Κεφάλαιο 9

Στοιχείων Βιβλίο δ′: Κανονικά πολύγωνα

Θα χρησιμοποιούμε τον συνήθη όρο ‘κανονικό πολύγωνο’ αντί του ευκλείδειου ‘ισόπλευρου και ισογώνιου πολυγώνου’· η κυρτότητα υπονοείται πάντοτε. Το Βιβλίο δ′ ακολουθεί ένα σφιχτό πλάνο και δεν έχει τις υποδιαιρέσεις που έχουν τα άλλα βιβλία. Τέσσερα προβλήματα διαπραγματεύονται συστηματικά:

1. Η εγγραφή ευθυγράμμου σχήματος σε δοθέντα κύκλο·
2. η περιγραφή ευθυγράμμου σχήματος σε δοθέντα κύκλο·
3. η εγγραφή κύκλου σε δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και
4. η περιγραφή κύκλου σε δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.

Τα προβλήματα αυτά λύνονται για

- τρίγωνα στις Προτάσεις δ′ 2-5·
- τετράγωνα (κανονικά τετράπλευρα) στις Προτάσεις δ′ 6-9·
- κανονικά πεντάγωνα στις Προτάσεις δ′ 10-14·
- κανονικά εξάγωνα στην Πρόταση δ′ 15 και
- κανονικά δεκαπεντάγωνα στην Πρόταση δ′ 16.

Ο αυστηρός και συστηματικός σχεδιασμός του βιβλίου δ′ μας δίνει να καταλάβουμε ότι είναι μονογραφία ενός μόνο συγγραφέα την οποία ο Ευκλείδης ενσωμάτωσε στα Στοιχεία. Η παράλειψη του αξιώματος των παραλλήλων, η κάπως αρχαική γλώσσα, όπως και τα σχόλια που προστέθηκαν στο βιβλίο αυτό στην μετα-Ευκλείδεια εποχή, μας δίνουν να καταλάβουμε ότι μάλλον τούτο είναι έργο κάποιου Πυθαγορείου. Ο Ευκλείδης δείχνει ότι παρεξέκκλινε του αρχικού κειμένου με δύο τρόπους: πρώτα, ξαναδούλεψε την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου για να εξαλείψει την χρήση των αναλογιών και ύστερα, δεν χρησιμοποίησε καθόλου τους ορισμούς του βιβλίου για την εγγραφή πολυγώνων σε πολύγωνα, την οποία προφανώς διατήρησε από την αρχική μονογραφία.

Από μαθηματική άποψη, το πλέον ουσιαστικό επίτευγμα του Βιβλίου δ′ είναι η κατασκευή του κανονικού πενταγώνου. Τα υπόλοιπα θεωρήματα είναι σχετικά εύκολα, άρα κάποιος μπορεί να πεί ότι η κατασκευή του πενταγώνου είναι ο λόγος ύπαρξης όλου του βιβλίου. Η θεωρία στο Βιβλίο δ′ είναι ενδιαφέρουσα μόνο εξαιτίας αυτής της δύσκολης περίπτωσης, την οποία θα διαπραγματευτούμε ξεχωριστά στην επόμενη παράγραφο.

Σημείο εκκίνησής μας είναι η Πρόταση δ′ 2 με την εξαιρετικά όμορφη απόδειξη.

Πρόταση δ′ 2.

Να εγγραφεί σε δοθέντα κύκλο, τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο.

Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και το δοθέν τρίγωνο το ΔΕΖ· ζητείται να εγγραφεί στον κύκλο ΑΒΓ τρίγωνο ισογώνιο με το ΔΕΖ.

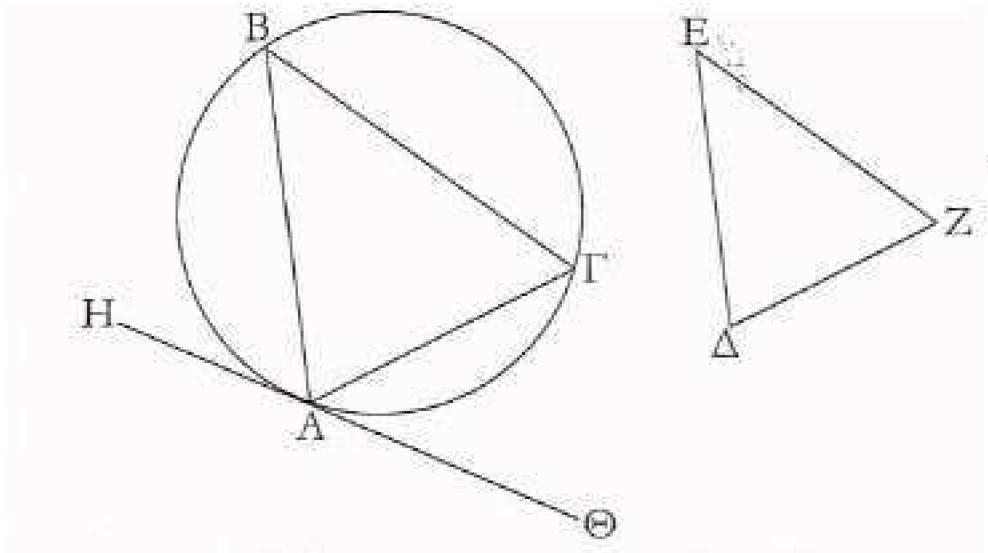
Απόδειξη.

