Ευκλείδεια Γεωμετρία–Σημειώσεις

Ι.Δ. Πλατής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

9 Δεκεμβρίου 2009

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης που επέλεξαν το μάθημα Μ207 Ευκλείδεια Γεωμετρία του κανονικού Προγράμματος Σπουδών.

Σκοπός αυτών των σημειώσεων είναι να προσδώσουν σε ένα υποψιασμένο ακροατήριο από την μία την ιστορική βάση και από την άλλη την μαθηματική αυστηρότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας όπως αυτή παρατίθεται στα *Στοιχεία*. Προφανώς, κατά τη διάρκεια ενός διδακτικού εξαμήνου είναι απολύτως αδύνατο να καλυφθούν και τα δεκατρία βιβλία των Στοιχείων (ή έστω τα εννέα 'γεωμετρικά' α΄–στ΄ και ια΄–ιγ΄). Οι ανά χείρας σημειώσεις αφορούν έτσι τα Βιβλία α΄–στ΄ (Επιπεδομετρία). Ενδεχομένως να εμπλουτιστούν κάποτε και με την ύλη των Βιβλίων ια΄–ιγ΄ (Στερεομετρία), πράγμα που είναι μάλλον απαραίτητο δεδομένης της πλήρους εγκατάλειψης (και) της Στερεομετρίας στην διδακτική ύλη του Γυμνασίου και του Λυκείου. Το τελευταίο γεγονός είναι ιδιαίτερα ζημιογόνο, καθώς όλο και περισσότεροι νέοι φοιτητές και φοιτήτριες αντιμετωπίζουν σοβαρό πρόβλημα με την γεωμετρική αίσθηση του χώρου.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ως κλάδος των μαθηματικών, έχει από καιρό πάψει να βρίσκεται στην κορυφή της σύγχρονης έρευνας. Μολαταύτα, η ομορφιά της και η παιδαγωγική–διδακτική της αξία παραμένουν αξεπέραστες εδώ και περίπου 2300 χρόνια. Εάν ο αναγνώστης 'διεγείρει' το νου του διαβάζοντας το κείμενο που ακολουθεί, τότε οι σημειώσεις αυτές θα έχουν πετύχει το σκοπό τους.

Ι.Δ. Πλατής
Ηράκλειο Κρήτης
Σεπτέμβριος 2009

Θεός ἀεί γεωμετρεῖ

Εισαγωγή

Καταβλήθηκε προσπάθεια οι σημειώσεις αυτές να βρίσκονται μέσα σε ένα αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο, παρά την αρκετά μεγάλη παράθεση ιστορικών σχολίων. Πολλές από τις κύριες Προτάσεις των Στοιχείων διατυπώνονται και αποδεικνύονται μεταφρασμένες από το αρχαίο κείμενο και με τα σχήματα τους, ώστε να δίδουν στην αναγνώστρια και στον αναγνώστη επακριβή εικόνα του τρόπου γραφής του Ευκλείδη. Αλλού, όπως για παράδειγμα στο κεφάλαιο 11 περί αναλογιών, προτιμήθηκε ο σύγχρονος τρόπος γραφής, αλλά και πάλι με 'μαθηματικό' σκοπό. Σε κάθε περίπτωση, ο Ευκλείδης ήταν αυτός που μας έμαθε όλους να γράφουμε ένα μαθηματικό κείμενο λιτά και αυστηρά. Ένας από τους λόγους ύπαρξης της διδασκαλίας αυτού του μαθήματος είναι και η εμπέδωση αυτής της αντίληψης από τους μελλοντικούς δασκάλους και ερευνητές των μαθηματικών.

Οι σημειώσεις χωρίζονται σε δώδεκα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 1 δίδεται το γενικό ίστορικό πλαίσιο της αρχαίας εποχής και στο κεφάλαιο 2 παρατίθεται μέρος της μαρτυρία του μαθητή του Αριστοτέλη Ευδήμου για τα Ελληνικά μαθηματικά στην εποχή μέχρι τον Ευκλείδη. Το κεφάλαιο 3 ασχολείται με το Βιβλίο α′ των Στοιχείων που αποτελεί την βασική γεωμετρία, ενώ στα κεφάλαια 4 και 5 παρατίθενται διάφορα σχόλια για το πέμπτο αίτημα και τον Πυθαγόρα αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 6 εξετάζεται το Βιβλίο β′, η γεωμετρική εκδοχή των Ελλήνων για τη σύγχρονη στοιχειώδη άλγεβρα, και στο κεφάλαιο 7, σαν εισαγωγή στα περί κύκλου, αναφέρεται περιληπτικά η ιστορία του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου. Το κεφάλαιο 8 είναι αφιερωμένο στο Βιβλίο γ′ (κύκλοι), το κεφάλαιο 9 στο Βιβλίο δ′ (κανονικά πολύγωνα) ενώ το κεφάλαιο 10 περιέχει λίγα σχόλια για την εξέλιξη της θεωρίας των κανονικών πολυγώνων μέχρι και την εποχή του Gauss. Τέλος, τα κεφάλαια 11 και 12 ασχολούνται με το Βιβλιο ε′ (αναλογίες) και το Βιβλίο στ′ (ομοιότητα) αντίστοιχα.

Στο Παράρτημα βρίσκεται ένας αριθμός ασκήσεων που αφορούν στις Προτάσεις των Στοιχείων. Τούτες είναι απολύτως ενδεικτικές· υπάρχει μία πλειάδα ασκήσεων Ευκλείδειας γεωμετρίας με την οποία ερχόμαστε αντιμέτωποι από τα σχολικά μας χρόνια. Η παράθεση των ασκήσεων του παραρτήματος δεν έχει φυσικά σκοπό να τρέψει τις φοιτήτριες και τους φοιτητές για άλλη μία φορά στην απωθητική και αντι–μαθηματική ασκησιολογία, αλλά μάλλον το αντίθετο· δηλαδή, να υποδείξει ότι για την λύση των μαθηματικών προβλημάτων *πρώτα* βάζουμε το μυαλό μας να δουλέψει προς τη σωστή κατεύθυνση και εντέλει εφαρμόζουμε πάντοτε το *ξυράφι του Όκκαμ:* μεταξύ όλων των δυνατών λύσεων, επιλέγουμε την απλούστερη.

Βιβλιογραφία

Οι σημειώσεις βασίζονται στο μεγαλύτερο μέρος τους στο βιβλίο

1. Benno Artmann, *Euclid, the creation of mathematics*,

και στο πλέον κλασσικό βιβλίο για τα Στοιχεία του Ευκλείδη

2. Sir Thomas Heath, *Euclid's elements, Volumes I, II, III.*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Γενικά Ιστορικά Σχόλια

Η περιγραφή 'Αρχαία Ελλάδα' παραπέμπει στην περίοδο χονδρικά από το 800 π.Χ. έως το 150 π.Χ. περίπου, δηλαδή από την εποχή του Ομήρου μέχρι την καθιέρωση της Ρωμαϊκής ηγεμονίας επί του Ελληνικού κόσμου. Οι πρώτοι Ολυμπιακοί αγώνες έγιναν το 776 π.Χ.· η δημοκρατία εισαγόταν στην πολιτική ζωή των πόλεων–κρατών σταδιακά από το 600 π.Χ. και μετά. Οι Έλληνες υπερασπίστηκαν την ελευθερία τους εναντίον των Περσών κατά την διάρκεια των Περσικών Πολέμων (500-479), μετά από τους οποίους η μεγάλη κλασσική περίοδος της Ελλάδας υπό την πολιτιστική αρχηγία των Αθηνών διήρκεσε μέχρις ότου οι Μακεδόνες βασιλείς Φίλιππος και Αλέξανδρος ο Μέγας επέβαλαν απολυταρχικά καθεστώτα γύρω στο 330 π.Χ. Μαζί με τους Επιγόνους τους διέδωσαν τον Ελληνικό πολιτισμό σε ολόκληρο τον αρχαίο κόσμο κατά την Ελληνιστική περίοδο που τελείωσε με τον θάνατο της Κλεοπάτρας και την υποδούλωση της Αιγύπτου στους Ρωμαίους γύρω στο 30 π.Χ. Οι επιστήμες και η φιλοσοφία παρέμειναν ο χώρος των Ελλήνων έως το τέλος της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας. Ο *Βοήθιος*, ο επικαλούμενος και τελευταίος των Ρωμαίων, ήταν ο πρώτος συγγραφέας που μετέφρασε μαθηματικά κείμενα από τα Ελληνικά στα Λατινικά γύρω στο 500 μ.Χ. Οι Ρωμαίοι κυβέρνησαν την αυτοκρατορία τους χωρίς καθόλου μαθηματικά. [1]

Τα Ελληνικά μαθηματικά και η φιλοσοφία εκκινούν από τον *Θαλή τον Μιλήσιο* γύρω στο 580 π.Χ, για τον οποίο ελάχιστα είναι γνωστά. Είναι βέβαιο ότι οι Έλληνες έμαθαν κάποιους μαθηματικούς κανόνες και διαδικασίες, και ειδικότερα αστρονομία, από τους παλαιούς πολιτισμούς της Αιγύπτου και της

[1] Οι Ρωμαίοι θεωρούσαν ότι $\pi = 4$! Είναι απορίας άξιο το πως κατόρθωσαν να κατασκευάσουν τόσο τέλεια κυκλικά κτίρια όπως λ.χ. η Ροτόντα της Θεσσαλονίκης.

Μεσοποταμίας, αλλά τίποτε δεν έχει βρεθεί σε αυτές τις πηγές με την έννοια των μαθηματικών όπως τα ξέρουμε σήμερα και που τα συναντούμε στην εργασία του Ευκλείδη.[2]

Τα μαθηματικά ως θεωρητική επιστήμη ανακαλύφθηκαν στην κλασσική περίοδο της Ελλάδας, ξεκινώντας από τον Θαλή και τον *Πυθαγόρα τον Σάμιο* γύρω στο 530 π.Χ. και βρήκαν την τελική μορφή τους με τον Ευκλείδη γύρω στο 300 π.Χ. Οι εργασίες των Ελλήνων στα μαθηματικά είναι του ιδίου ύψους με αυτές στη φιλολογία, γλυπτική, ζωγραφική, αρχιτεκτονική, ιστοριογραφία, ιατρική και φιλοσοφία.

[2]Σχετικά με το θέμα είναι το κλασσικό βιβλίο του Van der Waerden, *Οι απαρχές των μαθηματικών* όπως και το εκλαϊκευμένο του Ντενί Γκετζ, *Το θεώρημα του παπαγάλου*.

Κεφάλαιο 2

Πηγές των μαθηματικών Ι: Η μαρτυρία του Ευδήμου

Η σπουδαιότερη πηγή μας για την ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών πρίν τον Ευκλείδη οφείλεται στον Εύδημο τον Ρόδιο, έναν μαθητή του Αριστοτέλη που έζησε περίπου από το 350 έως το 300 π.Χ. Έγραψε ένα βιβλίο πάνω στην ιστορία των μαθηματικών, το οποίο χάθηκε. Κάποια κομμάτια του διασώθηκαν από αναφορές άλλων συγγραφέων· το ακόλουθο οφείλεται στον Πρόκλο (410–485 μ.Χ.) και βρίσκεται στα *Σχόλια* του πάνω στον Ευκλείδη.

Περιορίζοντας τις έρευνές μας στην αρχή των τεχνών και των επιστημών της εποχής μας, λέμε, όπως οι περισσότεροι ιστορικοί συγγραφείς, ότι η γεωμετρία ανακαλύφθηκε πρώτα από τους Αιγυπτίους με σκοπό την μέτρηση των γαιών τους. Αυτό τους ήταν αναγκαίο διότι ο Νείλος υπερχείλιζε και έσβηνε τα σύνορα μεταξύ των ιδιοκτησιών τους. Δεν είναι έκπληξη ότι τούτη η ανακάλυψη όπως και άλλες οφειλόταν στην ανάγκη, εφόσον όλα στον κόσμο προχωρούν από την ατέλεια στην τελειότητα...

...Ο Θαλής, ο οποίος είχε ταξιδέψει στην Αίγυπτο, ήταν ο πρώτος που εισήγαγε αυτήν την επιστήμη στην Ελλάδα. Έκανε πολλές δικές του ανακαλύψεις και δίδαξε τις αρχές πολλών άλλων στους διαδόχους του, επιτιθέμενος σε ορισμένα προβλήματα με γενικό τρόπο και σε άλλα με εμπειρικό. Μετά απ΄ αυτόν ήταν ο Μάμερκος, αδελφός του ποιητή Στησίχορου, καθώς και ο Ιππίας ο Ηλείος...

...Μετά απ΄ αυτούς, ο Πυθαγόρας μετασχημάτισε τη μαθηματική φιλοσοφία σε ένα σχήμα ελεύθερης εκπαίδευσης, συγκεντρώνοσντας τις αρχές της από τα υψηλότερα επίπεδα πρός τα κάτω και εξερευνώντας τα θεωρήματά της με

ένα άυλο και διανοητικό τρόπο. Αυτός ήταν που ανακάλυψε την θεωρία των αναλογιών και την δομή των κοσμικών σχημάτων. Μετά απ΄ αυτόν ήταν ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος και ο Οινοπίδης ο Χίος...Τους ακολούθησαν ο Ιπποκράτης ο Χίος που ανακάλυψε την μέθοδο του τετραγωνισμού των μηνίσκων και συνέγραψε τα πρώτα Στοιχεία και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος...

...Ο Πλάτων, που εμφανίστηκε μετά από αυτούς, προώθησε τα μέγιστα τα μαθηματικά γενικότερα και τη γεωμετρία ειδικότερα λόγω του ζήλου του για αυτές τις σπουδές. Είναι γνωστό ότι τα γραπτά του είναι πυκνά διανθισμένα με μαθηματικούς όρους και ότι παντού προσπαθεί να διεγείρει το θαυμασμό για τα μαθηματικά από τους μαθητές της φιλοσοφίας. Σ΄ αυτήν την εποχή έζησαν και ο Λαοδάμας ο Θάσιος, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος και ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, διά των οποίων τα θεωρήματα αυξήθηκαν σε αριθμό και κατατάχθηκαν με πιο επιστημονικό τρόπο...

...Ο Εύδοξος ο Κνίδιος, μαθητής του Πλάτωνα, ήταν ο πρώτος που αύξησε τον αριθμό των επονομαζομένων γενικών θεωρημάτων· στις τρείς ήδη γνωστές αναλογίες πρόσθεσε άλλες τρεις... και εισήγαγε την μέθοδο της ανάλυσης στα μαθηματικά...

...Όχι πολύ μετά από όλους αυτούς ήρθε ο Ευκλείδης[1]*, που συγκέντρωσε τα Στοιχεία, κατατάσσοντας με συστηματικό τρόπο πολλά θεωρήματα του Ευδόξου, τελειοποιώντας πολλά του Θεαίτητου, και θέτοντας σε αδιάσειστα ευαπόδεικτη μορφή προτάσεις που ήταν μάλλον χαλαρά αποδεδειγμένες από τους προηγούμενούς του. Έζησε τον καιρό του Πτολεμαίου του πρώτου. Διότι ο Αρχιμήδης, ο οποίος ήρθε αμέσως μετά τον Πτολεμαίο, αναφέρει τον Ευκλείδη. Επιπλέον λένε ότι ο Πτολεμαίος ερώτησε κάποτε τον Ευκλείδη αν υπάρχει συντομότερος δρόμος για τη γεωμετρία από αυτόν των Στοιχείων, και αυτός απάντησε ότι δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη γεωμετρία* [2]*...*

Τι σημαίνει η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ;

Η ετυμολογία της λέξης μαθηματικά είναι βεβαίως από το *μάθημα* του οποίου το αντίστοιχο ρήμα είναι το *μανθάνειν* και πρωτοχρησιμοποιήθηκε με αυτήν την έννοια από τον Πλάτωνα και πιθανώς από τους Πυθαγορείους. Σχετικές λέξεις

[1] Όπως φαίνεται και από το χωρίο του Πρόκλου, ελάχιστα ήταν γνωστά για τον Ευκλείδη ακόμα και στην αρχαία εποχή. μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια περί το 300 π.Χ. Για περισσότερες λεπτομέρειες και δοξασίες γύρω από τον Ευκλείδη, κοιτάξτε την Εισαγωγή του Heath.

[2] Ουκ έστιν βασιλική ατραπός προς την γεωμετρίαν.

στα Ελληνικά είναι ακόμη οι *μάντις, μούσα, Προμηθέας*[3].

Η λέξη παράγεται από την Ινδοευρωπαϊκή ρίζα mendh– *να διεγείρεις (ερεθίζεις!) το πνεύμα κάποιου.* Παρακάτω βρίσκονται μερικές σχετικές λέξεις από άλλες γλώσσες:

Αγγλικά: mind (πνεύμα)
Γερμανικά: munter (ξύπνιος, ζωντανός)
Μέσα Υψηλά Γερμανικά: minne (αγάπη)
Γοτθικά: munda (σκοπεύω)
Παλαιά Σλαβικά: modru (σοφός)
Σανσκριτικά: man (σκέπτομαι)
Λατινικά: mens (πνεύμα).

[3] Ο Προμηθέας κατά τον μύθο ήταν ο εφευρέτης τον αριθμών. Ο Αισχύλος στον Προμηθέα Δεσμώτη (459-60) τον βάζει να λέγει μεταξύ άλλων στον Ηρακλή:

Και τον αριθμο΄, τον έξοχο των πραγμάτων, κατασκεύασα για τους ανθρώπους.

Χρονολογικός πίνακας

(Όλες οι χρονολογίες είναι π.Χ.)

Ιστορικά γεγονότα		Μαθηματικά
Γεωμετρική περίοδος της Ελληνικής τέχνης	900–600	
Ανακάλυψη των νομισμάτων	600	Θαλής (~ 580) Πυθαγόρας ($\sim 570-490$)
Περσικοί πόλεμοι ($\sim 500-480$)	500	
~ 460 Ναός του Διός στην Ολυμπία, Αναλογίες 2:1		Πυθαγόρειοι στη Νότιο Ιταλία
$\sim 450-430$ Περικλής, Χρυσός Αιώνας		
~ 440 Παρθενώνας		*Στοιχεία* του Ιπποκράτη του Χίου (~ 430)
Σωκράτης $\sim 470-399$		Θεόδωρος ο Κυρηναίος $\sim 460-390$
	400	
Πλάτων 428–348		Θεαίτητος $\sim 415-370$
Αριστοτέλης 384–322		Ο Λέων γράφει νέα *Στοιχεία* στην Πλάτωνος Ακαδημία Εύδοξος $\sim 410-355$
	350	
Μέγας Αλέξανδρος 356–323		Έργα διαφόρων συγγραφέων, λ.χ. *Κωνικά* του Μεναίχμου
	300	Ευκλείδης: *Στοιχεία*
Αλεξανδρινή εποχή 300–50	250	Αρχιμήδης ο Συρακόσιος, Απολλώνιος ο Περγαίος

Κεφάλαιο 3

Στοιχείων Βιβλίο α′: Βασική Γεωμετρία

3.1 Περιεχόμενα του Βιβλίου α′

Ορισμοί 1–23	Βασικές έννοιες ορίζονται και περιγράφονται.
Αξιώματα 1–5, Κοινές έννοιες 1–5	Τα αξιώματα και οι κοινές έννοιες είναι τα αξιώματα της επιπεδομετρίας.
Προτάσεις 1–26	Α: Θεμελίωση της επιπεδομετρίας χωρίς την χρήση των παραλλήλων.
Προτάσεις 27–32	Β: Η θεωρία των παραλλήλων ευθειών. Γωνίες τριγώνου.
Προτάσεις 33–45	Γ: Η θεωρία των παραλληλογράμων και των εμβαδών τους.
Προτάσεις 46–48	Δ: Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

3.2 Ορισμοί και αξιώματα

Ο Ευκλείδης δημιούργησε το μοντέλο ενός μαθηματικού κειμένου: Ξεκινά με επακριβώς τυποποιημένους ορισμούς και αξιώματα, κατόπιν συνεχίζει με θεωρήματα και αποδείξεις. Από την αρχή καθιστά καθαρό το περί τίνος μιλά, ή δίδει κάποιου είδους περιγραφή των αντικειμένων της γεωμετρίας. Το κάνει αυτό με την πρώτη ομάδα ορισμών 1–9.

