

Ευκλείδεια Γεωμετρία–Σημειώσεις

Ι.Δ. Πλατής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

9 Δεκεμβρίου 2009

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης που επέλεξαν το μάθημα Μ207 Ευκλείδεια Γεωμετρία του κανονικού Προγράμματος Σπουδών.

Σκοπός αυτών των σημειώσεων είναι να προσδώσουν σε ένα υποψιασμένο ακροατήριο από την μία την ιστορική βάση και από την άλλη την μαθηματική αυστηρότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας όπως αυτή παρατίθεται στα *Στοιχεία*. Προφανώς, κατά τη διάρκεια ενός διδακτικού εξαμήνου είναι απολύτως αδύνατο να καλυφθούν και τα δεκατρία βιβλία των Στοιχείων (ή έστω τα εννέα ‘γεωμετρικά’ α' - σ' και $\iota\alpha'$ - $\iota\gamma'$). Οι ανά χείρας σημειώσεις αφορούν έτσι τα Βιβλία α' - σ' (Επιπεδομετρία). Ενδεχομένως να εμπλουτιστούν κάποτε και με την ύλη των Βιβλίων $\iota\alpha'$ - $\iota\gamma'$ (Στερεομετρία), πράγμα που είναι μάλλον απαραίτητο δεδομένης της πλήρους εγκατάλειψης (και) της Στερεομετρίας στην διδακτική ύλη του Γυμνασίου και του Λυκείου. Το τελευταίο γεγονός είναι ιδιαίτερα ζημιογόνο, καθώς όλο και περισσότεροι νέοι φοιτητές και φοιτήτριες αντιμετωπίζουν σοβαρό πρόβλημα με την γεωμετρική αίσθηση του χώρου.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ως κλάδος των μαθηματικών, έχει από καιρό πάψει να βρίσκεται στην κορυφή της σύγχρονης έρευνας. Μολαταύτα, η ομορφιά της και η παιδαγωγική-διδακτική της αξία παραμένουν αζεπέραστες εδώ και περίπου 2300 χρόνια. Εάν ο αναγνώστης ‘διεγείρει’ το νου του διαβάζοντας το κείμενο που ακολουθεί, τότε οι σημειώσεις αυτές θα έχουν πετύχει το σκοπό τους.

Ι.Δ. Πλατής
Ηράκλειο Κρήτης
Σεπτέμβριος 2009

Θεός ἀεί γεωμετρῆι

Εισαγωγή

Καταβλήθηκε προσπάθεια οι σημειώσεις αυτές να βρίσκονται μέσα σε ένα αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο, παρά την αρκετά μεγάλη παράθεση ιστορικών σχολίων. Πολλές από τις κύριες Προτάσεις των Στοιχείων διατυπώνονται και αποδεικνύονται μεταφρασμένες από το αρχαίο κείμενο και με τα σχήματά τους, ώστε να δίδουν στην αναγνώστρια και στον αναγνώστη επακριβή εικόνα του τρόπου γραφής του Ευκλείδη. Αλλού, όπως για παράδειγμα στο κεφάλαιο 11 περί αναλογιών, προτιμήθηκε ο σύγχρονος τρόπος γραφής, αλλά και πάλι με ‘μαθηματικό’ σκοπό. Σε κάθε περίπτωση, ο Ευκλείδης ήταν αυτός που μας έμαθε όλους να γράφουμε ένα μαθηματικό κείμενο λιτά και αυστηρά. Ένας από τους λόγους ύπαρξης της διδασκαλίας αυτού του μαθήματος είναι και η εμπέδωση αυτής της αντίληψης από τους μελλοντικούς δασκάλους και ερευνητές των μαθηματικών.

Οι σημειώσεις χωρίζονται σε δώδεκα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 1 δίδεται το γενικό ιστορικό πλαίσιο της αρχαίας εποχής και στο κεφάλαιο 2 παρατίθεται μέρος της μαρτυρία του μαθητή του Αριστοτέλη Ευδήμου για τα Ελληνικά μαθηματικά στην εποχή μέχρι τον Ευκλείδη. Το κεφάλαιο 3 ασχολείται με το Βιβλίο α΄ των Στοιχείων που αποτελεί την βασική γεωμετρία, ενώ στα κεφάλαια 4 και 5 παρατίθενται διάφορα σχόλια για το πέμπτο αίτημα και τον Πυθαγόρα αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 6 εξετάζεται το Βιβλίο β΄, η γεωμετρική εκδοχή των Ελλήνων για τη σύγχρονη στοιχειώδη άλγεβρα, και στο κεφάλαιο 7, σαν εισαγωγή στα περί κύκλου, αναφέρεται περιληπτικά η ιστορία του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου. Το κεφάλαιο 8 είναι αφιερωμένο στο Βιβλίο γ΄ (κύκλοι), το κεφάλαιο 9 στο Βιβλίο δ΄ (κανονικά πολύγωνα) ενώ το κεφάλαιο 10 περιέχει λίγα σχόλια για την εξέλιξη της θεωρίας των κανονικών πολυγώνων μέχρι και την εποχή του Gauss. Τέλος, τα κεφάλαια 11 και 12 ασχολούνται με το Βιβλίο ε΄ (αναλογίες) και το Βιβλίο στ΄ (ομοιότητα) αντίστοιχα.