Ας έχει αχθεί από το Α εφαπτομένη ΗΘ στον κύκλο ΑΒΓ, και έστω ότι έχει κατασκευαστει στην ευθεία ΑΘ και στο σημείο της Α, γωνία ΘΑΓ ίση με τη ΔΕΖ και στην ευθεία ΑΗ και στο σημείο της Α γωνία ΗΑΒ ίση με τη ΔΖΕ·[1] ας έχει συνδεθεί και η ΒΓ.

Επειδή λοιπόν κάποια ευθεία ΑΘ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ και από το σημείο επαφής Α διέρχεται η ευθεία ΑΓ, άρα η γωνία ΘΑΓ είναι ίση με την γωνία ΑΒΓ στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου. [2] Αλλά η ΘΑΓ είναι ίση με τη ΔΕΖ άρα και η ΑΒΓ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Για τους ίδιους λόγους και η ΑΓΒ είναι άρα ίση με τη ΔΖΕ· και άρα η λοιπή ΒΑΓ είναι ίση με τη λοιπή ΕΔΖ [άρα

[1] Πρόταση α′ 23.

[2] Πρόταση γ′ 32.



Σχήμα 9.1: Πρόταση δ′ 2: Εγγραφή σε κύκλο τριγώνου ισογωνίου με δοθέν τρίγωνο.

το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το ΑΒΓ τρίγωνο και εγγράφεται αυτό στον κύκλο ΑΒΓ].

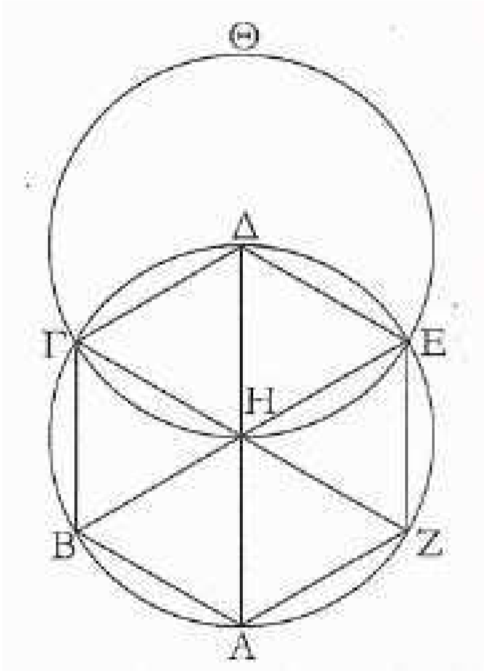
Άρα στον δοθέντα κύκλο εγγράφεται τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο, [3] Ο.Ε.Π. □.

Το επόμενο θεώρημα μας δίδει επίσης τη γεύση του Βιβλίου δ′:

Πρόταση δ′ 15.

Στον δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο εξάγωνο.

[3]Επειδή φυσικά κάθε σημείο του κύκλου μπορεί να ληφθεί ως γωνιακό σημείο, υπάρχουν άπειρες λύσεις στο πρόβλημα. Ακόμη και αν σταθεροποιήσουμε ένα σημείο Α, υπάρχουν έξι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις γωνίες. επίσης το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στην γ′ 34, δηλαδή να αφαιρέσουμε από τον κύκλο τμήμα που περιέχει γωνία ίση με δοθείσα γωνία. Μπορεί επίσης να επιλυθεί με την εναλλακτική μέθοδο που εφαρμόζεται και στην γ′ 34: γράφονται επίκεντρες γωνίες ίσες με το διπλάσιο των γωνιών του δοθέντος τριγώνου. Ως ειδική περίπτωση, μπορούμε με την μέθοδο αυτής της Πρότασης να εγγράψουμε ισόπλευρο τρίγωνο σε κάθε κύκλο· αφού πρώτα το κατασκευάσουμε με την βοήθεια της Πρότασης α′ 1. Ι σοδύναμα, μπορούμε να χωρίσουμε την περιφέρεια κύκλου σε τρία ίσα τόξα.