Ορισμοί

1. *Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος.* [1]
2. *Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος.* [2]
3. *Τα άκρα γραμμής είναι σημεία.*

...

8. *Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο τεμνόμενων γραμμών του επιπέδου που δεν κείνται επί της ίδιας ευθείας.* [3]

9. *Όταν οι περιέχουσες τη γωνία γραμμές είναι ευθείες, η γωνία καλείται ευθύγραμμη.*

Έχει συχνά παρατηρηθεί ότι ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί τους παραπάνω ορισμούς στις αποδείξεις των προτάσεων που ακολουθούν. Οι ορισμοί αυτοί είναι εξηγήσεις που πρέπει να ξεκαθαρίζουν στον αναγνώστη την σημασία κάθε όρου, αλλά δεν παίζουν κάποιο ρόλο στα επαγόμενα συμπεράσματα. Στον Ορισμό 8, οι γραμμές μπορεί να είναι καμπυλόγραμμες. Στο Βιβλίο γ′ ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί γωνίες μεταξύ κύκλων και ευθειών, αλλά, ενδείξεις για μεγαλύτερη δημοφιλία γωνιών καμπύλων γραμμών υπάρχουν περισσότερο στους προ–Ευκλείδειους χρόνους.

Οι περισσότεροι από τους ακόλουθους ορισμούς είναι συντομεύσεις κατά τον σύγχρονο τρόπο, φερ′ ειπείν:

Ορισμοί

[1] Κατά τον Αριστοτέλη *μέρος μεν ουν εστίν και του είδους* δηλαδή, υπάρχει μέρος ακόμα και στη μορφή. (Μετά τα Φυσικά, 1035 b 32). Κατά τον Πρόκλο, ο πρώτος ορισμός του σημείου δόθηκε από τους Πυθαγορείους ως *μονάς προσλαβούσα θέσιν.* Κατά τον Πλάτωνα σημείο είναι *αρχή γραμμής.*

[2] Κατά τον Πρόκλο, γραμμή είναι *μέγεθος εφ′ εν διαστατόν*, δηλαδή μονοδιάστατο μέγεθος.

[3] Ένας αρχαιότερος ορισμός της γωνίας οφείλεται στον Απολλώνιο τον Περγαίο, σύμφωνα με τον οποίο, γωνία είναι *συναγωγή επιφανείας η στερεού προς ενί σημείω υπό κεκλασμένη γραμμή ή επιφανεία.*

19. ... *τρίπλευρα σχήματα είναι αυτά που περιέχονται σε τρεις ευθείες* ...[4]

20. *Από τα τρίπλευρα σχήματα, ισόπλευρο τρίγωνο είναι αυτό που έχει τις τρεις πλευρές του ίσες, ισοσκελές τρίγωνο είναι αυτό που έχει μόνο τις δύο πλευρές του ίσες, και σκαληνό* [5] *τρίγωνο είναι αυτό που έχει τις πλευρές του άνισες.*

Κατά τον σύγχρονο φορμαλισμό, ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές, αλλά όχι για τον Ευκλείδη. Παρόμοια, στον Ορισμό 22, ένα ορθογώνιο (που καλείται εκεί *ετερόμηκες*) δεν είναι τετράγωνο. Προφανώς από μία λογική άποψη, είναι προτιμότερο να συμπεριλάβουμε τα τετράγωνα στα ορθογώνια.

Μετά τους ορισμούς, ο Ευκλείδης προχωρά στα περίφημα αιτήματά του (αξιώματα). Τα σύγχρονα αξιώματα της γεωμετρίας ομοιάζουν αρκετά με τα αιτήματα αυτά.

Αξιώματα

1. *Ας έχει αξιωθεί ότι μπορεί να αχθεί ευθεία γραμμή από κάθε σημείο προς κάθε σημείο.*

2. *Και από πεπερασμένη ευθεία μπορεί να παραχθεί άπειρη ευθεία κατά συνεχή τρόπο.*

3. *Και μπορεί να γραφεί κύκλος παντός κέντρου και κάθε διαστήματος.* [6]

4. *Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*[7]

5. *[Το πέμπτο αίτημα θα συζητηθεί χωριστά παρακάτω.]*

Τα αιτήματα 1 και 2 θα μπορούσαν να διατυπωθούν κατά τον σύγχρονο τρόπο ως εξής: Δεδομένων δύο διαφορετικών σημείων, υπάρχει μοναδική ευθεία που περνά από αυτά. Η έμφαση του Ευκλείδη είναι περισσότερο στην κατασκευή και όχι στην ύπαρξη, η διαφορά δηλαδή είναι στον τρόπο και όχι στην ουσία.

Ακολουθούν οι κατά τον Ευκλείδη *Κοινές Έννοιες*. Αυτές είναι αξιώματα περί της συμπεριφοράς γενικότερων μεγεθών, και όχι μόνο γεωμετρικών αντικειμένων.

---

[4] Ο διαχωρισμός των σχημάτων σε τρίπλευρα, τετράπλευρα κλπ. οφείλεται στον ίδιο τον Ευκλείδη, αφού δεν απαντάται ούτε στον Πλάτωνα ούτε στον Αριστοτέλη.

[5] Η λέξη *σκαληνό* προέρχεται είτε από το *σκάζω* (= κουτσαίνω) είτε από το *σκολιός* (= επικλινής, λοξός).

[6] Εδώ *διάστημα* = ακτίνα, αν και ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον όρο διάστημα και για τη διάσταση.

[7] Το αίτημα αυτό είναι ισοδύναμο με την ισχύ της ισοδυναμίας των σχημάτων, ή με άλλα λόγια, της *ομογένειας* του χώρου.

Κοινές έννοιες

1. *Τα προς το ίδιο πράγμα ίσα πράγματα, είναι και ίσα μεταξύ τους.*[8]
2. *Και εάν ίσα πράγματα προστεθούν σε ίσα πράγματα, τα συνολικά πράγματα είναι ίσα.*
3. *Και εάν από ίσα πράγματα αφαιρεθούν ίσα πράγματα, τα υπολειπόμενα πράγματα είναι ίσα.*
4. *Και τα εφαρμόζοντα μεταξύ τους πράγματα είναι ίσα μεταξύ τους.*[9]
5. *Και το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.*

Πολλοί συγγραφείς παρατήρησαν την ανεπάρκεια των αξιωμάτων του Ευκλείδη σε σύγκριση με τα σύγχρονα θεμέλια της γεωμετρίας. Το πλέον προφανές σημείο είναι η απουσία οποιασδήποτε σκέψης για την διάταξη των σημείων πάνω σε μία γραμμή, ή της έννοιας του 'μεταξύ'. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί όλες τις υποθέσεις περί την διάταξη των σημείων επάνω σε μία διαισθητική βάση. Παρ' όλα αυτά, κατά κανένα τρόπο δεν μειώνεται το έργο του Ευκλείδη και το βασικό του κατόρθωμα: Στα μαθηματικά, κάποιος πρέπει να ξεκινήσει από αναλυτικά τιθέμενες αρχές και να παράγει όλα τα επόμενα συμπεράσματα από τις αρχές αυτές.

3.3 Βιβλίο α', Μέρος Α: Θεμέλια

Τα ουσιαστικά περιεχόμενα του Μέρους Α του Βιβλίου α' είναι πρώτα τα βασικά θεωρήματα ισότητας τριγώνων και στοιχειώδεις κατασκευές, όπως η διχοτόμηση γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων, και δευτερευόντως κάποιες προτάσεις περί 'μεγαλύτερων' σχέσεων των γωνιών και των πλευρών ενός τριγώνου, που βασίσονται στην α' 16 και κορυφώνονται με την τριγωνική ανισότητα α' 20.

[8]Κατά τον Αριστοτέλη, κανείς προσπαθεί να αποδείξει αξιώματα μόνον από αδημοσύνη. Σαν παράδειγμα, ο Πρόκλος παραθέτει την ακόλουθη 'απόδειξη' του Απολλωνίου, της κοινής έννοιας 1: Ας είναι $A = B$ και $B = C$. Λέγω ότι $A = C$. Διότι, εφ' όσον $A = B$, τα A, B καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο, και εφ' όσον $B = C$ τα B, C καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο. Άρα $A = C$.

Η απόδειξη αυτή εμπεριέχει τις επιπλέον υπόθεσεις ότι α) $A = B$ αν και μόνο εάν τα A, B καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο και β) πράγματα που καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο με κάποιο άλλο πράγμα καταλαμβάνουν και τον ίδιο χώρο μεταξύ τους. Με άλλα λόγια προσπαθείται να εξηγηθεί το προφανές με κάτι περισσότερο ομιχλώδες, αφού ο χώρος είναι μία ποσότητα πιο 'δύσκολη' από τα καθεαυτά πράγματα του ίδιου του χώρου.

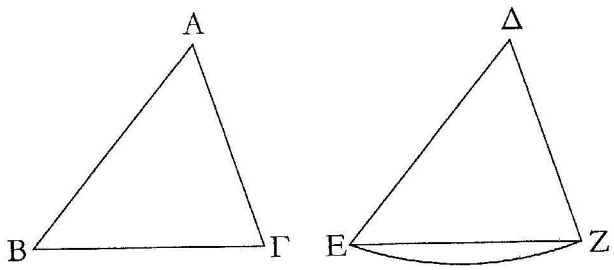
[9]Τούτη η κοινή έννοια νομιμοποιεί την χρησιμοποίηση της *εναπόθεσης* για την απόδειξη της ισότητας δύο σχημάτων που έχουν τα αναγκαία μέρη αντίστοιχα ίσα.

Οι αρχικές προτάσεις δείχνουν πως κατασκευάζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο και πως αντιγράφουμε τμήματα χωρίς να τα μετακινούμε. Οι λεπτές κατασκευές στις α΄ 2,3 βασίζονται ευθέως στα Αξιώματα 1,2 και 3. Η Πρόταση α΄ 4 είναι το πρώτο σημαντικό θεώρημα, το κριτήριο ισότητας της περιεχόμενης γωνίας.

Πρόταση α΄ 4

Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές και τις περιεχόμενες υπό των ίσων πλευρών γωνίες αντίστοιχα[10] *ίσες, τότε έχουν και τις βάσεις ίσες και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες .*

Έστω δύο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ που έχουν τις δύο πλευρές ΑΒ, ΑΓ ίσες αντίστοιχα με τις ΔΕ, ΔΖ, δηλαδή, την ΑΒ με την ΔΕ και την ΑΓ με την ΔΖ. Και έστω ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ. Λέγω ότι και η βάση ΒΓ είναι ίση με την βάση ΕΖ, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ, και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες υποτείνονται οι ίσες πλευρές είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες, δηλαδή η ΑΒΓ είναι ίση με την ΔΕΖ και η ΑΓΒ είναι ίση με την ΔΖΕ.



Σχήμα 3.1: Πρόταση α΄ 4.

Πριν πάμε στην απόδειξη ας εξετάσουμε ορισμένες ιδιαιτερότητες του τρόπου γραφής του Ευκλείδη. Πάντα εκθέτει τα θεωρήματά του με δύο τρόπους: αρχικά με γενικά λόγια, και με μία δεύτερη φορά ειδικεύει καταδεικνύοντας σημεία, γραμμές, γωνίες, κ.ο.κ. με διάφορα γράμματα.[11] Πολύ συχνά το θεώρημα

[10] Αντί του 'μία προς μία' που αντιστοιχεί στο Ευκλείδειο ' εκατέρα εκατέρα' προτιμούμε στο εξής το *αντίστοιχα*.

[11] Αυτό γίνεται και στις μέρες μας: Θεώρημα: Μία συνεχής πραγματική συνάρτηση απεικονίζει κλειστά διαστήματα σε κλειστά διαστήματα. Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής...

συνοδεύεται από κατάλληλο σχήμα. Μία συγκεκριμένη φράση χρήζει περαιτέρω επεξήγησης: *το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΕΖ*. Απλώς σημαίνει ότι *τα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν*. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την λέξη ' εμβαδόν' μόνο περιστασιακά.[12]

Απόδειξη της Πρότασης α' 4.

Διότι εάν το τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμοστεί[13] επί του τριγώνου ΔΕΖ και το σημείο Α τεθεί στο σημείο Δ, και η ευθεία ΑΒ επί την ΔΕ, τότε το σημείο Β εφαρμόζει επί το σημείο Ε αφού η ΑΒ είναι ίση με την ΔΕ.

Έτσι, επειδή η ΑΒ εφαρμόζει επί την ΔΕ, η ευθεία ΑΓ εφαρμόζει επίσης επί την ΔΖ λόγω του ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ΕΔΖ.

Ώστε και το σημείο Γ εφαρμόζει επί το Ζ επίσης διότι η ΑΓ είναι ίση με την ΔΖ.

Αλλά και το σημείο Β εφαρμόζει επί το Ε, ώστε η βάση ΒΓ εφαρμόζει επί τη βάση ΕΖ. Διότι εάν το Β εφαρμόσει επί το Ε και το Γ επί το Ζ, και η βάση ΒΓ δεν εφαρμόσει επί την ΕΖ, τότε δύο ευθείες γραμμές θα περιέχουν εμβαδόν, το οποίο είναι αδύνατο.[14]

Άρα, η βάση ΒΓ θα εφαρμόσει επί την ΕΖ, και θα είναι ίση με αυτήν. Ώστε και όλο το ΑΒΓ τρίγωνο θα εφαρμόσει επί όλο το ΔΕΖ τρίγωνο και θα είναι ίσο με αυτό, και οι λοιπές γωνίες θα εφαρμόσουν επί τις λοιπές γωνίες και θα είναι ίσες με αυτές, δηλαδή η ΑΒΓ θα είναι ίση με την με την ΔΕΖ και η ΑΓΒ με την ΔΖΕ.

Εάν άρα δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές και τις περιεχόμενες υπό των ίσων πλευρών γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις βάσεις ίσες και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες οι ίσες πλευρές υποτείνονται είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες· όπερ έδει δείξαι.[15] □

[12]Οι Έλληνες ήξεραν πολύ καλά να μετρούν τις γαίες τους, και ήξεραν επίσης ότι οι φοροεισπράκτορες του Φαραώ μετρούσαν τα χωράφια των Αιγυπτίων αγροτών με τρόπο που δεν ήταν καθόλου προς όφελος των τελευταίων. Στα μαθηματικά, αποφεύγουν την έννοια του ' εμβαδού' προτιμώντας φράσεις όπως την παραπάνω, δηλαδή, 'το ορθογώνιο είναι ίσο με το ορθογώνιο' κ.ο.κ.

[13]εναποτεθεί.

[14]Λόγω του Αξιώματος 1.

[15]= το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την φράση αυτή στο τέλος όλων των αποδείξεων. Ο όρος χρησιμοποιείται αυτούσιος ως τις μέρες μας και στο εξής θα γράφουμε απλώς Ο.Ε.Δ.

Σχόλια πάνω στην απόδειξη της Πρότασης α′ 4

Η μέθοδος απόδειξης της Πρότασης α′ 4 είναι σε πλήρη αντιδιαστολή με τις λεπτομερείς αποδείξεις των προτάσεων α′ 1–3. Απ′ ότι βλέπουμε ο Ευκλείδης απλώς εναποθέτει το τρίγωνο ΑΒΓ επί του τριγώνου ΔΕΖ με τρόπο ώστε το Α να τεθεί επί του Δ, το Β επί του Ε και το Γ επί του Ζ και από κεί προκύπτει το συμπέρασμα.

Από τη μία πλευρά, η μέθοδος της εναπόθεσης δεν έχει καμμία βάση στα Ευκλείδεια αξιώματα, αλλά από την άλλη, πρακτικά τίποτε δεν γίνεται χωρίς τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. (Στην Πρόταση α′ 8 ακολουθείται η ίδια μέθοδος). Ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε εδώ είναι άλλο ένα αξίωμα. Σύγχρονες αξιωματικές μελέτες από τον Χίλμπερτ και άλλους, κατέδειξαν ότι δεν υπάρχει τρόπος να ξεπεραστεί αυτό το δίλλημα: Είτε η Προταση α′ 4 θα πρέπει να γίνει αξίωμα[16] ή θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την εναπόθεση σε κάποια εκδοχή που θα βασίζεται σε ένα αίτημα ύπαρξης κάποιων στερεών κινήσεων του επιπέδου.

Στο επόμενο ζεύγος προτάσεων α′ 5–6 ο Ευκλείδης αποδεικνύει ένα θεμελιώδες λήμμα περί ισοσκελών τριγώνων που χρησιμοποείται συχνά στα Βιβλία α′–στ′.

Πρόταση α′ 5[17]

Οι πρός την βάση γωνίες των ισοσκελών τριγώνων είναι ίσες...[18]

Έστω ισοσκελές τρίγωνο το ΑΒΓ που έχει ίση την πλευρά ΑΒ με την πλευρά ΑΓ... λέγω, ότι η ΑΒΓ γωνία είναι ίση με την ΑΓΒ...

Πρόταση α′ 6[19]

Εάν δύο γωνίες τριγώνου είναι ίσες, τότε και οι πλευρές που υποτείνονται από τις ίσες γωνίες είναι ίσες.

Για την απόδειξη, ο Ευκλείδης κατασκευάζει δύο τρίγωνα ΒΓΖ και ΓΗΒ:

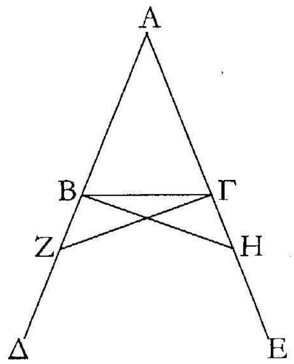
Έστω τυχαίο σημείο Ζ επάνω στην ΒΔ· και έστω ΑΗ να έχει αφαιρεθεί από την ΑΕ και να είναι ίση με την ΑΖ. Ενώνουμε τις ευθείες ΖΓ, ΗΒ.

[16] Όπως προτείνει ο Ράσσελ στα Principia Mathematica.

[17] Σύμφωνα με τον Πρόκλο, η απόδειξη αυτής της πρότασης οφείλεται στον Θαλή. Μία προ–Ευκλείδεια απόδειξη που χρησιμοποιεί ‘μεικτέσ’ γωνίες και οφείλεται στον Αριστοτέλη παρατίθεται στον Heath, vol. I–II, p.252.

[18] Παραλείπουμε το επόμενο συμπέρασμα που λέει ότι και οι εξωτερικές γωνίες είναι ίσες.

[19] Είναι η αντίστροφη της α′ 5.



