ. Και ας έχει κατασκευαστεί πάνω στο ΖΒ γωνία ΖΒΓ ίση με την Δ. [41]

Επειδή λοιπόν η ευθεία ΕΖ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ, και από το σημείο επαφής Β διέρχεται η ΒΓ, η γωνία ΖΒΓ είναι άρα ίση με την γωνία που κατασκευάστηκε στο εναλλάξ τμήμα ΒΑΓ. Αλλά η ΖΒΓ είναι ίση με την Δ· άρα και η γωνία στο τμήμα ΒΑΓ είναι ίση με την Δ.

Άρα, από τον δοθέντα κύκλο ΑΒΓ αφαιρέθηκε το ΒΑΓ που δέχεται γωνία ίση με τη δοθείσα ευθύγραμμη γωνία Δ. Ο.Ε.Π.[42] □

8.8 Βιβλίο γ′ Μέρος Δ: Τομές χορδών τεμνουσών και εφαπτομένων

Στη σημερινή γεωμετρία του λυκείου, οι τελευταίες τρεις προτάσεις του Βιβλίου γ′ τίθενται εντός του πλαισίου της θεωρίας της ομοιότητας όπου, οι αποδείξεις

[41] Πρόταση α′ 23.

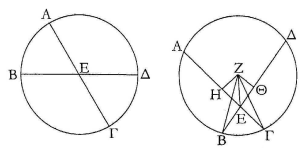
[42] Μία εναλλακτική κατασκευή εδώ θα ήταν να κατασκευάσουμε μία επίκεντρη γωνία διπλάσια της δοθείσας· αν η δοθείσα είναι ορθή, χρειάζεται μόνο να φέρουμε την διάμετρο του κύκλου.

τους είναι εύκολες. Σε αυτό το στάδιο ο Ευκλείδης δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αναλογίες και για αυτό το λόγο δίδει περίπλοκες και μακροσκελείς αποδείξεις.

Πεπλεγμένη στις Προτάσεις γ′ 35/36 είναι η κατασκευή της αναλλοιώτου που καλείται σήμερα δύναμη σημείου ως προς κύκλο η οποία έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην ιστορία της γεωμετρίας.

Πρόταση γ′ 35.

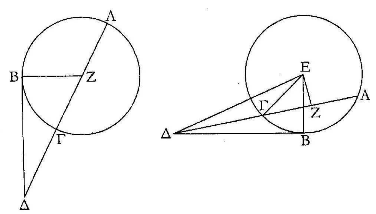
Εάν δύο ευθείες τέμνονται σε κύκλο, το περιεχόμενο από τα τμήματα της μιας ορθογώνιο ισούται με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τα τμήματα της άλλης.



Σχήμα 8.16: Πρόταση γ′ 34: ΑΕ·ΕΓ=ΒΕ·ΕΔ.

Πρόταση γ′ 36.[43]

Εάν ληφθεί κάποιο σημείο εκτός του κύκλου, και στον κύκλο πέφτουν δύο ευθείες, η μία τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από όλη την τέμνουσα και το τμήμα της εκτός του κύκλου μεταξύ του σημείου και της κυρτής περιφέρειας, είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτομένης.



Σχήμα 8.17: Πρόταση γ′ 36. Θέωρημα Τέμνουσας και Εφαπτομένης: $ΔΒ^2$ =ΔΓ·ΔΑ.

[43]Η Πρόταση αυτή είναι το γνωστό Θεώρημα Τέμνουσας και Εφαπτομένης.

Ας ξαναπαραθέσουμε την παραπάνω Πρόταση ώστε να συμπεριλαμβάνει και την αντίστροφή της Πρόταση γ′ 37, δέστε και το σχήμα 8.17:

$$\Delta\mathrm{B} \text{ εφαπτομένη } \textit{αν και μόνο αν } \Delta\mathrm{B}^2 = \Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{A}.$$

Θα δείξουμε μόνο το ευθύ· το αντίστροφο δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Απόδειξη με την χρήση ομοιότητας.

Θεωρούμε τα τρίγωνα △ΔΒΓ και △ΔΒΑ, τα οποία έχουν κοινή την ∠ΑΔΒ. Εάν η ΔΒ είναι εφαπτομένη, τότε από την γ′ 32 είναι ∠ΔΒΓ=∠ΒΑΓ. Από την α′ 32 οι αντίστοιχες λοιπές γωνίες είναι ίσες και τα τρίγωνα △ΔΒΓ και △ΔΒΑ είναι ισογώνια. Άρα,[44]

$$\Delta\Gamma:\Delta\mathrm{B}=\Delta\mathrm{B}:\Delta\mathrm{A},$$

και [45]

$$\Delta\mathrm{B}^2 = \Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{A}.$$

□

Η απόδειξη του Ευκλείδη.

Ο Ευκλείδης θεωρεί πρώτα την περίπτωση όπου η ΑΔ περνά από το κέντρο. Παραλείπουμε αυτή την περίπτωση διότι οι μέθοδοι που ακολουθούνται είναι πανομοιότυπες με αυτές της γενικής περίπτωσης.[46]

Έστω ΕΖ κάθετη στην ΔΑ· συνδέονται οι ΕΔ, ΕΒ. Στην ευθεία ΔΑ έχουμε την κατάσταση της β′ 6:

$$\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma+\Gamma\mathrm{Z}^2=\mathrm{Z}\Delta^2.$$

Τώρα τρεις εφαρμογές του Π. Θ. βοηθούν. Από κατασκευή

$$\mathrm{E}\Gamma^2=\Gamma\mathrm{Z}^2+\mathrm{EZ}^2,$$

$$\mathrm{E}\Delta^2=\Delta\mathrm{Z}^2+\mathrm{EZ}^2.$$

Άρα,

$$\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{E}\Delta^2,$$

και επειδή ΓΕ=ΕΒ,

[44] Πρόταση στ′ 4.

[45] Πρόταση στ′ 16.

[46] Τούτη η περίπτωση είναι αυτό που στις μέρες μας ονομάζουμε *οριακή*. Ο Ευκλείδης, όπως και όλοι οι Έλληνες γεωμέτρες άλλωστε, δεν επιτρέπει στον εαυτό του να συνάγει την αλήθεια της οριακής περίπτωσης κατευθείαν από την γενική περίπτωση που την περιέχει, αλλά δίδει ξεχωριστή απόδειξη.

$$\mathrm{A\Delta{\cdot}\Delta\Gamma{+}EB^2{=}E\Delta^2}.$$

Τώρα, επειδή η ΔΒ είναι εφαπτομένη,

$$\mathrm{E\Delta^2{=}\Delta B^2{+}EB^2}.$$

Αντικαθιστώντας και αφαιρώντας το EB^2 η παραπάνω δίδει

$$\mathrm{A\Gamma{\cdot}\Delta\Gamma{=}\Delta B^2}.$$

□

Εκ πρώτης όψεως, η απόδειξη του Ευκλείδη δείχνει πιο περίπλοκη από την απόδειξη με την χρήση ομοιότητας. Παρά τούτο η τελευταία χρησιμοποιεί την Πρόταση στ′ 4 και την στ′ 16, οι οποίες χρειάζονται τα εννοιακά δυσκολότερα θεμέλια του Βιβλίου ε′. Συνολικά λοιπόν η απόδειξη του Ευκλείδη είναι απλούστερη αν και τεχνικά πολύπλοκη.