Σχήμα 9.2: Πρόταση δ′ 15: Εγγραφή σε κύκλο κανονικού εξαγώνου.

Απόδειξη.

Θα δώσουμε την απόδειξη συντομεύοντας κάπως τα επιχειρήματα του Ευκλείδη. Έστω $\mathcal{K}$ ο κύκλος κέντρου Η. Φέρεται η διάμετρος ΑΔ και ο κύκλος $\mathcal{H}$ κέντρου Δ και ακτίνας ΔΗ, ο οποίος τέμνει τον $\mathcal{K}$ στα σημεία Γ και Ε.

1. Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Από κατασκευή, τα τρίγωνα $\triangle$ΗΓΔ και $\triangle$ΗΔΕ είναι ισόπλευρα, οι αντίστοιχες γωνίες τους στο Η είναι το ένα τρίτο των δύο ορθών. Επειδή η ΒΕ είναι ευθεία, η λοιπή γωνία $\angle$ΒΗΓ είναι επίσης ίση με το ένα τρίτο των δύο ορθών. Οι τρείς υπόλοιπες γωνίες στο Η είναι κάθετες στις προηγούμενες· άρα είναι όλες ίσες. Αλλά ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα[4] και υποτείνονται από ίσες χορδές.[5]. Άρα το εξάγωνο είναι ισόπλευρο.

2. Είναι επίσης ισογώνιο. Το τόξο ΒΓΔΕΖ είναι ίσο με το τόξο ΓΔΕΖΑ·

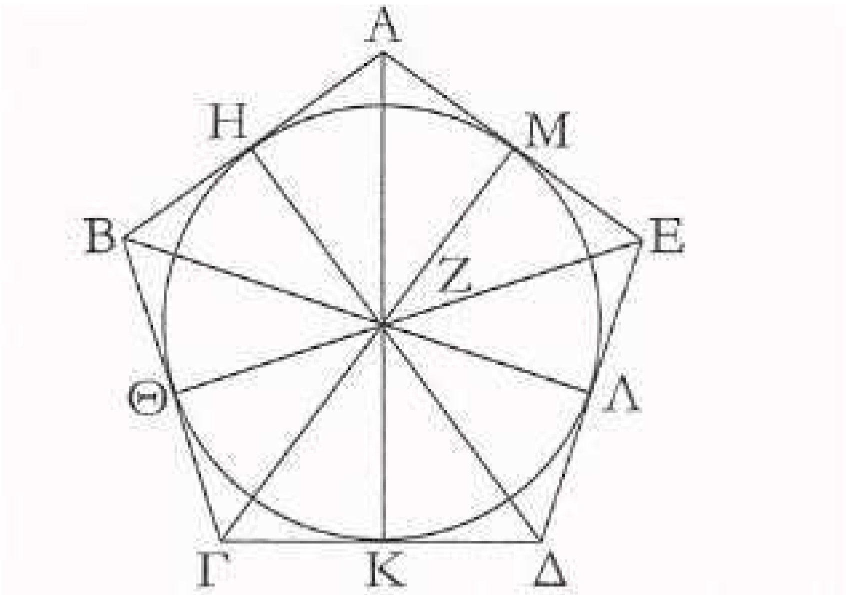
[4] Πρόταση γ′ 26.
[5] Πρόταση γ′ 29.

άρα από την γ′ 27 η ∠ΒΑΖ είναι ίση με την ∠ΓΒΑ κ.ο.κ.

□

Η κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου

Σε αντίθεση με το πρόβλημα της εγγραφής κανονικού n-γώνου σε δοθέντα κύκλο όπου κάθε n πρέπει να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά, η κατασκευή του εγγεγραμμένου (όπως και του περιγεγραμμένου) κύκλου κανονικού n-γώνου επιδέχεται γενικής λύσης. Η διαδικασία της Πρότασης δ′ 13, όπου ο Ευκλείδης εγγράφει κύκλο σε κανονικό πεντάγωνο, μπορεί να γενικευτεί, εφ′ όσον η απόδειξη στην ουσία δεν χρησιμοποιεί πουθενά ότι το εν λόγω πολύγωνο είναι πεντάγωνο. Ο Ευκλείδης το γνωρίζει αυτό, διότι στην στ′ 15 για το εξάγωνο και στην δ′ 16 για το δεκαπεντάγωνο, λέγει ότι η κατασκευή γίνεται όπως και στην περίπτωση του πενταγώνου.



Σχήμα 9.3: Κατασκευή εγγεγραμμένου κύκλου.