Σχήμα 3.2: Πρόταση α΄ 5.

Στα επόμενα δύο βήματα δείχνεται πρώτα η ισότητα των τριγώνων △ΑΖΓ και △ΑΗΒ διά του κριτηρίου της περιεχόμενης γωνίας, και μετά, πάλι από το ίδιο κριτήριο η ισότητα △ΒΖΓ=△ΓΗΒ:

1. Έχουμε ∠ΖΑΓ=∠ΗΑΒ και ΑΖ=ΑΗ από κατασκευή, και ΑΓ=ΑΒ, άρα △ΑΖΓ=△ΑΗΒ και ειδικότερα ΒΗ=ΓΖ και ∠ΒΖΓ=∠ΓΗΒ.

2. Από κατασκευή έχουμε ότι ΒΖ=ΓΗ· επιπλέον, η ΒΓ είναι κοινή πλευρά και από το (1) έχουμε ∠ΖΒΓ=∠ΓΗΒ· άρα από το κριτήριο της περιεχομένης γωνίας προκύπτει △ΓΗΒ=△ΒΖΓ.

Και καταλήγει ο Ευκλείδης:

Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες από τις ίσες ευθείες γωνίες αντίστοιχα ίσες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες βάσεις ίσες, και τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, και οι λοιπές γωνίες οι οποιές υποτείνονται από τις ίσες πλευρές είναι ίσες με τις αντίστοιχες λοιπές γωνίες, Ο.Ε.Δ. □.

Αξίζουν να σχολιασθούν οι δύο παρακάτω τρόποι απόδειξης της Πρότασης α΄ 5. Η πρώτη οφείλεται στον Πρόκλο που θεωρεί σημεία Δ και Ε *επάνω* στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, αντί να προεκτείνει τις ΑΒ, ΑΓ. Κατά τα άλλα ακολουθεί την απόδειξη του Ευκλείδη.

Ο Πάππος δίδει την παρακάτω ενδιαφέρουσα απόδειξη:

Απόδειξη της Πρότασης α΄ 5.

Έστω ΑΒΓ ένα ισοσκελές τρίγωνο, όπου ΑΒ είναι ίση με την ΑΓ. Ας θεωρήσουμε αυτό το τρίγωνο ως δύο τρίγωνα και επιχειρηματολογούμε ως εξής:

Αφού ΑΒ=ΑΓ, και ΑΓ=ΑΒ οι δύο πλευρές ΑΒ, ΑΓ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΑΓ, ΑΒ. Επίσης ∠ΒΑΓ=∠ΓΑΒ, διότι είναι η ίδια.

Άρα όλα τα αντίστοιχα μέρη του τριγώνου είναι ίσα, επακριβώς ΒΓ=ΓΒ, △ΑΒΓ=△ΑΓΒ, ∠ΑΒΓ=∠ΑΓΒ, ∠ΑΓΒ=∠ΑΒΓ, διότι οι ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ υποτείνονται από τις αυτές τις γωνίες. Άρα οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, Ο.Ε.Δ. □

3.3.1 Προτάσεις α′ 7–15

Στις Προτάσεις 7 και 8 ο Ευκλείδης αποδεικνύει το κριτήριο ισότητας των τριών πλευρών, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εναπόθεσης για δεύτερη φορά. Οι Προτάσεις 9–15 είναι αφιερωμένες στις κοινές κατασκευές και πρωταρχικές προτάσεις της επιπεδομετρίας: διχοτόμηση γωνιών και ευθύγραμμων τμημάτων, κατασκευή μεσοκαθέτων, παραπληρωματικών και ορθών γωνιών.

Πρόταση α′ 16.

Εάν κάποια από τις πλευρές κάθε τριγώνου προεκταθεί, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε μία των εσωτερικών και απέναντι γωνιών.

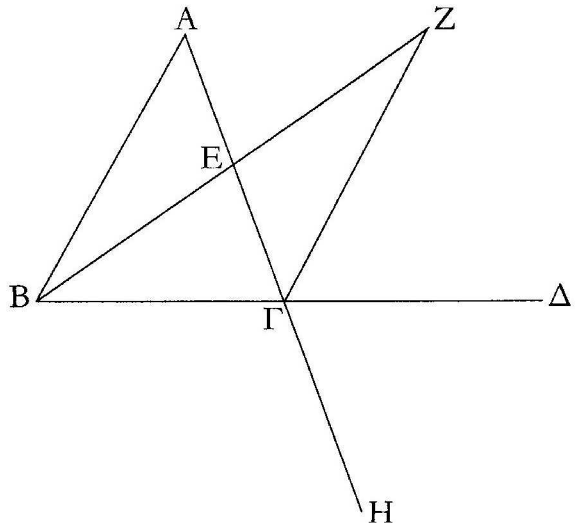
Ισχυρισμός. $\alpha = \angle\mathrm{BA\Gamma} < \delta = \angle\Delta\Gamma\mathrm{A}$.

Κατασκευή. Διχοτομούμε την ΑΓ στο Ε, φέρνουμε την ΒΕ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε ΒΕ=ΕΖ, ενώνουμε το Γ με το Ζ, και έστω $\alpha' = \angle\mathrm{Z\Gamma E}$.

Απόδειξη

1. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ίσο με το ΓΖΕ από το κριτήριο της περιεχόμενης γωνίας. Άρα $\alpha = \alpha'$
2. Αλλά η α' είναι μέρος της δ. Άρα $\alpha = \alpha' < \delta$ από την κοινή έννοια 5, Ο.Ε.Δ. □

Εάν ο Ευκλείδης είχε στη διάθεσή του τη θεωρία των παραλλήλων σε αυτό το σημείο, η Πρόταση α′ 16 θα προέκυπτε ως τετριμμένο πόρισμα της Πρότασης α′ 32 περί του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου! Βλέπουμε όμως πόσο προσεκτικά προχωρά. Ας συζητήσουμε σε αυτό το σημείο τη γέννεση της απόδειξης της Πρότασης α′ 16 με την βοήθεια των παραλλήλων.



Σχήμα 3.3: Πρόταση α′ 16.

Η απόδειξη είναι πράγματι ευφυής. Κάποιος μπορεί να δεί πως ο συγγραφέας είχε την ιδέα: Απλά προσθέστε την ΑΖ στο σχήμα. Αίφνης, βλέπουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΖ πίσω από την απόδειξη της Πρότασης α′ 16. Σε αυτό το στάδιο θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε παράλληλες και να έχουμε $\alpha = \alpha'$· η ΑΓ τέμνει τις δύο παράλληλες ΑΖ και ΒΓ. Επιπλέον το Ε θα είναι το σημείο τομής των διαγωνίων. Παρ′ όλα αυτά, και αυτή είναι η ουσιαστική ιδέα, για να αποδείξουμε την Πρόταση α′ 16 είναι δυνατό να αποφύγουμε τις παράλληλες και να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ισότητας α′ 4. [20]

Από την άλλη, υπάρχει ένα χάσμα στην απόδειξη. Ο ισχυρισμός ότι η α' είναι μέρος της δ δεν δικαιολογείται από τα αξιώματα. Επιπλέον η πρόταση δεν ισχύει σε άλλες γεωμετρίες, όπως λ.χ. η σφαιρική.[21]

---

[20] Η επιδεξιότητα του Ευκλείδη φαίνεται από την ικανότητά του να συνδέσει την α′ 16 με το σημαντικό θεώρημα α′ 20, την τριγωνική ανισότητα και την α′ 27, την ύπαρξη των παραλλήλων

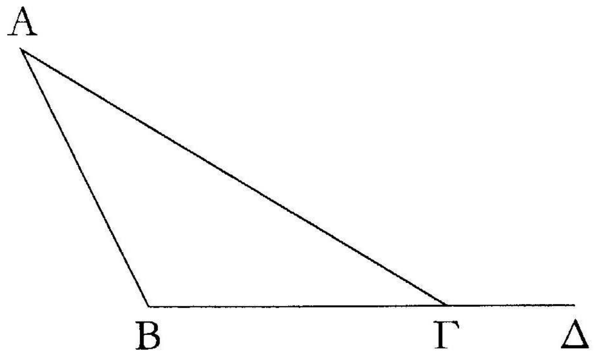
[21] Ο Μενέλαος, που έγραψε περί σφαιρικής γεωμετρίας το 100 μ.Χ. σίγουρα ήξερε το φαινόμενο.

3.3.2 Προτάσεις α′ 17–20

Η Πρόταση α′ 17 είναι πόρισμα της α′ 16. Πάλι, είναι μία ασθενής εκδοχή της α′ 32 περί του αθροίσματος γωνιών τριγώνου:

Πρόταση α′ 17.

Το άθροισμα των δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές, με όποιο τρόπο και αν αυτές ληφθούν.



Σχήμα 3.4: Πρόταση α′ 17.

Η Πρόταση α′ 18 μας λέει ότι σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά υποτείνει τη μεγαλύτερη γωνία, και η α′ 19 είναι η αντίστροφή της. Αυτές οι προτάσεις οδηγούν στην περίφημη τριγωνική ανισότητα:

Πρόταση α′ 20.

Το άθροισμα των δύο πλευρών κάθε τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο από την άλλη πλευρά, με όποιο τρόπο και αν αυτές ληφθούν.

Σχολιάζει ο Πρόκλος:

Οι Επικούρειοι που θέλουν να γελοιοποιήσουν αυτό το θεώρημα, λένε ότι είναι προφανές ακόμα και σε ένα γάϊδαρο και δεν χρειάζεται απόδειξη... και το συμπεραίνουν αυτό από την παρατήρηση ότι, εάν το σταχυ τοποθετηθεί στο ένα άκρο μιας πλευράς, ένας πεινασμένος γάϊδαρος που βρίσκεται στο άλλο άκρο της πλευράς θα περπατήσει πάνω στην πλευρά που βρίσκεται και δεν θα πάει στο στάχυ μέσω των δύο άλλων! [22]

[22] Οι σημερινοί Επικούρειοι θα μπορούσαν ίσως να προσθέσουν κάτι για αυτούς που διασχίζουν το γρασσίδι για συντομία, κατά τον τρόπο του γαϊδάρου...

Ο Πρόκλος απαντά σωστά ότι μία απλή αντίληψη της αλήθειας δεν αποτελεί επιστημονική απόδειξη. Στην περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η τριγωνική ανισότητα μπορεί πράγματι να παραχθεί από τα άλλα εξίσου εύλογα αξιώματα. Από την άλλη, οι Επικούρειοι κερδίζουν στην σύγχρονη θεωρία των μετρικών χώρων όπου η τριγωνική ανισότητα είναι το θεμελιώδες αξίωμα του όλου οικοδομήματος.

3.3.3 Προτάσεις α′ 21–26.

Τρεις από τις εναπομείνασες προτάσεις του Μέρους Α αφορούν στις καθολικές σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου (21, 24, 25. Η Πρόταση α′ 22 δίδει την κατασκευή ενός τριγώνου από τις πλευρές του, υπό την συνθήκη ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Ο Ευκλείδης το χρησιμοποιεί αυτό στην Πρόταση α′ 23 για να δείξει πως αντιγράφουμε μία γωνία. Τα υπόλοιπα κριτήρια ισότητας τριγώνων προσκολλώνται στην α′ 26 ως ένα είδος χαλαρού άκρου.

3.4 Βιβλίο α′, Μέρος Β: Θεωρία των παραλλήλων

Λέγει ο Ορισμός α′ 23 του Ευκλείδη για τις παράλληλες ευθείες:[23]

Παράλληλες είναι οι ευθείες, οι οποίες είναι στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες απείρως[24] *και από τα δύο μέρη* [25] *δεν συμπίπτουν μεταξύ τους σε κανένα από αυτά (τα μέρη).*

Σχετικό με τις παράλληλες ευθείες είναι το περίφημο 5ο Αίτημα:[26]

Αξίωμα 5. *Και εάν μία ευθεία εμπίπτει*[27] *σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε το άθροισμα των*[28] *εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών*[29] *να είναι μικρότερο των*

[23]Κατά τον Αριστοτέλη, παράλληλες ευθείες είναι αυτές που δεν τέμνονται. Για διάφορους άλλους ορισμούς, αρχαίους και σύγχρονους, παραπέμπουμε στον Heath, Vol I, σελ. 190.

[24]Ο Ευκλείδης λέγει *εκβαλλόμεναι εις άπειρον*. Δεν μεταφράζουμε όμως *προεκτεινόμενες στο άπειρο* διότι τότε θα πρέπει να ορίσουμε το ‘άπειρο’. Η μετάφρασή μας απλώς σημαίνει ‘απεριόριστα’.

[25]Δηλαδή από κάθε μία κατεύθυνση.

[26]Το Κεφάλαιο 4 που ακολουθεί είναι αφιερωμένο στην ιστορία του 5ου Αιτήματος.

[27]=διασχίζει, τέμνει. Στα επόμενα διατηρούμε το Ευκλείδειο ‘εμπίπτει’ αντί του ‘τέμνει’.

[28]Ο Ευκλείδης δεν γράφει την λέξη ‘άθροισμα’ αλλα την εννοεί σαφώς.

[29]Αφήνουμε αμετάφραστο τπ ‘εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών’ αντί του ‘εσωτερικών

δύο ορθών, τότε στην άπειρη προέκτασή τους οι δύο ευθείες τέμνονται από το μέρος που το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

Μία ισοδύναμη εκδοχή του 5ου Αιτήματος που χρησιμοποιείται στην σύγχρονη γεωμετρία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έστω ευθεία ε και σημείο Σ εκτός αυτής. Υπάρχει **μοναδική** *ευθεία ε′ που διέρχεται από το Σ και είναι παράλληλη με την ε.*

Η ανάγκη του Ευκλείδη να εισάγει το 5ο Αίτημα, ήταν για να αποδείξει την Πρόταση α′ 29. Πριν από αυτήν αποδεικνύει την

Πρόταση α′ 27.[30]

Εάν μία ευθεία εμπίπτει σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εναλλάξ[31] γωνίες[32] είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους. [33]

Διότι εάν ΑΒ και ΓΔ είναι οι ευθείες και ΕΖ είναι η εμπίπτουσα, τότε οι εναλλάξ γωνίες ΑΕΖ, ΕΖΔ είναι ίσες μεταξύ τους. Λέγω ότι η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ.

Απόδειξη

Διότι αν δεν ήταν, προεκτεινόμενες οι ΑΒ και ΓΔ θα συμπέσουν είτε από το μέρος των Β και Δ, ή από των Β και Γ.[34]

Ας προεκταθούν και συμπέσουν στο Η από το μέρος των Β και Δ.

και από το ίδιο μέρος γωνιών'.

[30] Η Πρόταση αυτή όπως και η ακόλουθη α′ 28 ήταν γνωστές στον Αριστοτέλη.

[31] Προφανώς εννοεί τις *εντός* εναλλάξ

[32] Από την δεύτερη εκφώνηση που ακολουθεί, φαίνεται ότι εννοεί τις *εντός* εναλλάξ γωνίες.

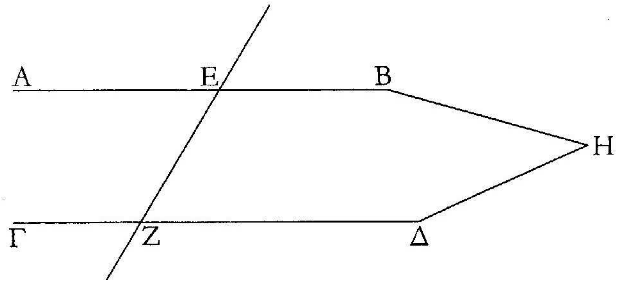
[33] Ο Ντε Μόργκαν παρατήρησε ότι η Πρόταση α′ 27 είναι λογικά ισοδύναμη της Πρότασης α′ 16: Έστω Α η πρόταση *ευθείες σχηματίζουν τρίγωνο με μία εμπίπτουσα* και Β η πρόταση *ευθείες σχηματίζουν γωνίες με μία εμπίπτουσα στο ίδιο μέρος που το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές*, έχουμε

$$A \implies B$$

του οποίου το λογικό ισοδύναμο είναι

$$\text{όχι } B \implies \text{όχι } A.$$

[34] Λόγω του Ορισμού 23.



Σχήμα 3.5: Πρόταση α′ 27.

Τότε στο τρίγωνο ΗΕΖ η εξωτερική γωνία ΑΕΖ πρέπει να είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι γωνία ΕΖΗ· πράγμα αδύνατο.[35]

Άρα προεκτεινόμενες οι ΑΒ και ΓΔ δεν συμπίπτουν από το μέρος των Β και Δ. Όμοια μπορεί να δειχθεί ότι δεν συμπίπτουν και από το μέρος των Α και Γ.

Αλλά ευθείες που δεν συμπίπτουν από κανένα μέρος είναι παράλληλες· άρα η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ.

Άρα εάν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους, Ο.Ε.Δ. □

Η Πρόταση α′ 28 είναι μία χρήσιμη παραλλαγή της 27:

Πρόταση α′ 28.

Εάν μία ευθεία εμπίπτει σε δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, ή το άθροισμα των εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες θα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

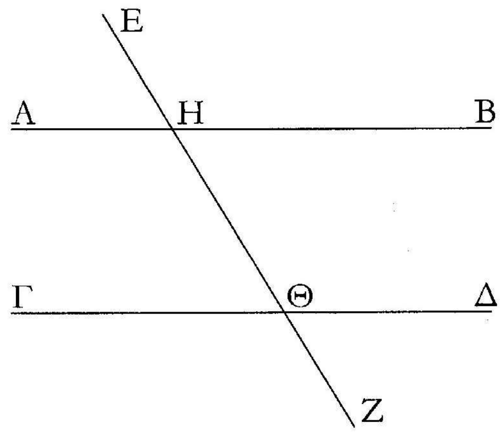
Το 5ο Αξίωμα χρησιμοποιείται τώρα για την απόδειξη της Πρότασης α′ 29.

Πρόταση α′ 29.

Η ευθεία που εμπίπτει σε δύο παράλληλες ευθείες κάνει τις εναλλάξ γωνίες ίσες και την εκτός με την εντός και απέναντι ίσες και τό άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές.

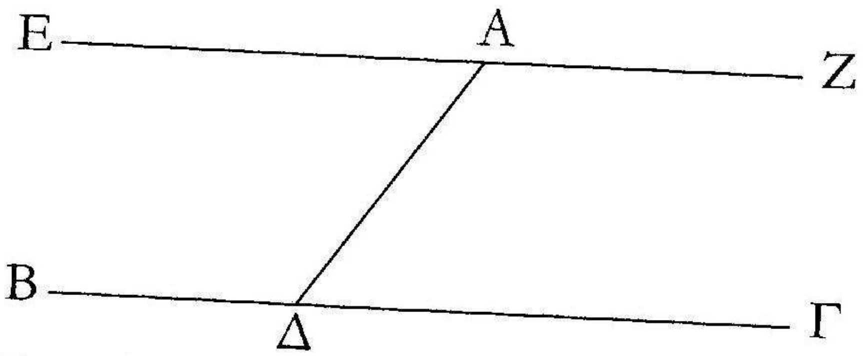
Διότι έστω ότι η ευθεία ΕΖ εμπίπτει στις παράλληλες ευθείες ΑΒ, ΓΔ· λέγω ότι κάνει τις εναλλάξ γωνίες ΑΗΘ, ΗΘΔ ίσες και την εκτός γωνία ΕΗΒ ίση

[35]Από την Πρόταση α′ 16.