Στο Παράρτημα βρίσκεται ένας αριθμός ασκήσεων που αφορούν στις Προτάσεις των Στοιχείων. Τούτες είναι απολύτως ενδεικτικές· υπάρχει μία πλειάδα

ασκήσεων Ευκλείδειας γεωμετρίας με την οποία ερχόμαστε αντιμέτωποι από τα σχολικά μας χρόνια. Η παράθεση των ασκήσεων του παραρτήματος δεν έχει φυσικά σκοπό να τρέψει τις φοιτήτριες και τους φοιτητές για άλλη μία φορά στην απωθητική και αντι-μαθηματική ασκησιολογία, αλλά μάλλον το αντίθετο· δηλαδή, να υποδείξει ότι για την λύση των μαθηματικών προβλημάτων πρώτα βάζουμε το μυαλό μας να δουλέψει προς τη σωστή κατεύθυνση και εντέλει εφαρμόζουμε πάντοτε το *ξυράφι του Όκκαμ*: μεταξύ όλων των δυνατών λύσεων, επιλέγουμε την απλούστερη.

Βιβλιογραφία

Οι σημειώσεις βασίζονται στο μεγαλύτερο μέρος τους στο βιβλίο

1. Benno Artmann, *Euclid, the creation of mathematics*, και στο πλέον κλασσικό βιβλίο για τα Στοιχεία του Ευκλείδη
2. Sir Thomas Heath, *Euclid's elements, Volumes I, II, III*.

Περιεχόμενα

1	Γενικά Ιστορικά Σχόλια	9
2	Πηγές I: Εύδημος	11
3	Βιβλίο α': Βασική Γεωμετρία	15
3.1	Περιεχόμενα του Βιβλίου α'	15
3.2	Ορισμοί και αξιώματα	16
3.3	Βιβλίο α', Μέρος Α: Θεμέλια	18
3.3.1	Προτάσεις α' 7–15	23
3.3.2	Προτάσεις α' 17–20	25
3.3.3	Προτάσεις α' 21–26.	26
3.4	Βιβλίο α', Μέρος Β: Παράλληλες	26
3.5	Βιβλίο α', Μέρος Γ: Παραλληλόγραμμα	32
3.5.1	Μερικά σχόλια επάνω στις Προτάσεις α' 44/45	39
3.6	Βιβλίο α', Μέρος Δ: Πυθαγόρειο Θεώρημα	40
4	Πηγές II: Πέμπτο αίτημα	47
5	Πηγές III: Πυθαγόρας	51
6	Βιβλίο β': Η Γεωμετρία των Ορθογωνίων	57
6.1	Ορισμοί	57
6.2	Προτάσεις του βιβλίου β'	58
7	Πηγές IV: Τετραγωνίζοντας τον κύκλο	69
8	Βιβλίο γ': Περί κύκλου	73
8.1	Περιεχόμενα του Βιβλίου γ'	73
8.2	Ορισμοί	74

8.3	Βιβλίο γ', Μέρος Α: Χορδές, σχετική θέση κύκλων	75
8.4	Βιβλίο γ', Μέρος Β: Εφαπτόμενες	80
8.5	Βιβλίο γ', Μέρος Γ1: Γωνίες σε τμήματα	84
8.6	Βιβλίο γ', Μέρος Γ2: Χορδές, τόξα και γωνίες	87
8.7	Βιβλίο γ', Μέρος Γ3: Γωνίες σε κύκλους ξανά	87
8.8	Βιβλίο γ' Μέρος Δ: Χορδές, τέμνουσες, εφαπτόμενες	90
9	Βιβλίο δ': Κανονικά πολύγωνα	95
9.1	Το κανονικό πεντάγωνο	100
9.2	Εικασίες για το πεντάγωνο	103
10	Πηγές VI: Πολύγωνα	109
10.1	Τί χάσαμε στο Βιβλίο δ'	109
10.2	Τι γνώριζε ο Ευκλείδης	110
10.3	Τι έκανε ο Αρχιμήδης	111
10.4	Τι απέδειξε ο Gauss	112
10.5	Πως το έκανε ο Gauss	112
11	Βιβλίο ε': Αναλογίες	115
11.1	Αναλογίες εκτός μαθηματικών	115
11.2	Γενικά σχόλια	116
11.3	Αναλογίες: Σύγχρονη εκδοχή	117
11.4	Ορισμοί	120
11.5	Προτάσεις του Βιβλίου ε'	121
12	Βιβλίο στ': Ομοιότητα	127
12.1	Περιεχόμενα του βιβλίου στ'	127
12.2	Ορισμοί	128
12.3	Η βάση της γεωμετρίας της ομοιότητας	129
12.4	Βασικά θεωρήματα	130
12.5	Βιβλίο στ', Μέρος Γ	136
12.6	Βιβλίο στ', Μέρος Δ	138
12.7	Βιβλίο στ', Μέρος Ε	140
13	Παράρτημα: Ασκήσεις	143