Ας δούμε λίγο την κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου κανονικού n-γώνου ΑΒΓΔΕ... (Το σχήμα αναφέρεται στο κανονικό πεντάγωνο, αλλά απ′

ότι είπαμε δεν έχει σημασία.) Φέρονται οι διχοτόμοι ΓΖ, ΔΖ των γωνιών $\angle$ΒΓΔ και $\angle$ΓΔΕ αντίστοιχα. Από το Ζ φέρονται οι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ.

Τα τρίγωνα $\triangle$ΒΓΖ, $\triangle$ΔΓΖ είναι ίσα: η ΒΓ είναι ίση με τη ΓΔ, η ΓΖ είναι κοινή και η $\angle$ΒΓΖ είναι ίση με την $\angle$ΔΓΖ από κατασκευή. [6] Άρα και τα ύψη ΖΘ, ΖΚ είναι ίσα[7] και μάλιστα ισούνται με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Αναλόγως κατασκευάζονται οι ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ, κλπ.

9.1 Το κανονικό πεντάγωνο

Σε τούτη τη παράγραφο θα μελετήσουμε την Ευκλείδεια κατασκευή του κανονικού πενταγώνου που από μόνη της είναι ένα πανέμορφο κομμάτι των μαθηματικών. Ως συνήθως, ο Ευκλείδης δεν μιλά περί κινήτρων η σκοπών κάποιων συγκεκριμένων ενδιάμεσων θεμάτων όπως λ.χ. την δ΄ 10, αλλά απλά παραθέτει το υλικό του. Το αποφασιστικό βήμα προς το πεντάγωνο είναι το 'λήμμα' δ΄ 10.

Πρόταση δ΄ 10.

Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο που έχει καθε μία από τις γωνίες του προς τη βάση διπλάσια της λοιπής.

Απόδειξη.

Ας είναι ΑΒ μία οποιαδήποτε ευθεία και ας τμηθεί στο γ ώστε

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}^2.$$ [8]

Έστω $\mathcal{K}$ ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ. Φέρεται ΒΔ ίση με την ΑΓ και συνδέονται οι ΑΔ, ΔΓ. Το ζητούμενο τρίγωνο είναι το $\triangle$ΑΒΔ. Πράγματι:

Αν $\mathcal{H}$ είναι το ημικύκλιο γύρω από το $\triangle$ΑΓΔ, επειδή το Β είναι εκτός του $\mathcal{H}$, η ΒΑ το τέμνει στο Α και στο Γ και 'εμπίπτει' σε αυτό. Από κατασκευή

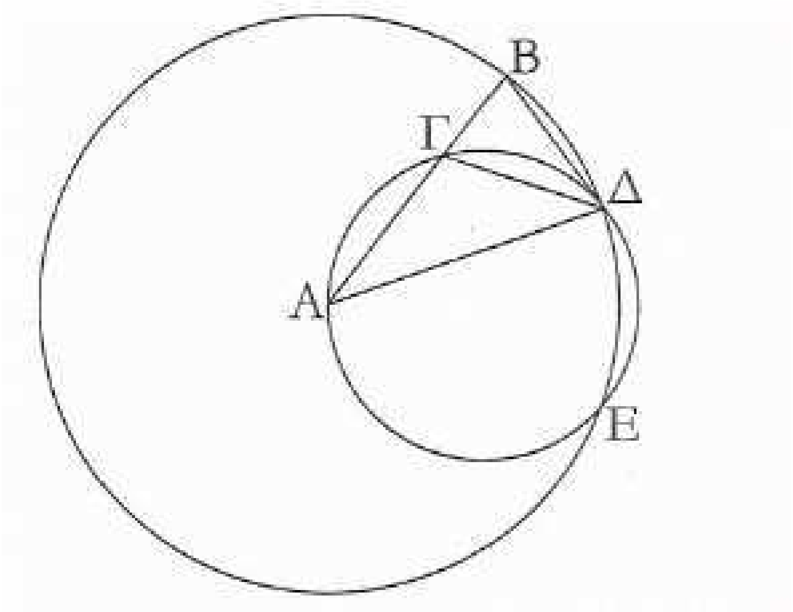
$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Delta}^2.$$

Τώρα το αποφασιστικό βήμα είναι η εφαρμογή της Πρότασης γ΄ 37:

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Delta}^2 \text{ άρα η } \mathrm{B\Delta} \text{ είναι εφαπτόμενη στο } \mathcal{H}.$$

Άρα, $\angle$ΒΔΓ=$\angle$ΒΑΔ από την γ΄ 32 επειδή η τελευταία είναι η γωνία στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου $\mathcal{H}$. Τα υπόλοιπα είναι ένας καταιγισμός πυροτεχνημάτων ισοσκελών τριγώνων! Αφού το $\triangle$ΒΑΔ είναι ισοσκελές,

[6] Πρόταση α΄ 4.
[7] Ο Ευκλείδης το αποδεικνύει αυτό λεπτομερώς.
[8] Πρόταση β΄ 11.