Σχήμα 3.6: Πρόταση α′ 28.

με την εντός και απέναντι γωνία ΗΘΔ και τό άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ΒΗΘ, ΗΘΔ ίσο με δύο ορθές.



Σχήμα 3.7: Πρόταση α′ 29.

Απόδειξη.

Διότι έστω οτι οι γωνίες ΑΗΘ, ΗΘΔ είναι άνισες. Τότε μία από αυτές θα είναι μεγαλύτερη.

Έστω ότι η μεγαλύτερη είναι η ΑΗΘ. Έστω ότι η ΒΗΘ προστίθεται και στις δύο· άρα το άθροισμα των ΑΗΘ, ΒΗΘ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των ΒΗΘ, ΗΘΔ.

Αλλά το άθροισμα των ΑΗΘ, ΒΗΘ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα το άθροισμα των ΒΗΘ, ΗΘΔ είναι μικρότερο από δύο ορθές.

Οι ευθείες που προεκτείνονται απείρως από εσωτερικές γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι μικρότερο των δύο ορθών συμπίπτουν.[36] Άρα οι άπειρες προεκτάσεις των ΑΒ, ΓΔ θα συμπέσουν· αλλά δεν συμπίπτουν, διότι υποτέθηκε ότι αυτές είναι παράλληλες.

Άρα δεν είναι άνισες οι ΑΗΘ, ΗΘΔ, άρα είναι ίσες. Αλλά η ΑΗΘ είναι ίση με την ΕΗΒ· και η ΕΗΒ είναι ίση με την ΗΘΔ. Προστίθεται και στις δύο η ΒΗΘ· άρα (το άθροισμα των ΕΗΒ, ΒΗΘ) ισούται με το άθροισμα των ΒΗΘ, ΘΗΔ. Αλλά το άθροισμα των ΕΗΒ, ΒΗΘ ισούται με δύο ορθές, άρα και το άθροισμα των ΒΗΘ, ΗΘΔ ισούται με δύο ορθές.

Άρα, η ευθεία που εμπίπτει σε δύο παράλληλες ευθείες κάνει τις εναλλάξ γωνίες ίσες και την εκτός με την εντός και απέναντι ίσες και τό άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές· Ο.Ε.Δ. □

Η Πρόταση α′ 30 δείχνει την μεταβατικότητα της παραλληλίας και η Πρόταση α′ 31 εξερευνά την κατασκευή παραλλήλων από εναλλάξ γωνίες.

Πρόταση α′ 32.

Σε κάθε τρίγωνο, εάν μία πλευρά του προεκταθεί, τότε η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Έστω τρίγωνο το ΑΒΓ, και έστω ότι η μία πλευρά του ΒΓ προεκτείνεται επί το Δ· λέγω ότι η εξωτερική γωνία ΑΓΔ είναι ίση με το άθροισμα των δύο εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΓΑΒ και ΑΒΓ, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, ΒΓΑ και ΓΑΒ είναι ίσο με δύο ορθές.

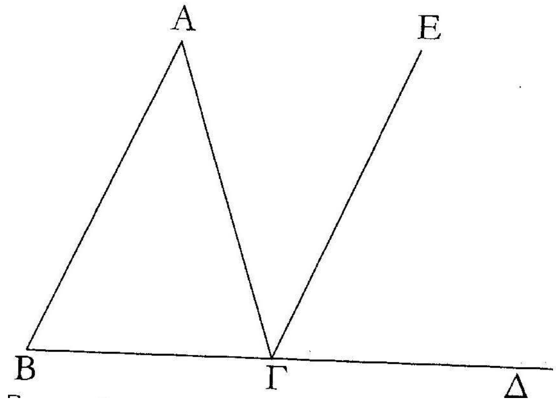
Απόδειξη.

Ας αχθεί από το σημείο Γ ευθεία ΓΕ παράλληλη στην ΑΒ.[37]

Και επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΓΕ, και εμπίπτει σε αυτές η ΑΓ, οι εναλλάξ γωνίες ΒΑΓ, ΑΓΕ είναι ίσες μεταξύ τους.[38]

Πάλι, επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΓΕ, και εμπίπτει σε αυτές η ΒΔ, η εξωτερική γωνία ΕΓΔ είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι ΑΒΓ.[39]

[36] Λόγω του 5ου Αξιώματος.
[37] Πρόταση α′ 31.
[38] Πρόταση α′ 29.
[39] ό.π.



Σχήμα 3.8: Πρόταση α′ 32.

Αλλά δείχθηκε ότι και η ΑΓΕ είναι ίση με την ΒΑΓ· άρα όλη η ΑΓΔ γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο εσωτερικών και απέναντι γωνιών ΒΑΓ και ΑΒΓ.

Προστίθεται σε αυτές η ΑΓΒ· άρα το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΓΑ και ΓΑΒ.

Αλλά το άθροισμα των ΑΓΔ και ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές.[40] Άρα και το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΓΑ και ΓΑΒ είναι ίσο με δύο ορθές.

Άρα, σε κάθε τρίγωνο, εάν μία πλευρά του προεκταθεί, τότε η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, και το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, Ο.Ε.Δ. □

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι η σημαντικότερη και θεμελιωδέστερη αναλλοίωτη στη σύγχρονη γεωμετρία. Ανεξάρτητα από το σχήμα του τριγώνου, το άθροισμα των γωνιών του θα είναι πάντοτε ίσο με δύο ορθές (ή 180 μοίρες, ή π.) Τούτο χρησιμοποιείται τόσο συχνά που τείνουμε να λησμονούμε τη σημασία του. Ο Heath γράφει ότι το αποτέλεσμα αυτό ανακαλύφθηκε στα πολύ πρώϊμα στάδια της Ελληνικής γεωμετρίας. Για την ιστορία του έχουν γράψει ο Ευτόκιος, ο Πρόκλος και ο Διογένης Λαέρτιος.[41]

Μία πρώτη άμεση επίπτωση είναι ο τύπος για το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου. Εάν αυτό έχει n κορυφές, μπορει να τμηθεί σε

[40] Πρόταση α′ 13
[41] Βλ. Heath, Vol. I, p.317–322.

$n-2$ τρίγωνα και έχει άθροισμα γωνιών ίσο με $2(n-2)$ ορθές $(=(n-2)\pi)$.[42] Η Πρόταση α′ 32 έχει αργότερα παίξει ρόλο και στη φιλοσοφία. Αναφέρει ο Εμμανουήλ Καντ στην *Κριτική του Καθαρού Λόγου* ότι, η πρόταση αυτή είναι η πεμπτουσία αυτού που καλεί 'συνθετική εκ των προτέρων κρίση', δηλαδή, είναι ένα συμπέρασμα απόλυτης βεβαιότητας, ανεξάρτητο της εμπειρίας, που προσθέτει στην γνώση μας.

Ο Γιάκομπ Στάϊνερ (1796–1863) βρήκε μία πολύ σημαντική απόρροια της Πρότασης α′ 32. Χρησιμοποίησε τον τύπο $(n-2)\pi$ για να δώσει μία απλή απόδειξη του τύπου του Όϋλερ για τα κυρτά πολύεδρα: Εάν ένα τέτοιο πολύεδρο έχει K κορυφές, A ακμές και E έδρες, τότε

$$K+E-A=2.$$

Συνεπώς, η απλή αναλλοίωτος των τριγώνων προχωρά τόσο μακρυά όσο μέχρι την απόδειξη μίας εκ των πλέον σημαντικών αναλλοιώτων την σύγχρονης αλγεβρικής τοπολογίας, της χαρακτηριστικής Όϋλερ, στην πρώτη ενδεικτική περίπτωση των κυρτών πολυέδρων.

3.5 Βιβλίο α′, Μέρος Γ: Παραλληλόγραμμα και εμβαδά τους

Στο Μέρος Γ του Βιβλίου α′ βρίσκουμε μία συστηματική μελέτη των συσχετίσεων των εννοιών της 'παραλληλίας ' και του 'ίσου περιεχομένου'. Ο Ευκλείδης ορίζει διαφόρων ειδών τετράπλευρα σχήματα στον Ορισμό 22, αλλά όχι τα παραλληλόγραμμα που δεσπόζουν σε αυτό το Γ Μέρος. Αντί γι αυτό, τα εισάγει μαζί με τις βασικές τους ιδιότητες της συμμετρίας στις Προτάσεις 33 και 34.

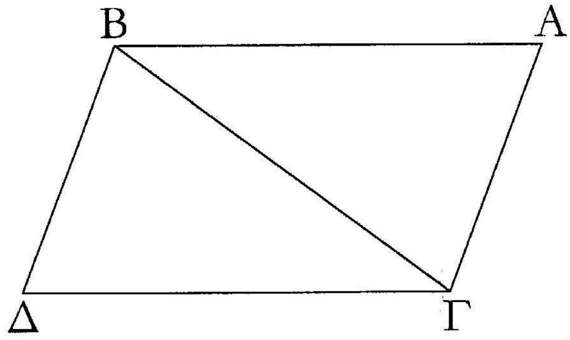
Πρόταση α′ 33.

Οι ευθείες που συνδέουν επί τα αυτά μέρη ίσες και παράλληλες ευθείες, είναι και μεταξύ τους ίσες και παράλληλες.[43]

[42] Αυτό αποδεικνύεται από τον Πρόκλο στα σχόλιά του στην Πρόταση α′ 32. Μάλιστα προσθέτει: *..η ιδιότητα ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ισούται με δύο ορθές είναι μία ουσιαστική ιδιότητα για (χαρακτηρίζει) ένα τρίγωνο.* Ο όρος *ουσιαστική ιδιότητα* είναι αριστοτέλειος.

[43] Σύμφωνα με τον Πρόκλο, η πρόταση αυτή είναι ο συνδετικός κρίκος της θεωρίας των παραλλήλων και της διαπραγμάτευσης των παραλληλογράμμων. Διότι, ενώ μιλά μόνο για παράλληλες και ίσες ευθείες που συνδέονται επί τα αυτά μέρη, δίδει, χωρίς να το εκφράζει

Έστω ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες, και έστω οι ευθείες ΑΓ, ΒΔ που τις συνδέουν επί τα αυτά μέρη· λέγω ότι και οι ΑΓ, ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες.



Σχήμα 3.9: Πρόταση α΄ 33.

Απόδειξη.

Ας συνδεθεί η ΒΓ. Και επειδή η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ, και η ΒΓ έχει εμπέσει σε αυτές, οι εναλλάξ γωνίες ΑΒΓ, ΒΓΔ είναι ίσες μεταξύ τους.

Και επειδή η ΑΒ είναι ίση με την ΓΔ και η ΒΓ είναι κοινή, οι ΑΒ, ΒΓ είναι ίσες με τις ΔΓ, ΓΒ.

Και η ΑΒΓ γωνία είναι ίση με τη ΒΓΔ. Άρα η βάση ΑΓ είναι ίση με τη βάση ΒΔ, και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΔ, και οι λοιπές γωνίες από τις οποίες υποτείνονται οι ίσες πλευρές είναι αντίστοιχα ίσες με τις λοιπές γωνίες.

Άρα η γωνία ΑΓΒ είναι ίση με τη ΓΒΔ. Και επειδή η εμπίπτουσα ΒΓ στις δύο ευθείες ΑΓ, ΒΔ κάνει τις εναλλάξ γωνίες μεταξύ τους ίσες, η ΑΓ είναι παράλληλη με την ΒΔ. Δείχθηκε δε ότι και η ΑΓ είναι ίση με την ΒΔ.

Άρα, οι ευθείες που συνδέουν τις ίσες και παράλληλες επί τα αυτά μέρη ευθείες, είναι και μεταξύ τους ίσες και παράλληλες, Ο.Ε.Δ. □

Πρόταση α΄ 34.

ρητά, την κατασκευή του παραλληλογράμμου. Έτσι, στην επόμενη ακριβώς πρόταση, αναφέρει 'παραλληλόγραμμα χωρία' χωρίς καμμία άλλη εξήγηση.

Οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες των παραλληλογράμμων[44] *είναι ίσες μεταξύ τους, και η διάμετρος*[45] *τα διχοτομεί.*

Όπως βλέπουμε στην παραπάνω πρόταση, ο Ευκλείδης μιλά σαφώς για εμβαδά χωρίς να αναφέρει την λέξη αυτή καθεαυτή ούτε εδώ, αλλά ούτε και στις επόμενες προτάσεις. Στν καθημερινή τους ζωή οι Έλληνες μετρούσαν τις περιουσίες τους –άλλωστε η λέξη γεωμετρία σημαίνει ακριβώς αυτό– δηλαδή προσαρτούσαν έναν αριθμό σε κάποιο συγκεκριμένο (πολυγωνικό) σχήμα. Στα μαθηματικά ξέρουμε ότι αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από μία συνάρτηση· μολαταύτα η έννοια της συνάρτησης είναι ξένη στα Στοιχεία. Ο Ευκλείδης δεν τη χρησιμοποιεί και ακόμη, δεν χρησιμοποιει κανενός είδους τύπους που θα όριζαν ενδεχομένως κάποιες συναρτήσεις. Λέγει ο Hartshorne στο Κεφ. I.3 του βιβλίου του The Theory of Area:

Από τον τρόπο που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης την έννοια του εμβαδού, συνάγεται ότι την θεωρεί ως μία σχέση ισοδυναμίας που ικανοποιεί τις κοινές έννοιες. Ειδικότερα:

1. *Ίσα χωρία έχουν ίσο περιεχόμενο.*

2. *Εάν δύο χωρία έχουν ίσο περιεχόμενο με κάποιο τρίτο, τότε έχουν ίσο περιεχόμενο.*

3. *Εάν ζεύγη χωρίων ίσου περιεχομένου προστεθούν κατά τρόπον ώστε να μην επικαλύπτονται για να σχηματίσουν μεγαλύτερα χωρία, τότε τα προκύπτοντα χωρία είναι ίσου περιεχομένου.*

4. *Το ίδιο και για την αφαίρεση σχημάτων. Σημειωτέον ότι η ισότητα περιεχομένου των αφαιρουμένων χωρίων δεν εξαρτάται από το που αφαιρούνται τα χωρία αυτά.*

[44] Ο Ευκλείδης λέγει 'των παραλληλογράμμων χωρίων' και με τον όρο αυτό εννοεί χωρία φραγμένα από παράλληλες ευθείες με τον επιπλέον περιορισμό ότι κάτι τέτοιο μπορεί να ισχύει μόνο για τετράπλευρα σχήματα. Ο όρος 'παραλληλόγραμμο' είναι Ευκλείδειος, σύμφωνα με τον Πρόκλο.

[45] =διαγώνιος του παραλληλογράμμου. Ο όρος 'διάμετρος ' χρησιμοπιήθηκε παντοιοτρόπως από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Λέγει λόγου χάρη ο Απολλώνιος στα 'Κωνικά': Σε κάθε καμφθείσα καμπύλη του επιπέδου, ονομάζω διάμετρο κάθε ευθεία που φερόμενη από την δοθείσα καμπύλη, διχοτομεί όλες τις ευθείες (χορδές) που φέρονται από την καμπύλη προς δοθείσα ευθεία. Εδώ καμπύλη είναι, όπως λ.χ, στον Αρχιμήδη, κάθε σύνθετη γραμμή που αποτελείται από ευθείες και καμπύλες που συνδέονται με οποιοδήποτε τρόπο μεταξύτους.

5. *Ημιχωρία χωρίων ίσου περιεχομένου έχουν ίσο περιεχόμενο.*[46]

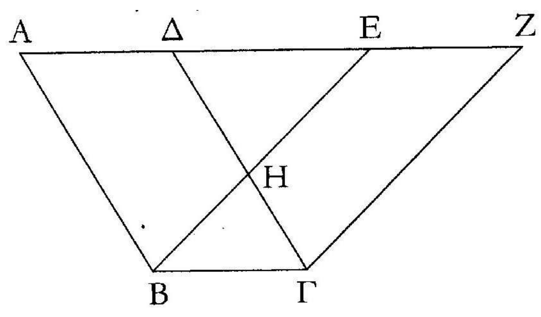
6. *Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους, το οποίο στην περίπτωση αυτή σημαίνει ότι εάν ένα χωρίο περιέχεται πλήρως σε ένα άλλο, τότε τα δύο χωρία δεν μπορεί να είναι ίσου περιεχομένου.*[47]

Προκύπτει ότι στο σημείο αυτό ο Ευκλείδης εισάγει μία νέα μη ορισμένη έννοια, αυτή του ίσου περιεχομένου, ή της ισότητας όπως λέγει ο ίδιος, και χρησιμοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ως νέα αξιώματα που χαρακτηρίζουν την έννοια αυτή.

Πρόταση α′ 35.[48]

Τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται στην ίδια βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.

Έστω παραλληλόγραμμα τα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ πάνω στην ίδια βάση ΒΓ και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, των ΑΖ, ΒΓ· λέγω ότι το ΑΒΓΔ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ.



Σχήμα 3.10: Πρόταση α′ 35.

Απόδειξη.

[46] Αυτό χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Πρότασης α′ 37.

[47] Τούτο χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Πρότασης α′ 39.

[48] Ο Πρόκλος λέγει, ότι τούτη η πρόταση είανι το πρώτο *τοπικόν* θεώρημα του Ευκλείδη: δηλαδή αναφέρεται σε *γεωμετρικούς τόπους*. Το σχόλιο του Πρόκλου είναι σημαντικό, διότι, στον ίδιο, τον Ευτόκιο και τον Πάππο μπορούμε μόνο να βασιστούμε για το οτιδήποτε είναι γνωστό από την αρχαιότητα περί γεωμετρικών τόπων. Αλλά ας δούμε τον ορισμό του Πρόκλου: *Καλώ τόπον γραμμής ή επιφανείας θέσιν ποιούσαν έν και το αυτόν σύμπτωμα.*

Διότι επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, η ΑΔ είναι ίση με την ΒΓ. Για τον ίδιο λόγο, η ΕΖ είναι ίση με την ΒΓ. Ώστε και η ΑΔ είναι ίση με την ΕΖ, και είναι κοινή η ΔΕ· άρα όλη η ΑΕ είναι ίση με όλη την ΔΖ.

Είναι όμως και η ΑΒ ίση με την ΔΓ· άρα οι ΕΑ, ΑΒ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΖΔ, ΔΓ.

Και η εντός γωνία ΖΔΓ είναι ίση με την εκτός γωνία ΕΑΒ. Άρα η βάση ΕΒ είναι ίση με τη βάση ΖΓ και το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ίσο με το τρίγωνο ΔΖΓ.

Αφαιρείται το κοινό ΔΗΕ· το λοιπό τραπέζιο ΑΒΗΔ είναι ίσο με το λοιπό τραπέζιο ΕΗΓΖ, και είναι κοινό το ΗΒΓ τρίγωνο. Άρα όλο το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ίσο με όλο το παραλληλόγραμμο ΕΒΓΖ.

Άρα, τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται στην ίδια βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους, Ο.Ε.Δ. □

Παραλλαγή της παραπάνω πρότασης είναι η

Πρόταση α′ 36.

Τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται σε ίσες βάσεις και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα μεταξύ τους.[49]

Οι Προτάσεις α′ 37–40 λένε παρόμοια πράγματα για τρίγωνα, και η Πρόταση α′ 41 συνδέει παραλληλόγραμμα και τρίγωνα.