Σχήμα 9.4: Πρόταση δ' 10.

$$\angle\mathrm{AB\Delta}=\angle\mathrm{B\Delta\Gamma}+\angle\mathrm{\Gamma\Delta A}=\angle\mathrm{BA\Delta}+\angle\mathrm{\Gamma\Delta A}.$$

Η $\angle\mathrm{B\Gamma\Delta}$ είναι εξωτερική του $\triangle\mathrm{\Delta A\Gamma}$:

$$\angle\mathrm{B\Gamma\Delta}=\angle\mathrm{BA\Delta}+\angle\mathrm{\Gamma\Delta A}=\angle\mathrm{AB\Delta}.$$

Άρα, το $\triangle\mathrm{\Delta\Gamma B}$ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές, και λόγω κατασκευής

$$\mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{B\Delta}=\mathrm{A\Gamma}.$$

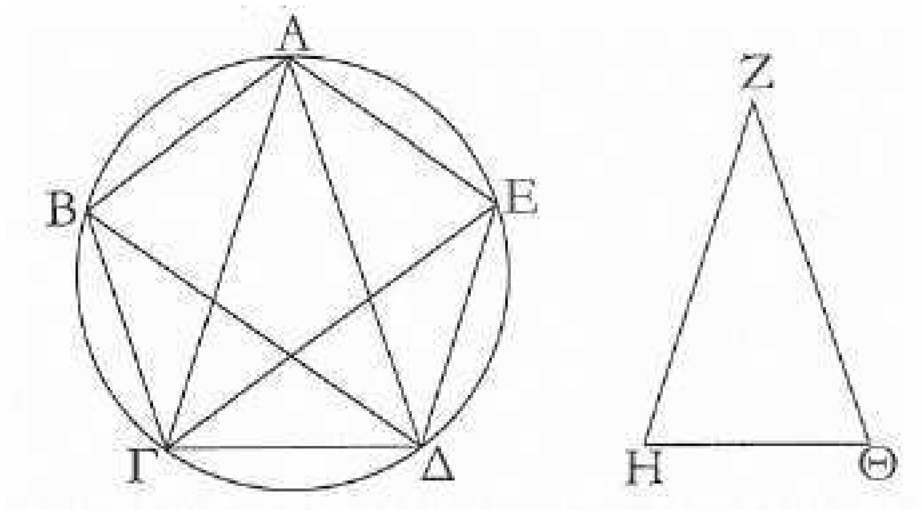
Τώρα το $\triangle\mathrm{\Delta\Gamma A}$ είναι ισοσκελές, άρα

$$\angle\mathrm{BA\Delta}=\angle\mathrm{\Gamma\Delta A}.$$

Άρα οι γωνίες στη βάση, $\angle\mathrm{AB\Delta}=\angle\mathrm{BA\Delta}+\angle\mathrm{\Gamma\Delta A}=\angle\mathrm{BA\Delta}+\angle\mathrm{BA\Delta}$, είναι διπλάσιες της λοιπής $\angle\mathrm{BA\Delta}$, Ο.Ε.Δ. □

Πρόταση δ' 11.

Στο δοθέντα κύκλο, να εγγραφεί πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.
Απόδειξη.



Σχήμα 9.5: Πρόταση δ΄ 11. Εγγραφή κανονικού πενταγώνου σε κύκλο.

Στο δοθέντα κύκλο, εγγράφεται με την μέθοδο της Πρότασης δ΄ 2 τρίγωνο $\triangle$ΑΔΓ ισογώνιο με αυτό που κατασκευάστηκε στην Πρόταση δ΄ 10. Διχοτομούνται οι γωνίες στα Γ και Δ και προεκτείνονται οι διχοτόμοι στα Ε και Β. Συνδέονται οι ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

1. Το πεντάγωνο είναι ισόπλευρο. Από κατασκευή, οι πέντε γωνίες $\angle$ΔΑΓ, $\angle$ΑΓΕ, $\angle$ΕΓΔ, $\angle$ΓΔΒ,$\angle$ΒΔΑ είναι ίσες μεταξύ τους, άρα από την Πρόταση γ΄ 26 βαίνουν σε ίσα τόξα και από την γ΄ 29 σε ίσες χορδές.