Στο σημείο αυτό η θεωρία του ίσου περιεχομένου διακλαδώνεται σε δύο κατευθύνσεις. Ο πρώτος κλάδος οδηγεί κατευθείαν στο Πυθαγόρειο Θεώρημα (Προτάσεις α′ 46–48) και ο δεύτερος κλάδος μέσω των Προτάσεων α′ 42–45 στο σημαντικό αποτέλεσμα της Πρότασης β′ 14: *Είναι δυνατό να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσου περιεχομένου με οποιοδήποτε τετράπλευρο χωρίο.* Ή με άλλα λόγια: Οιοδήποτε τετράπλευρο τετραγωνίζεται.

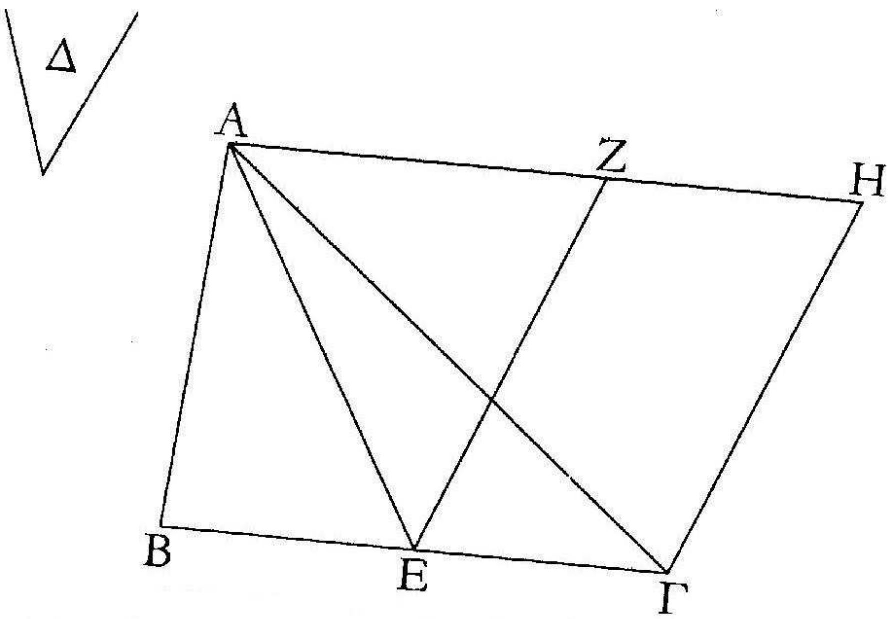
Στη γραμμή του Ευκλείδη, συζητούμε παρακάτω τις Προτάσεις α′ 42–45 των οποίων οι συνέχειες βρίσκονται στο Βιβλίο β′.

Πρόταση α′ 42.

[49] Σύμφωνα με τον Πρόκλο, οι Προτάσεις α′ 35 και 36 ανήκουν σε αυτό που οι Αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν ο ‘παράδοξος τόπος ’· υπό την έννοια ότι φαίνεται παράδοξο στον αρχάριο ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου παραμένει αναλλοίωτο, ενώ κάποια μήκη πλευρών μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα! Ο ‘παράδοξος τόπος ’, ή ‘τόπος αναλυόμενος ’, ή ‘τόπος αστρονομούμενος ’ ήταν η συλλογή τέτοιων προτάσεων, σε αντιστοιχία με τα *δείγματα* των Στωϊκών.

Να κατασκευαστεί, σε δοθείσα ευθύγραμμη γωνία, [50] *παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν τρίγωνο.*

Η απόδειξη είναι αρκετά εύκολη. Δέστε και το παρακάτω σχήμα όπου δίδεται το $\triangle$ΑΒΓ, η $\angle$ΖΕΓ και το Ε είναι το μέσον του ΒΓ.



Σχήμα 3.11: Πρόταση α′ 42.

Πρόταση α′ 43.

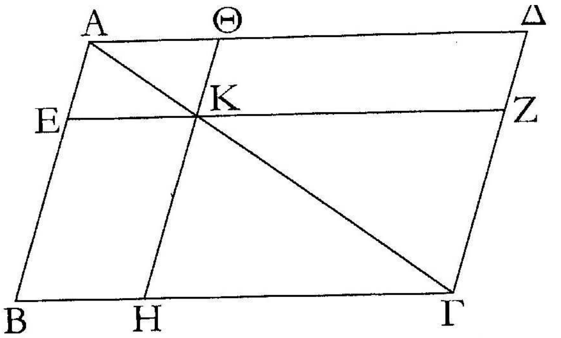
Σε κάθε παραλληλόγραμμο, τα παραπληρώματα[51] *των παραλληλογράμμων γύρω από τη διαγώνιο είναι ίσα μεταξύ τους.*

Το παρακάτω σχήμα (σχήμα 11)χρησιμοποιείται ξανά και ξανά στα Στοιχεία στην 'ορθογώνιά' του έκδοση. Μάλιστα, αρκετές φορές ο Ευκλείδης το καλεί

[50] Η δοθείσα γωνία θα είναι ορθή στις επόμενες εφαρμογές του Ευκλείδη. Για αυτό το λόγο, μπορούμε κάλλιστα να περιοριστούμε σ′ αυτήν την περίπτωση στις επόμενες προτάσεις. Δηλαδή στις Προτάσεις α′ 43–45 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα 'παραλληλόγραμμο' και 'δοθείσα γωνία' με τα 'ορθογώνιο' και 'ορθή γωνία', αντίστοιχα. Το Βιβλίο β′ ασχολείται μόνο με ορθογώνια.

[51] Ο όρος αυτός εξηγείται παρακάτω.

απλώς 'το σχήμα'. Το σημείο Κ της διαγωνίου του ΑΒΓΔ και οι ευθείες ΕΖ, ΗΘ είναι παράλληλες με τις πλευρές. Ο Ευκλείδης δηλώνει το ΒΗΚΕ απλώς με ΒΚ και το ΚΖΔΘ με ΚΔ. Τούτα τα παραλληλόγραμμα είναι τα '*λεγόμενα παραπληρώματα*'.



Σχήμα 3.12: Πρόταση α′ 43.

Απόδειξη της Πρότασης α′ 43.

Από την Πρόταση α′ 34, △ΑΒΓ=△ΔΑΓ. Παρόμοια, △ΗΚΓ=△ΖΚΓ και △ΑΕΓ=△ΚΗΑ. Αφαιρώντας τα δύο μικρότερα τρίγωνα από το μεγαλύτερο σε κάθε πλευρά της διαγωνίου, προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Πρόταση α′ 44.

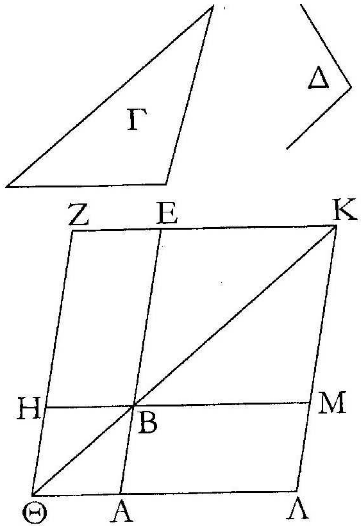
Να εφαρμοστεί[52] *παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν τρίγωνο επάνω σε δοθείσα ευθεία με δεδομένη γωνία.*

Κατασκευή. Έστω το △Γ και η ευθεία ΑΒ όπως στο σχήμα 3.12. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΒΕΖΗ ίσου περιεχομένου με το △Γ μέσω της Πρότασης α′ 42. Το τοποθετούμε έτσι ώστε η ΒΕ να είνει προέκταση της ΑΒ και κατασκευάζουμε το ΒΗΘΑ. Προεκτείνουμε τις ΖΕ και ΘΒ μέχρι να συναντηθούν στο Κ.[53] Συμπληρώνουμε τώρα το σχήμα. Το ΒΜΑΛ έχει πλευρά την ΑΒ και λόγω της Πρότασης α′ 43 είναι ίσου περιεχιομένου με το ΒΕΖΗ.

Πρόταση α′ 45.

[52] Λέγοντας 'εφαρμοστεί', ο Ευκλείδης εννοεί να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο με πλευρά τη δοθείσα, γωνία τη δοθείσα, και εμβαδό ίσο με αυτό του δοθέντος τριγώνου.

[53] Ο Ευκλείδης δείχνει ότι τούτο επιτυγχάνεψαι λόγω του 5ου αξιώματος.



Σχήμα 3.13: Πρόταση α′ 44.

Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο χωρίο[54] *με δεδομένη γωνία.*

Ο Ευκλείδης χωρίζει το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα, και μέσω της Πρότασης α′ 44 τα μετασχηματίζει σε δύο παραλληλόγραμμα που έχουν μία κοινή πλευρά. Συνδέοντάς τα, παίρνει το επιθυμητο παραλληλόγραμμο. Η απόδειξη γίνεται λεπτομερώς, δικαιολογώντας κάθε της βήμα. (Σχήμα 3.13).

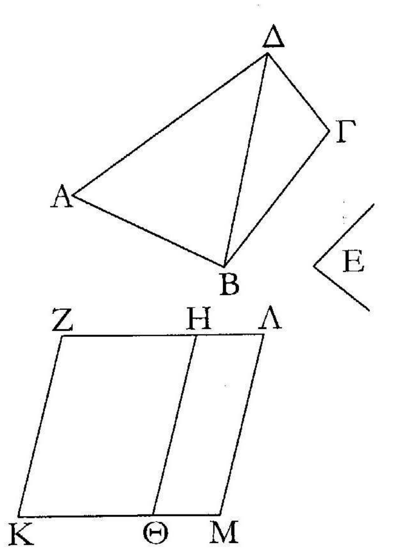
3.5.1 Μερικά σχόλια επάνω στις Προτάσεις α′ 44/45

Ας χρησιμοποιήσουμε προς στιγμή σύγχρονη ορολογία και ας υποθέσουμε ότι οι Προτάσεις α′ 44/45 αναφέρονται σε ορθογώνια. Το εμβαδόν A του ορθογωνίου με πλευρές (μήκους) a, b δίδεται από την $A = ab$. Στην α′ 44 έστω R το δοθέν ορθογώνιο και a η δοθείσα πλευρά. Με αυτή τη φρασεολογία, το πρόβλημα της α′ 45 δεν είναι τίποτε άλλο από το να βρεθεί η λύση της γραμμικής εξίσωσης

$$R = ax$$

[54] Ο Ευκλείδης λέγει *ευθυγράμμω*, και εννοεί με σύγχρονους όρους ένα κυρτό πλύγωνο. Είναι ενδιαφέρον το ότι ενώ η απόδειξη ασχολείται μόνο με την περίπτωση του τετραπλεύρου, περνά εύκολα στην γενική, χρησιμοποιώντας επαγωγή. Εντψπωσιακός επίσης είναι και ο τριγωνισμός του σχήματος.

όπου x είναι η δεύτερη πλευρά του επιθυμητού νέου τριγώνου. Θεωρούμενη υπό αυτό το πρίσμα, η α′ 45 είναι άλγεβρα μεταμφιεσμένη σε γεωμετρία. Δεν είναι σκοπός αυτών των σημειώσεων να πάρουν θέση στην παλαιά διαμάχη των ιστορικών που πιστεύουν ότι αυτή η ερμηνεία δεν δικαιολογείται και είναι αναχρονιστική, και (κάποιων) μαθηματικών που πιστεύουν ότι οι αλγεβρικοί τύποι όπως ο παραπάνω είναι η ισομορφική εικόνα της γεωμετρικής κατάστασης και άρα είναι ο σωστός τρόπος να ερμηνεύουμε τον Ευκλείδη.[55] Το ίδιο πρόβλημα ανακύπτει και στο Βιβλίο στ′.



Σχήμα 3.14: Πρόταση α′ 45.

3.6 Βιβλίο α′, Μέρος Δ: Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

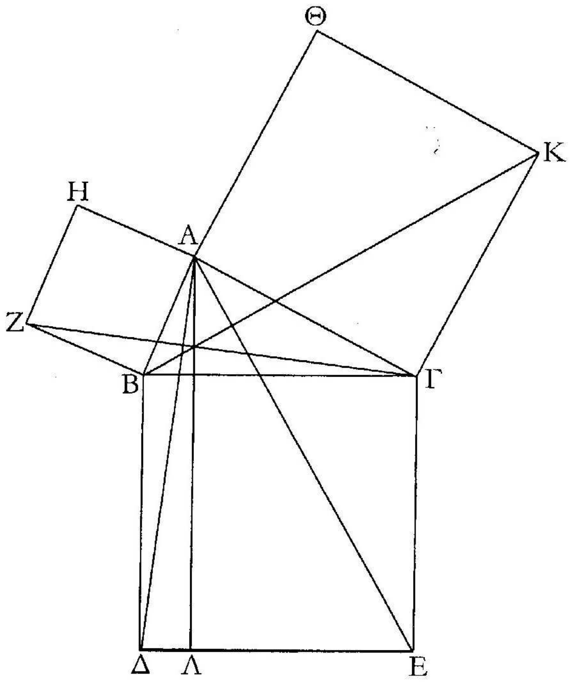
Στην Πρόταση α′ 46 ο Ευκλείδης δείχνει πως κατασκευάζεται τετράγωνο επάνω σε δοθείσα ευθεία· η α′ 47 είναι το περίφημο Πυθαγόρειο θεώρημα και η α′ 48 το αντίστροφό του.

Πρόταση α′ 47.

[55] Οι τελευταίοι είναι οι θιασώτες της λεγόμενης ‘Γεωμετρικής Άλγεβρας ’.

Στα ορθογώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της υποτείνουσας την ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ που έχει ορθή την γωνία ΒΑΓ· λέγω ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΓ.



Σχήμα 3.15: Πρόταση α′ 47. Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Απόδειξη.

Διότι έστω ότι έχει γραφεί το τετράγωνο ΒΔΕΓ επάνω στην ΒΓ, και τα ΗΒ, ΘΓ επάνω στις ΒΑ, ΑΓ.[56] Και από το Α, άγεται η ΑΛ παράλληλη με κάθε μία από τις ΒΔ, ΓΕ και συνδέονται οι ΑΔ, ΖΓ.

Και επειδή κάθε μία από τις γωνίες ΒΑΓ, ΒΑΗ είναι ορθή, πρέπει οι δύο ευθείες ΑΓ, ΑΒ που δεν βρίσκονται στο ίδιο μέρος, να κάνουν τις εφεξής γωνίες

[56] Όλα τα τετράγωνα μπορούν να κατασκευαστούν λόγω της Πρότασης α′ 46. Επίσης, τα ΗΒ, ΘΓ είναι τα τετράγωνα ΗΖΒΑ και ΘΑΓΚ αντίστοιχα. Ο Ευκλείδης συνηθίζει να συμβολίζει τα παραλληλόγραμμα με τα άκρα της μιας διαγωνίου τους.

με κάποια ευθεία ΑΒ, στο σημείο Α, ίσες με δύο ορθές. Άρα η ΓΑ βρίσκεται στην ευθεία ΑΗ.[57] Για τον ίδιο λόγο, και η ΒΑ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΑΘ.

Και επειδή η γωνία ΔΒΓ είναι ίση με την ΖΒΑ· είναι η κάθε μία ορθή· έστω ότι προστίθεται και στις δύο η ΑΒΓ. Άρα όλη η ΔΒΑ είναι ίση με όλη την ΖΒΓ.

Και επειδή η μεν ΔΒ είναι ίση με την ΒΓ, η δε ΖΒ με την ΒΑ, πρέπει οι ΔΒ, ΒΑ να είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΒΓ, ΖΒ[58] και η γωνία ΔΒΑ ίση με τη γωνία ΖΒΓ.

Άρα η βάση ΑΔ είναι ίση με τη βάση ΖΓ, και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ίσο με το τρίγωνο ΖΒΓ.[59]

Και είναι του μεν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιο το παραλληλόγραμμο ΒΛ γιατί έχουν την ίδια βάση τη ΒΔ και βρίσκονται και τα δύο εντός των ίδιων παραλλήλων ΒΔ, ΑΛ· του δε τριγώνου ΖΒΓ είναι διπλάσιο το τετράγωνο ΗΒ, διότι πάλι έχουν την ίδια βάση ΖΒ και βρίσκονται εντός των ίδιων παραλλήλων ΖΒ, ΗΓ.

[Τα διπλάσια ίσων πραγμάτων είναι ίσα.][60] Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΗΒ.[61]

Ομοίως, εάν συνδεθούν οι ΑΕ, ΒΚ, μπορεί να δειχθεί ότι και το παραλληλόγραμμο ΓΛ είναι ίσο με το τετράγωνο ΘΓ. Άρα όλο το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων ΗΒ, ΘΓ. Και είναι το μεν τετράγωνο ΒΔΕΓ αυτό που αναγράφεται από την ΒΓ, τα δε ΗΒ, ΘΓ αυτά που αναγράφονται από τις ΒΑ, ΑΓ. ‘Αρα το τετράγωνο της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ, ΑΓ.

Άρα, στα ορθογώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της υποτείνουσας την ορθή γωνία πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία, Ο.Ε.Δ. □

Υπάρχουν δεκάδες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος.[62] Ο Πρόκλος

[57] Από την Πρόταση α′ 14. Αυτό είναι το πρώτο αποφασιστικό σημείο της απόδειξης.

[58] ΖΒ, ΒΓ στο αρχαίο κείμενο, κάτι που είναι προφανής παράβλεψη του αντιγραφέα.

[59] Πρόταση α′ 4.

[60] Εντός παρενθέσεως και στο αρχαίο κείμενο. Πρόκειται περί άλλης μίας κοινής έννοιας.

[61] Εδώ βρίσκεται το δεύτερο αποφασιστικό σημείο της απόδειξης. Ο Ευκλείδης ουσιαστικά δείχνει ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΖΒΓ είναι αντίστοιχα ίσου περιεχομένου με τα τρίγωνα ΒΖΑ και ΒΔΛ που δεν φαίνονται στο σχήμα! Όμως, από την Πρόταση α′ 41, τούτα είναι ίσου περιεχομένου με τα ΖΒΓ και ΒΑΔ αντίστοιχα.

[62] Δείτε λ. χ. την ιστοσελίδα http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ για γενικές πληροφορίες και πατήστε το σύνδεσμο του δεύτερου σχολίου για να δείτε 81(!) αποδείξεις του Π.Θ.

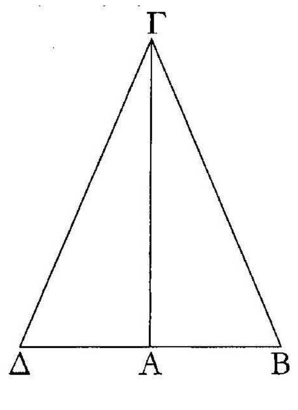
αποδίδει την παραπάνω απόδειξη προσωπικά στον Ευκλείδη. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι πρόκειται περί ενός θαυμάσιου δείγματος μαθηματικής εργασίας· δεν υπάρχουν ούτε ειδικά 'κόλπα' ούτε χρησιμοποιείται κάποιος τύπος. Με απλό τρόπο το τετράγωνο ΗΖΒΑ μετασχηματίζεται στο ορθογώνιο ΒΛ, αλλά παρόλη την απλότητά του, το επιχείρημα που υποβόσκει δεν είναι καθόλου τετριμμένο.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι τόσο θεμελιώδες για τα μαθηματικά του σήμερα όσο ήταν και στην εποχή του Ευκλείδη. Είναι ο πρόγονος όλων των διαφορετικών ειδών των μετρικών και των τετραγωνικών μορφών, και θεωρημάτων όπως το $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$. Μέσω της γενίκευσής του, του νόμου των συνημιτόνων, και του αντίστοιχου εσωτερικού γινομένου σε διανυσματικούς χώρους, το θεώρημα του Πυθαγόρα διεισδύει στα μαθηματικά τόσο μακρυά όσο φτάνει το μάτι.

Πρόταση 48.

Εάν σε τρίγωνο το τετράγωνο της μίας πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η περιεχόμενη από τις λοιπές πλευρές γωνία είναι ορθή.

Γιατί έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ότι το τετράγωνο της μιας πλεράς του ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ, ΑΓ του τριγώνου· λέγω ότι η γωνία ΒΑΓ είναι ορθή.



Σχήμα 3.16: Πρόταση α′ 47. Το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Απόδειξη.

Έστω ότι από το Α άγεται η ΑΔ σε ορθή θωνία με την ΑΓ στο σημείο Α[63]

[63]Πρόταση α′ 11.

και έστω ότι η ΑΔ είναι ίση με την ΒΑ[64] και συνδέεται η ΔΓ.

Επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΑΒ, είναι ίσο και το τετράγωνο της ΔΑ με το τετράγωνο της ΑΒ. Προστίθεται και στις δύο το τετράγωνο της ΑΓ. Άρα το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ, ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ, ΑΓ.

Αλλά το τετράγωνο της μεν ΔΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ και ΑΓ· διότι η γωνία ΔΑΓ είναι ορθή.[65] Το τετράγωνο της δε ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ, ΑΓ, διότι υποτέθηκε.

Άρα το τετράγωνο της ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΒΓ, άρα η πλευρα ΔΓ είναι ίση με την ΒΓ·[66] και επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΑΒ και είναι κοινή η ΑΓ, οι ΔΑ, ΑΓ είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΒΑ, ΑΓ. Και η βάση ΔΓ είναι ίση με τη βάση ΒΓ, άρα η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΒΑΓ. Όμως είναι ορθή η ΔΑΓ· άρα είναι και ορθή η ΒΑΓ.

Εάν άρα σε τρίγωνο το τετράγωνο της μίας πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η περιεχόμενη από τις λοιπές πλευρές γωνία είναι ορθή, Ο.Ε.Δ. □

Ο συνδυασμός των Προτάσεων α′ 47/48 αποτελεί το πλήρες Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε σε ελεύθερη μετάφραση ένα σοννέτο του Γερμανού ποιητή Adelbert von Chamisso. Σύμφωνα με το μύθο, ο Πυθαγόρας θυσίασε εκατό βόδια (μία *εκατόμβη*) στους θεούς αφού ανακάλυψε το θεώρημα.[67]

Adelbert von Chamisso: Η Αλήθεια

Η ΑΛΗΘΕΙΑ: χαρακτηριστικό της η ΑΙΩΝΙΟΤΗΤΑ
Από τότε που στον ανόητο κόσμο το φως έγινε γνωστό
το θεώρημα του ΠΥΘΑΓΟΡΑ σήμερα είναι τόσο σωστό
όσο ήταν και τότε που πρωτοδείχθηκε στην ΑΔΕΛΦΟΤΗΤΑ.

[64] Πρόταση α′ 3.

[65] Πρόταση α′ 47.

[66] Άλλη μία επιπρόσθετη κοινή έννοια. Λίγο παρακάτω χρησιμοποιείται και η αντίστροφή της.

[67] Κατ άλλους, το θεώρημα ανκαλύφθηκε από τον μαθητή του *Ίππασο τον Μεταποντίνο* τον οποίον αμέσως μετά έπνιξαν οι συμμαθητές του για να μη γίνει γνωστό το θεώρημα στον υπόλοιπο κόσμο, μιας και σήμαινε την κατάρρευση της Σχολής του Πυθαγόρα. Αλλά φαίνεται ότι διαρροές υπήρχαν από τότε… Δείτε και το παρακάτω Κεφάλαιο 5.

Οι ΘΕΟΙ που του έστειλαν αυτή την αχτίδα από φως
συμβολικά σ΄ αυτούς ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ θυσίασε:
Εκατό βόδια, ψημένα, κομμένα και σε φέτες τεμάχισε
Εκφράζοντάς τους το ευχαριστώ του, προς τέρψη τους προφανώς.

Τα βόδια, από εκείνη τη μέρα, όταν ακούν στα μονοπάτια τους
ότι μία καινούρια αλήθεια μπορεί να ξεπροβάλλει απ΄ το κενό
αυτοστιγμεί τρέχουν να ξεφύγουν με δαιμονιώδη ρυθμό.

Από τον ΠΥΘΑΓΟΡΑ για πάντα θα πανικοβάλλονται-
Πολύ αδύναμα να απωθήσουν την ισχυρότητα των ακτίνων που εκπέμπονται
του ΦΩΤΟΣ, τρέμουν και σφαλίζουν τα μάτια τους.

Κεφάλαιο 4

Πηγές των μαθηματικών ΙΙ: Το Αίτημα των Παραλλήλων

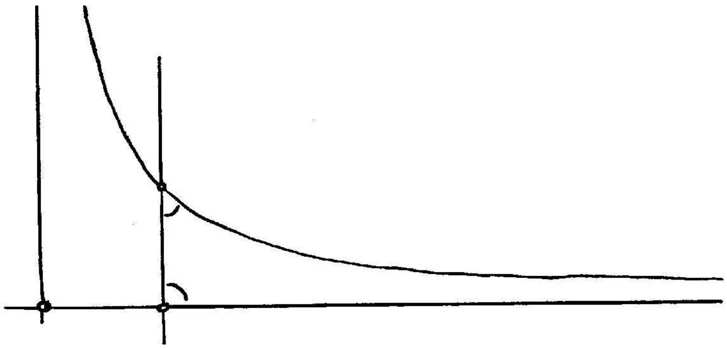
Η συζήτηση για το αξίωμα των παραλλήλων υπήρξε η οδηγός δύναμη για την αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών. Στα παρακάτω περιγράφουμε συνοπτικά την εξέλιξη της συζήτησης αυτής στην ιστορία των μαθηματικών.

Οι ιστορικοί γενικά θεωρούν ότι η εισαγωγή του 5ου Αιτήματος και της θεωρίας των παραλλήλων γενικότερα, ήταν σχετικά πρόσφατη στους Ευκλείδειους χρόνους. Πιθανόν να είχε προηγηθεί ένας ορισμός των παραλλήλων του ιδίου τύπου με τον Ορισμό α΄ 17 της διαμέτρου του κύκλου. Εκει, η διάμετρος ορίζεται όχι απλώς ως η ευθεία που φέρεται από το κέντρο του κύκλου, αλλα επιπρόσθετα, τονίζεται ότι η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο. Συνακόλουθα, ένας ορισμός των παραλλήλων που θα μπορούσε να είχε υπάρξει, θα εξασφάλιζε την ύπαρξη, την μοναδικότητα, αλλά και το ότι θα μπορούσαν να κατασκευαστούν με την χρήση των εναλλάξ, ή απλούστερα, των ορθών γωνιών. Αυτές οι ιδιότητες των παραλλήλων ήταν και εκείνη την εποχή αρκετά φυσιολογικές σε αρχιτέκτονες και οικοδόμους, οι οποίοι εργάζονταν συνεχώς με παράλληλα στρώματα λίθων και είχαν συνηθίσει να κάνουν πολύ ακριβείς μετρήσεις.

Ο Πρόκλος σε ένα σχόλιό του δίδει μία αχνή υπόδειξη για την αρχή του αιτήματος των παραλλήλων (Αίτ. 5 στο εξής).

Το ότι υπάρχουν ευθείες που πλησιάζουν απεριόριστα η μία την άλλη αλλά δεν συναντώνται ποτέ δείχνει παράλογο και παράδοξο, μολαταύτα είναι αληθές και έχει βεβαιωθεί για άλλα είδη γραμμών.

Πιθανόν το πιο εμφατικό παράδειγμα αυτών των γραμμών είναι της υπερβολής και των ασυμπτώτων της. (Βλ. Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Υπερβολή και ασύμπτωτή της.

Αποδεχόμενοι τις 'μεικτές ' γωνίες, τούτο είναι ένα 'αντιπαράδειγμα' του Αιτ. 5, ή τουλάχιστον θα μπορούσε να τραβήξει την προσοχή των μαθηματικών της εποχής.

Ο πρώτος που έγραψε περί κωνικών τομών ήταν ο *Μέναιχμος* ($\sim 380 - 320$ π.Χ.). Άν η παραπάνω εικασία είναι σωστή, αυτό θα τοποθετούσε την εισαγωγή του Αιτ. 5 γύρω στο 340 π.Χ. Άλλοι ιστορικοί αποδίδουν το Αίτ. 5 στον ίδιο τον Ευκλείδη. Ο Αριστοτέλης δεν αναφέρει πουθενά τα αξιώματα του Βιβλίου α'.

Συγκρινόμενο με τα άλλα αιτήματα, το Αίτ. 5 είναι μάλλον πολύπλοκο και όχι τόσο προφανές όσο ας πούμε η ισότητα όλων των ορθών γωνιών. Για αυτό το λόγο, οι μαθηματικοί της αρχαιότητας προσπάθησαν να το εξαλείψουν, προσπαθώντας είτε να το αποδείξουν, ή να το αντικαταστήσουν με κάποιο άλλο, πιο εύλογο αξίωμα. Κανείς όμως δεν τα κατάφερε.

Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε ξανά ύστερα από περίπου 1500 χρόνια. Ο John Wallis έδωσε μία ανοικτή διάλεξη στην Οξφόρδη το 1663 περί του θέματος και απέδειξε το ακόλουθο:

Εάν υπάρχουν όμοια τρίγωνα διαφορετικού εμβαδού, τότε το Αίτ. 5 αληθεύει. [1]

Το αποτέλεσμα τούτο αντικαθιστά το Αίτ. 5 με κάποιο πλέον ευλογοφανές. Ανάμεσα στους μαθηματικούς που ακολούθησαν τον δρόμο του Wallis που ξε-

[1] Ας παρατηρήσουμε ότι στην σφαιρική ή στην υπερβολική γεωμετρία όπου δεν αληθεύει το Αίτ. 5, προκύπτει άμεσα από το αποτέλεσμα του Wallis ότι δεν υπάρχουν όμοια τρίγωνα διαφορετικού εμβαδού! Αυτό ισχύει απολύτως, καθόσον εκεί, δύο όμοια τρίγωνα είναι αναγκαστικά ίσα.

κινούσε από την άρνηση του Αιτ. 5 και οδηγούσε σε πιθανά αποτελέσματα που αντέκρουαν κατεστημένα θεωρήματα, ήταν ο ιησουΐτης μοναχός Girolamo Saccheri, ο οποίος το 1793 δημοσίευσε ο βιβλίο του *Ο Ευκλείδης απαλλαγμένος από κάθε ελάττωμα*. Ο Saccheri θεώρησε εκεί ένα τετράπλευρο που κατασκευάζεται με τρεις ορθές γωνίες. Τότε, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για την λοιπή γωνία: Μπορεί να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Η περίπτωση της ορθής είναι ισοδύναμη με το Αίτ. 5. Κατάφερε να βρει μία αντίθεση υποθέτοντας ότι η γωνία είναι αμβλεία. (Η αντίθεση ήταν το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν ευθείες απείρου μήκους. Αυτή είναι η κατάσταση στη σφαίρα).

Από την υπόθεση της οξείας γωνίας, κατέληξε σε πολλά συμπεράσματα, αλλά κανένα από αυτά δεν ερχόταν σε αντίθεση με γνωστό αποτέλεσμα. Το 1766 ο Johann Heinrich Lambert συνέγραψε ένα άρθρο με τίτλο 'Η θεωρία των παραλλήλων ευθειών' που δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του το 1786. Φαίνεται ότι σκεπτόταν ότι μπορεί να κατασκευαστεί μία γεωμετρία από την υπόθεση του Saccheri της οξείας γωνίας και χρησιμοποιεί τις Προτάσεις α΄ 16/17 ως στοιχεία του ότι ο Ευκλείδης πρέπει να είχε την ίδια γνώμη.

Τελικά, γύρω στα 1830 τρείς μαθηματικοί ήταν πλήρως πεπεισμένοι για την ύπαρξη 'μη-Ευκλειδείων γεωμετριών': ο Carl Friedrich Gauss, ο János Bolyai και ο Nikolay Ivanovich Lobachevsky. Όμως ο μεν Gauss δεν δημοσίευσε ποτέ τα αποτελέσματά του, ενώ οι εργασίες των άλλων δύο ήταν πολύ δύσκολο να διαβαστούν. Έτσι, το αντικείμενο παρέμενε σε νάρκη, έως τον θάνατο του Gauss (1855) και την σχεδόν ταυτόχρονη δημοσίευση των ιδιωτικών του επιστολών. Τότε η κατάσταση άλλαξε δραματικά με την επιπρόσθετη δημοσίευση των εργασιών του Riemann περί αφηρημένων γεωμετριών και την εξέλιξη της διαφορικής γεωμετρίας. Η υπόθεση της οξείας γωνίας ονομάστηκε τότε 'υπερβολική γεωμετρία' και η πιθανότητα της πιθανής αντίθεσης με γνωστό αξίωμα επιλύθηκε από τον Beltrami το 1868, ο οποίος την παρέστησε ως τη γεωμετρία μίας επιφάνειας με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. ο Felix Klein βρήκε το 1871 το λεγόμενο Beltrami–Klein μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας και το 1882 ο Poincaré έθεσε την υπερβολική γεωμετρία εντός του πλαισίου της μιγαδικής ανάλυσης. Το ερώτημα για το αξίωμα των παραλλήλων απαντήθηκε οριστικά γύρω στο 1880: Υπάρχουν τρεις κατηγορίες επίπεδων γεωμετριών που ικανοποιούν όλα τα άλλα Ευκλείδεια αξιώματα: η ελλειπτική γεωμετρία (επάνω στη σφαίρα, με ταυτισμένα τα αντιποδικά σημεία, υπόθεση της αμβλείας γωνίας) με καθόλου παράλληλες· η Ευκλείδεια γεωμετρία με το Αίτ. 5 (υπόθεση της ορθής γωνίας, μοναδική παράλληλος) και η υπερβολική γεωμετρία (υπόθεση της οξείας γωνίας, άπειρες παράλληλες).[2]

Υπάρχουν όμως και άλλα στην ιστορία των γεωμετρικών αξιωμάτων. Το 1882 ο Moritz Pasch ξεκαθάρισε το αντικείμενο της διάταξης των σημείων, το οποίο ο Ευκλείδης χειρίζεται διαισθητικά. Και το έκανε αυτό, προσθέτοντας αξιώματα περί διάταξης στα ήδη υπάρχοντα του Ευκλείδη. Αλλά για τον Pasch, η γεωμετρία εξακολουθούσε να είναι επιστήμη του φυσικού χώρου. Αυτό το τελευταίο εμπόδιο ξεπεράστηκε από τον David Hilbert (1889) στα *Θεμέλια της γεωμετρίας* του (Grundlagen der Geometrie.) Ο Hilbert μας λέγει ότι τα αντικείμενα της γεωμετρίας καλούνται σημεία, ευθείες, επίπεδα κλπ. αλλά αυτό γίνεται *κατά συνθήκη*. Θα μπορούσαμε να τα ονοματίσουμε με οποιουδήποτε είδους παράξενα ονόματα και να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Τούτα τα αντικείμενα ορίζονται μόνο 'πεπλεγμένα' από το τι έχει ειπωθεί για αυτά στα αξιώματα. Λόγου χάρη, ένα σημείο μπορεί να είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, ή ένας μιγαδικός αριθμός, κ.ο.κ. Έτσι, η μελέτη της γεωμετρίας μετασχηματίστηκε από την μελέτη του χώρου στην μελέτη της λογικής αλληλεξάρτησης συγκεκριμένων προτάσεων περί κάποιων αορίστων αντικειμένων.

Ο Hilbert κατέταξε τα αξιώματά του σε πέντε κατηγορίες: αξιώματα έκτασης όπως 'Δύο διαφορετικά σημεία κείνται σε μία μοναδική ευθεία', αξιώματα διάταξης, αξιώματα ισότητας, το αξίωμα των παραλλήλων και τέλος, τα αξιώματα της συνέχειας.

Τα αξιώματα της συνέχειας εξασφαλίζουν το ότι τα σημεία μίας ευθείας μπορούν να ταυτιστούν με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Με την βοήθεια αυτού αποδεικνύει το κύριο θεώρημά του:

Οι πέντε ομάδες αξιωμάτων καθορίζουν έως ισομορφισμού το Ευκλείδειο επίπεδο κατά μοναδικό τρόπο. Μπορεί να θεωρηθεί ως το επίπεδο της αναλυτικής γεωμετρίας υπεράνω του σώματος των πραγματικών αριθμών.

Σε ένα παράρτημα του βιβλίου του ο Hilbert παρουσιάζει το πρώτο αξιωματικό σύστημα για τους πραγματικούς αριθμούς. Με αυτό σαν σημείο εκκίνησης, η αξιωματική μέθοδος κυριάρχησε στα μαθηματικά του εικοστού αιώνα.[3]

---

[2] Στν ελλειπτική γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι $> \pi$ στην Ευκλείδεια είναι $= \pi$ και στην υπερβολική είναι $< \pi$.

[3] Ο Hilbert πίστευε ακράδαντα στη δύναμη της συνολοθεωρίας του Georg Cantor. Και θεωρούσε ότι τούτη επιτρέπει την απαλλαγή των μαθηματικών από κάθε είδους παράδοξα (δηλαδή προτάσεις ταυτογχρόνως αληθείς και ψευδείς). Αλλά, το 1940 ο Kürt Gödel απέδειξε, ότι οποαδήποτε αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών εμπεριέχει παράδοξα. Ευτυχώς για τη γεωμετρία, το θεώρημα του Gödel δεν αποτέλεσε για αυτήν ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τη σχολή του Πυθαγόρα. . .

Κεφάλαιο 5

Πηγές των μαθηματικών III: Πυθαγόρας ο Σάμιος

Ο Πυθαγόρας έζησε γύρω στο 570–490 π. Χ. Η μόνη αχνά προσδιορισμένη ημερομηνία στη ζωή του είναι το 530, όταν έφυγε από τη Σάμο για να εγκατασταθεί στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας (Μεγάλης Ελλάδας). Εκεί ίδρυσε μία θρησκευτική και φιλοσοφική σχολή η οποία σύντομα απέκτησε ισχυρή πολιτική επιρροή στις Ελληνικές πόλεις της Κάτω Ιταλίας. Εκδιώχθηκε από τον Κρότωνα γύρω στο 500 για να εγκατασταθεί στο Μεταπόντιο της Σικελίας όπου και πέθανε. (Βλ. Σχήμα παρακάτω).

Σχήμα 5.1: (a) Νόμισμα του Μεταποντίου με ένα 'πεντάγραμμο' από σπόρους κριθαριού (γύρω στο 440 π.Χ. (b) Νόμισμα των Αβδήρων (γύρω στο 430 π.Χ.) όπου απεικονίζεται σε ιδεατό πορτραίτο ο (Π)ΥΘΑΓΟΡΗΣ. (c) Νόμισμα της Μήλου, πριν το 420 π.Χ. με πεντάγραμμο.