2. με ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό του εξαγώνου, προκύπτει ότι το πεντάγωνο είναι και ισογώνιο. [9]

□

[9] Ο De Morgan σχολιάζει ότι η μέθοδος της απόδειξης της Πρότασης δ΄ 11 δεν είναι τόσο φυσιολογική, αλλά, αν κοιτάξουμε το σχήμα θα καταλάβουμε ότι σχηματίζεται το *πεντάγραμμο* εκτός από την ευθεία ΒΕ. Είναι γνωστή η ενασχόληση του Ίππασου του Μεταποντίνου με το πεντάγωνο-δωδεκάεδρο. Άρα η μέθοδος δείχνει πυθαγόρεια και συνεπώς μεγάλου ιστορικού ενδιαφέροντος.

Μία άλλη μέθοδος θα μπορούσε να είναι η εξής: Με την δ΄ 10, εγγράφεται ένα δεκάγωνο στον κύκλο, και κατόπιν ενώνονται οι εναλλάξ κορυφές.

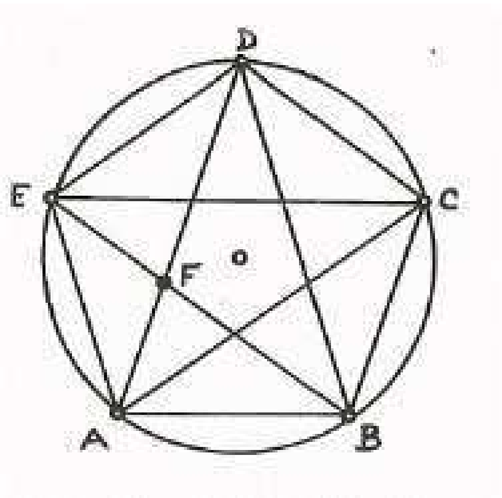
9.2 Εικασίες για το πεντάγωνο

Σε τούτη την παράγραφο θα παραθέσουμε ορισμένες εικασίες για την κατασκευή του εγγεγραμμένου κανονικού πενταγώνου, της οποίας έχουμε ήδη εικάσει την Πυθαγόρεια προέλευση. Θα εξετάσουμε τους επιτρεπτούς (και μη) τρόπους κατασκευών, ακολουθώντας την χρήσιμη διαδικασία της 'ανάλυσης και της σύνθεσης ' όπως αυτή περιγράφεται στην σύντομη προσθήκη στις Προτάσεις ιγ′ 1–5 των Στοιχείων:[10]

Ανάλυση είναι η παραδοχή του αποτελέσματος και η άφιξη μέσω αυτού σε κάποια αληθή πρόταση.

Σύνθεση είναι η παραδοχή των υποθέσεων και η άφιξη μέσω αυτών στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Στη μαθηματική έρευνα, τούτα χρησιμοποιούνται συνεχώς. Αν υποθέσουμε ότι αποδείξαμε ένα αποτέλεσμα, εξετάζουμε εάν μπορούμε να αντιστρέψουμε τις συνεπαγωγές για να φτάσουμε στην υπόθεση. Με άλλα λόγια η ανάλυση είναι η προσπάθεια απόδειξης του 'αντιστρόφου' μιας πρότασης $p \implies q$. Η σύνθεση είναι η καθεαυτή προσπάθεια της απόδειξης της πρότασης, και μόνο αυτή καθιστά την απόδειξη ισχύουσα.



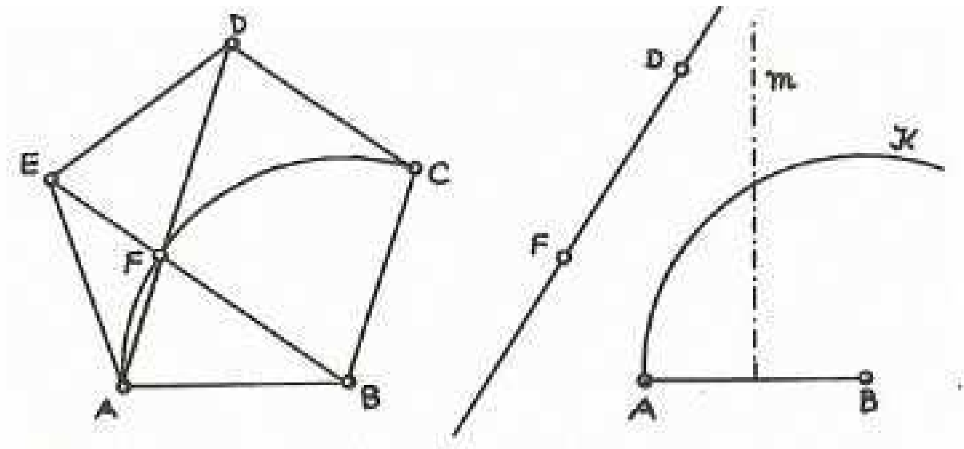
Σχήμα 9.6: Πρώτη ανάλυση του πενταγώνου.