Οι Πυθαγόρειοι, όπως καλούνταν οι μαθητές του, συνέχισαν να εξασκούν πολιτική επιρροή, εως ότου γύρω στα μέσα του πέμπτου αιώνα, μία επανάσταση των δημοκρατικών τους εκδίωξε οριστικά από τις πόλεις της Κάτω Ιταλίας. Κάποιοι απ΄ αυτούς πήγαν στη Σικελία και κάποιοι άλλοι στην μητροπολιτική Ελλάδα, όπου ίδρυσαν νέα κέντρα για τις δραστηριότητές τους. Οι τελευταίοι των Πυθαγορείων αναφέρονται γύρω στο 350 ως φτωχοί χορτοφάγοι περιπλανώμενοι προσκυνητές.

Η πόλη και η νήσος της Σάμου μαζί με τις γειτονικές Μίλητο και Έφεσο ήταν ανθίζοντα οικονομικά και διανοητικά κέντρα τον έκτο αιώνα π. Χ. Ο Θαλής και ο μαθητής του Αναξίμανδρος δίδαξαν στη Μίλητο το πρώτο μισό του έκτου αιώνα. Ο φιλόσοφος Ηράκλειτος ο Εφέσιος ήταν σύγχρονος του πυθαγόρα.

Δύο παραδείγματα πρακτικής γεωμετρίας καταδεικνύουν την ατμόσφαιρα της πόλης που μεγάλωσε ο Πυθαγόρας. Έξω από την πόλη της Σάμου[1] βρισκόταν το ιερό της Ήρας. Περίπου το 570 ανατέθηκε από την πόλη της Σάμου στους αρχιτέκτονες Ροίκο και Θεόδωρο η κατασκευή ενός νέου ναού κολοσσιαίων διαστάσεων: Οι διστάσεις του ήταν 52.5×105 μέτρα και οι 104 κίονές του είχαν ύψος 18 μέτρα. Η βάση κάθε κίονα είχε διάμετρο μέχρι 1.80 μέτρα και ζύγιζε περίπου 1500 κιλά η κάθε μία. Παρά τις μεγαλειώδεις διαστάσεις του, οι αρχιτέκτονες είχαν τις απαραίτητες γνώσεις για να κατασκευάσουν τον ναό χρησιμοποιώντας πηχάκια! Ο ναός αυτός ήταν το πρότυπο του λεγόμενου Ιωνικού ρυθμού.[2]

Το δεύτερο παράδειγμα υψηλής τεχνολογίας ήταν το περίφημο *Ευπαλίνειο όρυγμα*. Ήταν μία σήραγγα υδραγωγείου, μήκους 1 χιλιομέτρου που διέσχιζε ένα βουνό και μετέφερε νερό στην πόλη της Σάμου. Το επαναστατικό ήταν ότι η σήραγγα ανοιγόταν ταυτόγχρονα και από τις δύο πλευρές του βουνού. Οι εργάτες συναντήθηκαν στη μέση του βουνού έχοντας απόκλιση μόνο 10 μέτρων.[3]

Αυτό ήταν το υπόβαθρο της νεότητας του Πυθαγόρα. Πιθανόν να ταξίδεψε

[1] Το σημερινό Πυθαγόρειο.

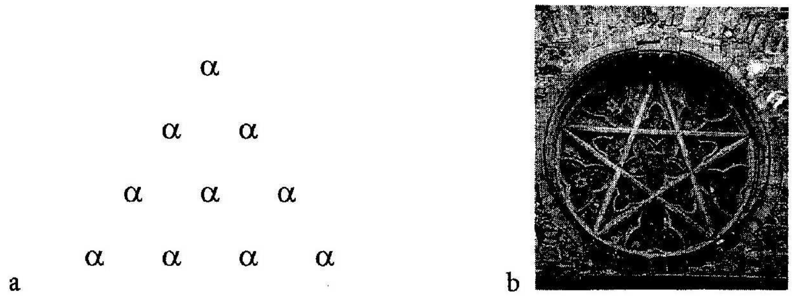
[2] Παρ΄ όλα αυτά καταστράφηκε σχεδόν αμέσως κατά την επανάσταση που έφερε στην εξουσία τον τύραννο Πολυκράτη. Αυτός έδωσε αμέσως εντολή για την ανέγερση ενός ακόμα πιο επιβλητικού ναού 155 κιόνων. Ο σημερινός επισκέπτης βλέπει σήμερα μόνο έναν από τους 155 γιγάντιους κίονες του ναού της Ήρας. Για τα σχέδια του ναού δείτε την ιστοσελίδα http://www.greatbuildings.com/buildings/Fourth_Temple_of_Hera.html

[3] Πρόκειται για τους ανθρώπινους μετροπόντικες της εποχής. Με την διαφορά, ότι ήταν πιο γρήγοροι από τους σημερινούς και μάλλον άξιζαν περισσότερο τα χρήματα που τους πλήρωσαν οι πολίτες της Σάμου... Για το Ευπαλίνειο όρυγμα, δείτε λ.χ. την http://el.wikipedia.org/wiki/Ευπαλίνειο_όρυγμα

στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα, αλλά η Σάμος ήταν το κέντρο της εποχής.

Τα Μαθηματικά των Πυθαγορείων

Σχεδόν τίποτε δεν είναι γνωστό για τα μαθηματικά επιτεύγματα του ίδιου του Πυθαγόρα. Η προφορική παράδοση των μαθητών του γράφτηκε πολύ αργότερα, από τους μαθητές του αριστοτέλη. Είναι γνωστό ότι οι μαθητές του Πυθαγόρα στην Κάτω Ιταλία χωρίζονταν σε δύο ομάδες: τους *Ακουσματικούς*, αυτούς δηλαδή που επαναλάμβαναν τις θεωρίες του δασκάλου λέξη προς λέξη και τους *Μαθηματικούς*, αυτούς δηλαδή που αναλάμβαναν να τις εξερευνήσουν και να τις επεκτείνουν.[4] οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν δύο σύμβολα: την αποκαλούμενη *τετρακτύν*, την διάταξη δέκα σημείων που αναπαριστούν το $1+2+3+4 = 10$, και το πεντάγραμμο (Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: (a) Η τετρακτύς κατά τον Ιάμβλιχο. (b) Πεντάγραμμο από την εκκλησία της Παναγίας του Lemgo στη Γερμανία (1300 μ.Χ.).

Συνήθως αποκαλούσαν το πεντάγραμμο *Υγεία*,[5] αφού το πεντάγραμμο ήταν και ιατρικό σύμβολο. Αναμφίβολα, οι μουσικές αρμονίες κατείχαν κεντρική θέση στη διδασκαλία του Πυθαγόρα. Ο Μεσαίωνας τον γνώριζε ως τον Inventor Musicae, και όχι ως μαθηματικό.

[4] Κάθε μαθητής του Πυθαγόρα πάντως έπρεπε να διανύσει μία πενταετία απόλυτης σιωπής με μόνο άλλη ασχολία το άκουσμα της διδασκαλίας του Πυθαγόρα, ο οποίος μάλιστα δίδασκε πίσω από ένα παραπέτασμα. Ίσως αυτή η μέθοδος διδασκαλίας, παρότι μη πολιτικά ορθή, θα ήταν χρήσιμη για κάποιους φασαριόζους πολυλογάδες των αμφιθεάτρων...

[5] Όσοι έχουν διαβάσει τον κώδικα Ντα Βίντσι, του Dan Brown θα θυμούνται το σχετικό χωρίο, όπου ο συγγραφέας ρητά διαχωρίζει (και σωστά) το πεντάγραμμο του Πυθαγόρα από την πεντάλφα του Δαυίδ.

Γράφει ο Αριστοτέλης για τους Πυθαγορείους στα Μετά τα Φυσικα:

…Οι Πυθαγόρειοι αφιερώθηκαν στα μαθηματικά· ήταν οι πρώτοι που εξέλιξαν αυτή την επιστήμη, και έχοντας μεγαλώσει μέσα σε αυτήν, θεώρησαν ότι οι αρχές της είναι οι αρχές που διακατέχουν τα πάντα. Εφόσον από αυτές τις αρχές πρωταρχική είναι αυτή του αριθμού[6] *στους αριθμούς έβρισκαν πολλές ομοιότητες με τα υπάρχοντα πράγματα και με αυτά που αποκτούσαν ζωή–περισσότερο από το πύρ την γη και το ύδωρ…*

Αφού επίσης είδαν ότι τα χαρακτηριστικά και οι αναλογίες των μουσικών κλιμάκων μπορούσαν να εκφραστούν με αριθμούς, από τότε όλα τα υπόλοιπα πράγματα θεωρούσαν ότι μπορούν να τεθούν εντός του πλαισίου των αριθμών…

Φαίνεται ότι υπήρχαν τέσσερα μέρη της πυθαγόρειας διδασκαλίας: Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονία (Μουσική) και Αστρονομία. Αυτό είναι το κλασσικό quadrivium, μέρος των επτά ελεύθερων τεχνών. Κατά των Μεσαίωνα, τα τρία 'τετριμμένα' μέρη, το trivium, η γραμματική, η ρητορική και η διαλεκτική, ήταν απλώς τα εισαγωγικά για τα υπόλοιπα. Ο Πλάτων ήταν ο πρώτος που έδωσε στα μέρη τους quadrivium το όνομα *Μαθήματα*, αυτά που πρέπει να μαθευτούν.[7]

Αριθμητική

Όπως φαίνεται παραπάνω, ο Αριστοτέλης τονίζει τον προεξέχοντα ρόλο των αριθμών στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά. Στις εργασίες του Νικόμαχου που περιλαμβάνονται στο Βιβλίο η', υπάρχουν ίχνη της Πυθαγόρειας Αριθμητικής.

Εφαρμογή στα εμβαδά

Την πρώτη απλή εφαρμογή στα εμβαδά την είδαμε στην Πρόταση α' 44. Όπως φαίνεται αναλυτικά στο Βιβλίο β', το Πυθαγόρειο Θεώρημα λύνει προβλήματα που στη σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα εκφράζονται ως πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα θετική.

Το παρακάτω σήμα παρουσιάζει την λύση της

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

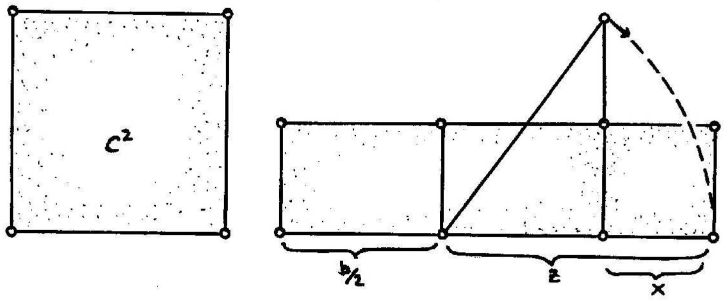
[6] Εννοούσαν τους ρητούς αριθμούς. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα οδήγησε στην ανακάλυψη των αρρήτων, κάτι που έδωσε ισχυρό κτύπημα στη Σχολή του Πυθαγόρα.

[7] Ο διαχωρισμός των σπουδών σε κλασσικές και θετικές στο σημερινό Ελληνικό Λύκειο σίγουρα κάνει τα κόκκαλα του Πλάτωνα να τρίζουν…

όπου εδώ, c^2 είναι δοθέν εμβαδόν τετραγώνου και b το μήκος δοθέντου ευθύγραμμου τμήματος. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη κάποιου z που ικανοποιεί την

$$c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = z^2$$

από την οποία βρίακουμε το x.



Σχήμα 5.3: Η γεωμετρική λύση διωνυμικής εξίσωσης.

Ασύμμετρα τμήματα

Όπως προείπαμε, και όπως αναφέρει και ο Πάππος, τα ασσύμετρα ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή τα ευθύγραμμα τμήματα με μη ρητό λόγο, ανακαλύφθηκαν λίγο ως πολύ από την αναζήτηση του μήκους της υποτείνουσας ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου.

Το Δωδεκάεδρο

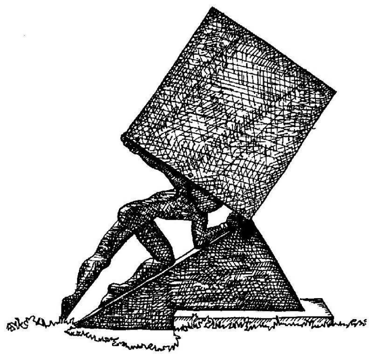
Ένας από τους ‘μαθηματικούς ’ μαθητές του Πυθαγόρα ήταν και ο Ίππασος ο Μεταποντίνος. Αναφέρει ο Ιάμβλιχος:

> *. . . ήταν Πυθαγόρειος αλλά, όντας αυτός που συνέγραψε και δημοσίευσε την κατασκευή της σφαίρας με τα δώδεκα πεντάγωνα, χάθηκε σε ναυάγιο για την ασέβειά του, αλλά εξυμνήθηκε για την ανακάλυψή του.*[8]

[8] Είδαμε μία διαφορετική έκδοση αυτής της ιστορίας στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η πολιτιστική σημασία του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σταματήσετε κάποιο τυχαίο ενήλικα στο δρόμο και τον ρωτήσετε τι θυμάται από τα σχολικά μαθηματικά, είναι περίπου σίγουρο ότι θα σας απαντήσει ‘Το Πυθαγόρειο Θεώρημα’. Αυτό είναι μία απλή ενδειξη του γεγονότος ότι το Π.Θ. κατατάσσεται ως πολιτιστικό επίτευγμα πρώτου μεγέθους στην ανθρώπινη ιστορία, η γνώση του οποίου ‘εγκαθιστάται’ μέσα στη νόηση του κάθε μαθητή ως ένα δεδομένο της ζωής. Η σπουδαιότητά του έγκειται και σε ένα άλλο γεγονός: Ως μαθηματικό επίτευγμα, είναι πολιτιστική κληρονομιά διεθνής, δηλαδή ανεξάρτητη, γλώσσας, λαών, κλπ. Το Π.Θ. διδάσκεται και γίνεται κατανοητό σε όλο τον κόσμο. Και είναι πιο σημαντικό από την μουσική pop, ας πούμε. Ένα τελευταίο σχόλιο για Π.Θ. Από το σχήμα, ο τύπος $a^2 = b^2 + c^2$ δεν είναι καθόλου μα καθόλου προφανής. Μόνο η απόδειξη δίδει τις απαραίτητες πληροφορίες για την αλήθεια του θεωρήματος. Και αυτό καλείται ‘βαθύ’ αποτέλεσμα στα μαθηματικά. Ίσως το μέγεθος της προσπάθειας που απαιτείται για την εξαγωγή ενός ‘βαθέος ’ αποτελέσματος να παριστάνεται στο παρακάτω γλυπτό του Lander που ειρωνικά για τους μαθηματικούς ονομάζεται ‘Σίσσυφος ’.



Σχήμα 5.4: Ο *Σίσσυφος* του Lander.

Κεφάλαιο 6

Στοιχείων Βιβλίο β′: Η Γεωμετρία των Ορθογωνίων

6.1 Ορισμοί του βιβλίου β′

Το Βιβλίο β′ είναι σύντομο και ομογενές, με μόνο 14 προτάσεις και δύο ορισμούς στην αρχή. Στο μεγαλύτερο μέρος του πρόκειται για αποτελέσματα που αφορούν σε διάφορους συνδυασμούς ορθογωνίων και τετραγώνων ίσου περιεχομένου. Στο τέλος του, υπάρχει η γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, που σήμαρα καλούμε Νόμο των Συνημιτόνων, όπως και το πως τετραγωνίζουμε ένα κυρτό πολύγωνο.[1] Σύμφωνα με κάποιους ιστορικούς, το Βιβλίο β′ έχει Πυθαγόρεια προέλευση.

Ως συνήθως, ακολουθούμε τον Ευκλείδη όταν μιλά για ‘ ίσα’ ορθογώνια, ενώ καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται περί ισεμβαδικών.

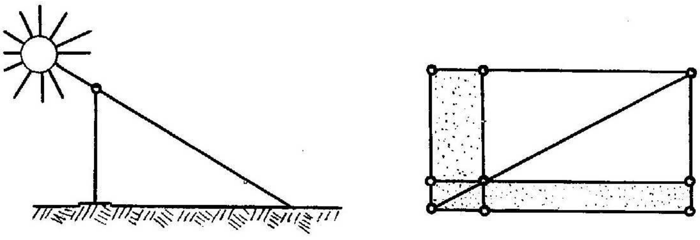
Ορισμοί

1. *Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται ότι περιέχεται σε δύο ευθείες που περιέχουν την ορθή γωνία.*

2. *Και σε κάθε παραλληλόγραμμο χωρίο, οποιοδήποτε από τα παραλληλόγραμμα γύρω από την διάμετρό του μαζί με τα δύο του παραπληρώματα, καλείται γνώμων.*[2]

[1] Τετραγωνίζω=κατασκευάζω κάτι ίσου εμβαδού με δοθέν τετράγωνο. Δείτε και την υποσημείωση στην Πρόταση β′ 14.

[2] Γνώμων στην κυριολεξία σημαίνει ένα πράγμα που επιτρέπει σε κάτι να γίνει γνωστό, εξ′ ου και τα σημερινά *εμπειρογνώμονας, νηογνώμονας*. Κατά τον Ηρόδοτο, οι Έλληνες έμαθαν



Σχήμα 6.1: Γνώμονες.

Ένας γνώμονας ήταν ένα είδος πρωτόγονου ηλιακού ρολογιού, ένα ραβδί κάθετο στον ορίζοντα το οποίου η σκιά χρησιμοποιείτο για να μετράται ο χρόνος. Οι μαθηματικοί προφανώς μετέφεραν το όνομα στο παρόμοιο γεωμετρικό σχήμα (Σχήμα 6.1).

6.2 Οι Προτάσεις του Βιβλίου β′

Παραλείπουμε την Πρόταση β′ 1, που είναι μία γενίκευση των Προτάσεων β′ 2/3 και μάλλον παρεμβλήθηκε στους μετα-ευκλείδειους χρόνους. Σημειώνουμε μόνο ότι το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί ως αυτό που σήμερα καλούμε επιμεριστική ιδιότητα:

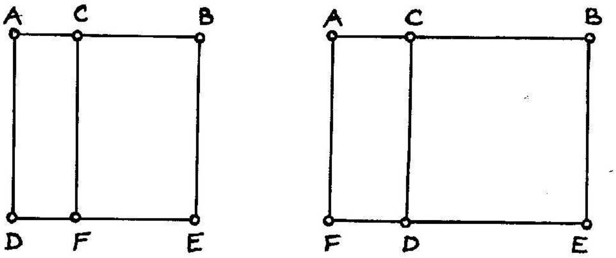
$$a(b+c) = ab + ac.$$

Για τις Προτάσεις β′ 2/3 το παρακάτω Σχήμα 6.2 και η επεξήγηση αρκεί:[3] Ας σημειώσουμε μόνο ότι η Πρόταση β′ 2 αναφέρεται σε τετράγωνα, ενώ η β′ 3 σε ορθογώνια.

$$\begin{aligned} &\beta'\, 2.\ AE = DC + FB, \quad \text{αλγεβρικά, } a^2 = ab + ac \text{ αν } a = b + c,\\ &\beta'\, 3.\ AE = AD + BD, \quad \text{αλγεβρικά, } (a+b)a = ab + a^2. \end{aligned}$$

τον πόλο, τον γνώμονα και τις δώδεκα ώρες τις μέρας από τους Βαβυλωνίους. Σύμφωνα δε με το λεξικό του Σουίδα, ο Αναξίμανδρος (611-545 π.Χ.) ήταν αυτός πρωτοχρησιμοποίησε τον γνώμονα.