[10]Η προσθήκη αυτή παραλείφθηκε από την οριστική εκδοχή των Στοιχείων.

Πρώτη ανάλυση του πενταγώνου

Υποθέτουμε ότι δίδεται ένα κανονικό εγγεγραμμένο πεντάγωνο μαζί με τις διαγωνίους του (Σχήμα 9.6).

Οι γωνίες $\angle BAC$ και $\angle ACE$ είναι ίσες, όπως εύκολα προκύπτει από την ισότητα των $\triangle DAC$ και $\triangle ACE$. Άρα η διαγώνιος AD είναι παράλληλη στην πλευρά BC. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι όλες οι διαγώνιοι είναι παράλληλες στις απέναντι αντίστοιχες πλευρές. Άρα το τετράπλευρο $BCDF$ είναι παραλληλόγραμμο· άρα η BF είναι ίση με την πλευρά του πενταγώνου, και τα σημεία C, F και A θα κείνται σε κύκλο $\mathcal{K}$ κέντρου B και ακτίνας BA. Από συμμετρία, η κορυφή D θα κείται στη μεσοκάθετο της AB. Όπως παραπάνω, η DF είναι ίση με την AB.



Σχήμα 9.7: Πρώτη σύνθεση του πενταγώνου: Νεύση.

Πρώτη σύνθεση του πενταγώνου: Νεύση

Η μέθοδος της *νεύσης* δεν είναι τίποτε άλλο από την χρησιμοποίηση *διαβαθμισμένου κανόνα* δηλαδή του χάρακα. Τούτη η μέθοδος προφανώς δεν υπάρχει στα Στοιχεία όπου τα μόνα επιτρεπτά γεωμετρικά εργαλεία είναι ο κανόνας και ο διαβήτης.[11] Είναι όμως γεγονός, ότι αρκετοί Έλληνες μαθηματικοί εξάσκη-

[11] Τούτο μάλλον οφείλεται σε πλατωνικές παραδόσεις, αν και πουθενά στα πλατωνικά κείμενα δεν καθορίζεται αυτός ο περιορισμός. Πάντως από ένα σημείο και ύστερα καθιερώθηκε· έτσι η νεύση έπαψε να θεωρείται παραδεκτή μέθοδος απόδειξης.

σαν την μέθοδο της νεύσης, ανάμεσά του και ο Ιπποκράτης ο Χίος. Ο Πάππος επίσης αναφέρει ότι ο Απολλώνιος ο Περγαίος έγραψε δύο βιβλία *Περί νεύσεως*.

Τα βιβλία αυτά χάθηκαν, αλλά ο Πάππος περιγράφει τη μέθοδο· ας δούμε πως αυτή εφαρμόζεται στο πεντάγωνο:

Χαράσσουμε τον κανόνα με δύο σημεία D, F ώστε $DF = AB$. (Σχήμα 9.7). Από την AB κατασκευάζουμε την m και τον κύκλο $\mathcal{K}$ και κατόπιν γλιστράμε τον χάρακα στη θέση όπου το $D \in m$, το $F \in \mathcal{K}$ και η προεκτεταμένη DF περνά από το A. Το να συμπληρωθεί το πεντάγωνο είναι τώρα εύκολο, αν και πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι κανονικό.

Δεύτερη ανάλυση του πενταγώνου

Οι δυσκολίες στην κατασκευή του πενταγώνου αυξάνονται δραματικά αν ξεχάσουμε τη νεύση. Ο Ευκλείδης, χωρίς να το λέει παραθέτει την ανάλυση του πενταγώνου στα πλαίσια της θεωρίας της ομοιότητας. Εκκινώντας από δοθείσα πλευρά του πενταγώνου που πρέπει να κατασκευαστεί, πρέπει κάπως να ορίσουμε τη διαγώνιο. Παραθέτουμε πρώτα τον παρακάτω Ορισμό 3 του Βιβλίου στ΄:

Μία ευθεία λέγεται ότι έχει τμηθεί σε μέσο και άκρο λόγο, εάν ο λόγος όλης της ευθείας πρός το μεγαλύτερο τμήμα της είναι ίσο με το λόγο του μεγαλύτερου τμήματός της προς το μικρότερο.[12]

Πρόταση ιγ΄ 8.

Σε κανονικό πεντάγωνο οι διαγώνιοι που υποτείνονται από δύο διαδοχικές γωνίες, τέμνουν η μία την άλλη σε μέσο και άκρο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματά τους είναι ίσα με την πλευρά του πενταγώνου.

Συντομευμένη απόδειξη.

Δείχνουμε πρώτα ότι το $DCHE$ είναι παραλληλόγραμμο· άρα $EH = DC = AB$ (Σχήμα). Κατόπιν τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle HAB$ είναι ισογώνια, άρα η στ΄ 4 δίδει

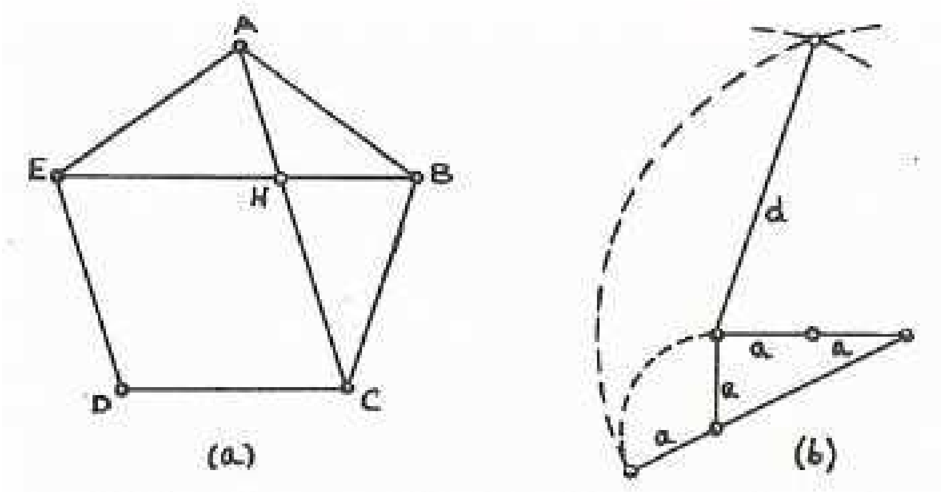
$$EB : BA = AB : BH.$$

Αλλά $AB = EH$· άρα

$$BE : EH = EH : HB.$$

□

[12] Και πάλι η χρυσή τομή. Συγκρίνετε με την Πρόταση β΄ 11.



Σχήμα 9.8: Δεύτερη ανάλυση του πενταγώνου.

Από την στ′ 16, το παραπάνω είναι ισοδύναμο με την

$$BE \cdot HB = EH^2,$$

δηλαδή τη συνθήκη της β′ 11. Ας θέσουμε προς στιγμή $x = BE$ και a για μία από τις πλευρές του πενταγώνου. Τότε $HB = x - a$ και παίρνουμε την εξίσωση

$$x(x-a) = a^2,$$

όπου ο a είναι δοθείς και ο x άγνωστος. Εάν $a = 2b$ τότε

$$\begin{aligned} x^2 - 2bx &= 4b^2, \\ x^2 - 2bx + b^2 &= 5b^2, \\ (x-b)^2 &= 5b^2. \end{aligned}$$

Από αυτό το x κατασκευάζεται εύκολα και παίρνουμε το χαρακτηριστικό τρίγωνο της δ′ 10 όπως στο Σχήμα 9.8 (b).

Δεύτερη σύνθεση του πενταγώνου

Εκκινώντας από την $a = 2b$ όπως στο Σχήμα 9,8 (a), παίρνουμε το x και το τρίγωνο της δ′ 10 με την χαρακτηριστική του ιδιότητα και μπορούμε κατόπιν να προχωρήσουμε, αλλά χρησιμοποιώντας συνεχώς θεωρία ομοιότητας.

Τρίτη σύνθεση του πενταγώνου

Όχι μόνον η νεύση, αλλά και τα επιχειρήματα ομοιότητας είναι απαγορευμένα. Αυτή είναι η σύνθεση του Ευκλείδη.

Συμπέρασμα

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να φανταστούμε τα ακόλουθα στάδια που πέρασε το βιβλίο δ΄:

1. Κατασκευάζει κάποιος (μάλλον Πυθαγόρειος) το πεντάγωνο με τη μέθοδο της νεύσης.
2. Το επιχείρημα της νεύσης απαλείφεται και αντικαθίσταται από κάποιο όμοιο με αυτό του σχήματος
3. Κάποιος (μάλλον και πάλι Πυθαγόρειος, αλλά με επιρροές από τον Πλάτωνα) γράφει μία μονογραφία χρησιμοποιώντας κάποια θεωρία αναλογιών, αλλά ουσιαστικά δίδοντας το κείμενο που βρίσκουμε στα Στοιχεία.