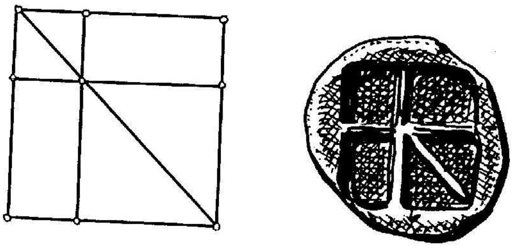
[3] Ακολουθούμε τον Ευκλείδη συμβολίζοντας τετράγωνα, ορθογώνια και παραλληλόγραμμα, με τις διαγωνίους τους.



Σχήμα 6.2: Προτάσεις β′ 2/3.

Πρόταση β′ 4.

Εάν μία ευθεία γραμμή τμηθεί τυχαία, τότε το τετράγωνο όλης της ευθείας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των τμημάτων της ευθείας και δύο φορές του περιεχομένου ορθογωνίου.



Σχήμα 6.3: Πρόταση β′ 4.

Πρόκειται βεβαίως για τον γνωστό διωνυμικό τύπο

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Μία ημι-αλγεβρική απόδειξη που βασίζεται στις προηγούμενες προτάσεις του Βιβλίου β′ είναι η εξής:

Απόδειξη της β′ 4.

Από την Πρόταση β′ 2,

$$(a+b)^2 = (a+b)b + a(a+b).$$

Αλλά από την Πρόταση β′ 3 έχουμε επίσης

$$(a+b)a = a^2 + ba, \quad (a+b)b = ab + b^2.$$

Άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

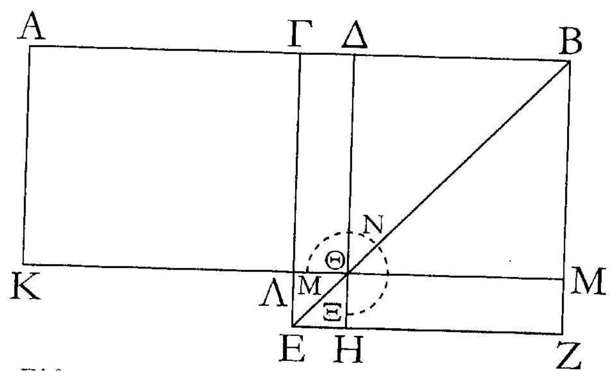
Ο Ευκλείδης βέβαια το βλέπει καθαρά γεωμετρικά.[4] Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη, αλλά μάλλον σχοινοτενής.[5]

Περιέργως πως, η Πρόταση β′ 4 αναπαρίσταται στην Ελληνική Νομισματική. Παρατηρείστε στο Σχήμα 6.3 το νόμισμα της Αίγινας του 400 π.Χ. περίπου.

Πρόταση β′ 5.

Εάν ευθεία γραμμή τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα, τότε το άθροισμα του περιεχόμενου στα άνισα τμήματα της όλης ευθείας ορθογώνιο και του τετραγώνου της διαφοράς των ανίσων και των ίσων τμημάτων, είναι ίσο με το τετράγωνο του μισού της ευθείας.

Διότι αν η ευθεία ΑΒ τμηθεί σε ίσα τμήματα στο Γ και σε άνισα τμήματα στο Δ, λέγω ότι το άθροισμα του ορθογωνίου που περιέχεται στις ΑΔ, ΔΒ και του τετραγώνου της ΓΔ, είναι ίσο με το τετράγωνο της ΓΒ.

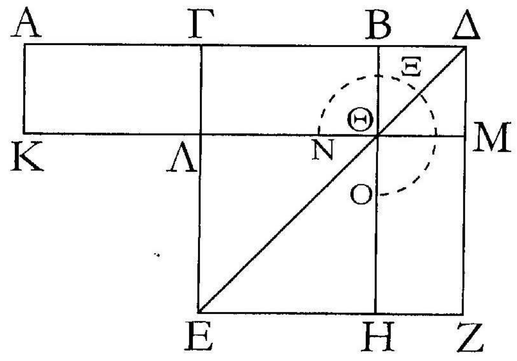


Σχήμα 6.4: Πρόταση β′ 5: $ab + [(a+b)/2 - b]^2 = [(a+b)/2]^2$.

Για την 'δίδυμη' της β′ 5 Πρόταση β′ 6, παραθέτουμε μόνο το σχήμα (Σχήμα 6.5). Η αλήθεια της Πρότασης φαίνεται ξεκάθαρα.

[4]Αν και, εφαρμόζει την Πρόταση β′ 6 στους αριθμούς στο Λήμμα της Πρότασης ι′ 28.

[5]Οι παλαιότερες εκδόσεις των Στοιχείων περιείχαν και μία άλλη απόδειξη της Πρότασης β′ 4 που αποδίδεται στον Θέωνα τον Αλεξανδρέα. Η απόδειξη αυτή διαφέρει ελάχιστα από την υπάρχουσα.



Σχήμα 6.5: Πρόταση β′ 6: $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$.

Σχόλια στις Προτάσεις β′ 5/6.

Ας παρατηρήσουμε τα σχήματα 6.4 και 6.5 και ας θέσουμε ΑΒ=b και ΔΒ=x. Όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, οι Προτάσεις β′ 5/6 μπορούν να μεταφραστούν εύκολα στις εξισώσεις

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}-x\right)^2+x(b-x),$$
$$(b+x)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2,$$

δηλαδή στις εξισώσεις

$$x^2-bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}-x\right)^2,$$
$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2,$$

αντίστοιχα.[6] Δηλαδή, οι Προτάσεις 5/6 μας δείχνουν στην κυριολεξία πως συμπληρώνεται το τετράγωνο. Ο Ευκλείδης θεωρεί δύο ξεχωριστές περιπτώσεις αφού δεν υπάρχουν αρνητικά μήκη ή εμβαδά. Η συμπλήρωση του τετραγώνου είναι το πρώτο βήμα για τη λύση της τετραγωνικής εξίσωσης, όπως όλοι

[6]Παρατηρείστε ότι οι όροι $x(b-x)$ και $(b+x)x$ δίδουν το αντίστοιχο εμβαδόν του γνώμονα.

θυμόμαστε από το σχολείο. Ας δούμε τα βήματα:

$$x^2 + bx + c = 0,$$
$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Στο επόμενο βήμα, πρέπει να εξαχθεί η τετραγωνική ρίζα του $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Αυτό εξαρτάται από το μέγεθος και το πρόσημο του c και άρα απαιτεί ειδική θεώρηση από τον Ευκλείδη, ο οποίος, αν και έχει το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα χέρια του, αναβάλλει αυτό το βήμα μέχρι την Πρόταση δ′ 25, όπου και πάλι, το βήμα αυτό είναι κάπως κρυμμένο. Άρα λοιπόν, δεν μπορούμε να μιλάμε για λύσεις της τετραγωνικής εξίσωσης, όσον αφορά στις Προτάσεις β′ 5/6, αλλά μάλλον για επιβεβαιώσεις γνωστών ήδη λύσεων.

Η Πρόταση β′ 5 επιδέχεται και άλλης ερμηνείας. Θέτουμε ΑΓ=x και ΓΔ=y. Τότε ΑΔ= $x + y$ και ΒΔ=$x - y$ και παρατηρίστε ότι η σχέση της Πρότασης β′ 5 είναι η

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$$

Οι επόμενες Προτάσεις β′ 7-10 είναι παραλλαγές στα θέματα των β′ 4–6. Κατόπιν, ο Ευκλείδης στρέφεται σε τρία διαφορετικά ζητήματα· η Πρόταση β′ 11 είναι βασική για την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου στο Βιβλίο δ′, οι Προτάσεις β′ 12,13 γενικεύουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τέλος η Πρόταση β′ 14 είναι η κορωνίδα της ακολουθίας, καθώς ασχολείται με τον τετραγωνισμό πολυγώνων.

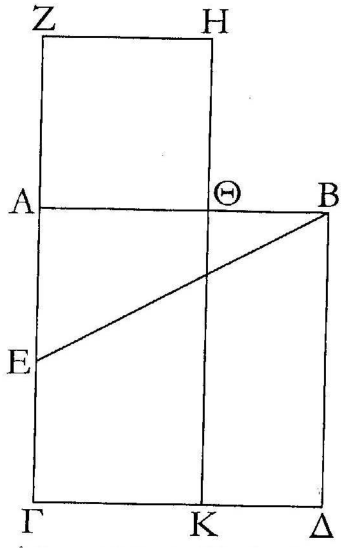
Πρόταση β′ 11.

Να τμηθεί δοθείσα ευθεία ώστε το περιεχόμενο από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα ορθογώνιο να είναι ίσο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος.

Έστω ΑΒ η δοθείσα ευθεία· πρέπει να τμηθεί η ΑΒ ώστε το περιεχόμενο από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα ορθογώνιο να είναι ίσο με το τετράγωνο του λοιπού τμήματος.

Απόδειξη.

Δίνουμε την απόδειξη με σχόλια. Ζητούμε σημείο Θ επάνω στην ΑΒ τέτοιο



Σχήμα 6.6: Πρόταση β′ 11.

ώστε ΑΒ·ΘΒ=ΑΘ·ΑΘ.[7] Στην αρχή ο Ευκλείδης περιγράφει την κατασκευή του σχήματος:

[Διότι ας γραφεί το από της ΑΒ τετράγωνο το ΑΒΓΔ,[8]

και ας διχοτομηθεί η ΑΓ στο σημείο Ε,[9] και ας συνδεθεί η ΒΕ·

και ας διάγεται η η ΓΑ από Ζ το οποίο είναι τέτοιο ώστε η ΒΕ είναι ίση με την ΕΖ,[10]

και ας γραφεί από την ΑΖ το τετράγωνο ΖΘ,[11] και ας διάγεται η ΗΘ από το Κ.

Λέγω ότι η ΑΒ τέμνεται στο Θ, ώστε το ορθογώνιο που περιέχουν οι ΑΒ, ΒΘ γίνεται ίσο με το τετράγωνο ΑΘ.]

Με την βοήθεια της Πρότασης β′ 6 και του Πυθαγορείου Θεωρήματος α′ 47 δείχνει ότι το σημείο Θ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες:

[7] Το σημείο Θ χωρίζει το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή είναι η *χρυσή τομή* του ΑΒ. Για την χρυσή τομή και τις τεράστιες επιπτώσεις της στα μαθηματικά, αλλά και σε άλλες επιστήμες, δείτε λ.χ. την ιστοσελίδα http://el.wikipedia.org/wiki/Χρυσή_τομή.

[8] Πρόταση α′ 46.

[9] Πρόταση α′ 10.

[10] Πρόταση α′ 3.

[11] Πάλι λόγω της Πρότασης α′ 46.

Στην ΓΖ έχουμε την κατάσταση της β′ 6:

[Διότι επειδή η ευθεία ΑΓ διχοτομείται στο Ε, και προστίθεται σε αυτή η ΖΑ, άρα το περιεχόμενο από τις ΓΖ, ΖΑ ορθογώνιο μαζί με το τετράγωνο ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο ΕΖ.[12]]

Κατόπιν, χρησιμοποιεί την υπόθεση και το Π.Θ:

[Η ΕΖ είναι ίση με την ΕΒ, άρα το ορθογώνιο που περιέχουν οι ΓΖ, ΖΑ μαζι με το τετράγωνο της ΑΕ, είναι ίσο με το ΄τετράγωνο της ΕΒ. Αλλά το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ και ΑΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΒ, γιατι είναι ορθή η γωνία στο Α.

Άρα το άθροισμα ορθογωνίου που περιέχουν οι ΓΖ, ΖΑ και του τετραγώνου ΑΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΕ και ΑΒ.]

Αυτό τώρα συνεπάγεται:

[Άρα το άθροισμα του περιεχομένου από τις ΓΖ, ΖΑ ορθογωνίου και του τετραγώνου ΑΕ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΒ, ΑΕ.]

Από δω και πέρα τα πράγματα γίνονται εύκολα:

[Ας αφαιρεθεί το κοινό τετράγωνο της ΑΕ· άρα λοιπόν το περιεχόμενο από τις ΓΖ, ΖΑ ορθογώνιο είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΒ.

Το ΖΚ είναι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΖ,ΖΑ, επειδή η ΑΖ είναι ίση με τη ΖΗ.

Το τετράγωνο ΑΔ είναι το τετράγωνο της ΑΒ. Άρα το ΖΚ είναι ίσο με το ΑΔ και ας αφαιρεθεί το κοινό ΑΚ.

Άρα το τετράγωνο ΖΘ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΘΔ. Και το μεν ΘΔ είναι αυτο που περιέχεται στις ΑΒ, ΒΘ, αφού η ΑΒ είναι ίση με την ΒΔ· το δε ΖΘ είναι το τετράγωνο της ΑΘ.

Άρα το περιεχόμενο από τις ΑΒ, ΒΘ ορθογώνιο είναι ίσο με το τετράγωνο της ΑΘ.] □

Σχόλιο

Ως συνήθως, ο Ευκλείδης δεν μας λέγει πως έφτασε στην κατασκευή του, αλλά μόνο βεβαιώνει την λύση του. (Δείτε και τα σχόλια στις β′ 5/6). Αποκαλύπτει το μυστικό του πολύ αργότερα, στην στ′ 30.

[12]Πρόταση β′ 6.

Έστω b το δοθέν τμήμα και x το μεγαλύτερο κομμάτι του. Έχουμε τη συνθήκη

$$b(b-x) = x^2,$$
$$b^2 = x^2 + bx.$$

Με την β′ 6, τούτο μετασχηματίζεται στην

$$b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

και το Π.Θ. μας δίδει ένα τμήμα ΕΒ=d τέτοιο ώστε

$$d^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

άρα

$$x = d - \frac{b}{2}, \text{ όπως κατασκευάστηκε.}$$

Στην στ′ 30 αυτή η επαγωγή είναι ενσωματωμένη στην γενική διαδικασία της λύσης τετραγωνικών προβλημάτων, στ′ 30. Τούτη η τελευταία πρόταση εξηγεί το πως βρίσκουμε ένα σημείο Δ (εδώ Ζ) υπό τις προϋποθέσεις της β′ 6. Ουσιαστικά, αυτό γίνεται όπως παραπάνω με την βοήθεια της α′ 47 ή, σε γενικότερες καταστάσεις, με την γενίκευσή της στ′ 25.

Γιατί όμως η β′ 11 είναι ενδιαφέρουσα; Η Πρόταση ιγ′ 8 είναι περί του κανονικού πενταγώνου με πλευρά x και διαγώνιο b. Αποδεικνύεται εκεί ότι

$$b : x = x : (b - x)$$

δηλαδή ισοδύναμα, σύμφωνα με την Πρόταση στ′ 16

$$b(b-x) = x^2.$$

Να λοιπόν το ουσιαστικό νόημα της β′ 11: να προσδιορίσουμε την πλευρά x ενός κανονικού πενταγώνου όταν δίδεται η διαγώνιος b. Ο Ευκλείδης το αποσιωπά αυτό και στο Βιβλίο β′ αλλά και στο Βιβλίο δ′, όπου κατασκευάζει το πεντάγωνο.[13]

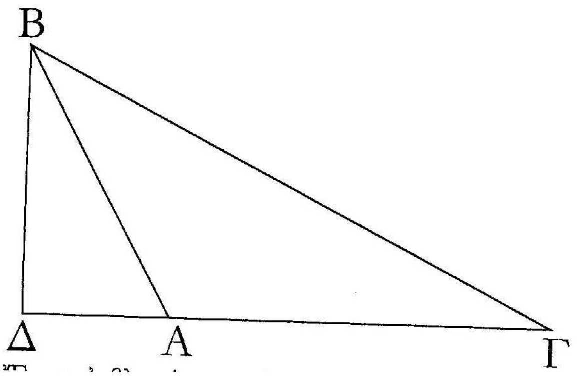
[13] Η μαθηματική αλήθεια δεν εξαρτάται από τα κίνητρα. Ο Ευκλείδης το δίδαξε αυτό σε πολλές γενεές μαθηματικών. Το να διδάσκεις σε μία τάξη είναι τελείως διαφορετικό, βέβαια. Οι μαθητές έχουν κάθε δικαίωμα να καταλαβαίνουν το πως τα ειδικότερα βήματα κατευθύνονται στο συγκεκριμένο στόχο.

Οι Προτάσεις β′ 12/13 είναι πολύ σημαντικές και σήμερα αφού δεν είναι τίποτε άλλο από τον Νόμο των Συνημιτόνων. Μολαταύτα στα Στοιχεία, παρατίθενται και δεν αναφέρονται ούτε εφαρμόζονται ποτέ ξανά.

Πρόταση β′ 12.

Στα αμβλυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την αμβλεία γωνία κατά δύο φορές το ορθογώνιο που περιέχεται από μία των πλευρών γύρω από την αμβλεία γωνία, στην οποία φέρεται η κάθετος, και από την πλευρά που λαμβάνεται εξωτερικά του τριγώνου από την κάθετο προς την αμβλεία γωνία.

Έστω αμβλυγώνιο τρίγωνο το ΑΒΓ με αμβλεία γωνία την ΒΑΓ, και ας αχθεί από το σημείο Β η κάθετος ΒΔ επί την ΓΑ.[14] *Λέγω, ότι το τετράγωνο της ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των ΒΑ, ΑΓ κατά δύο φορές το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΓΑ, ΑΔ.*



Σχήμα 6.7: Πρόταση β′ 12. Νόμος συνημιτόνων για αμβλυγώνια τρίγωνα.

Απόδειξη.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα α′ 47 είναι

$$\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{B\Delta}^2+\Delta\Gamma^2,$$

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Delta}^2+\Delta\mathrm{A}^2.$$

Από το διωνυμικό θεώρημα β′ 4,

$$\Delta\Gamma^2=\Delta\mathrm{A}^2+\mathrm{A\Gamma}^2+2\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{A\Gamma},$$

[14] Πρόταση α′ 12.

απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

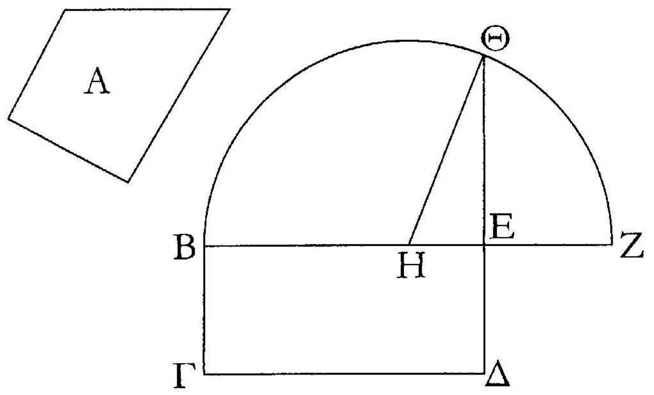
Στη σύγχρονη γλώσσα, αν ΑΒ=γ, ΒΓ=α, ΓΑ=β, και ∠ΒΑΓ=Α, είναι ΔΑ=cosA. Επειδή η Α είναι αμβλεία, το συνημίτονο είναι αρνητικό και παίρνουμε το αποτέλεσμα.

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\text{-}2\beta\gamma\cos A.$$ [15]

Πρόταση β΄ 14.

Να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.

Έστω Α το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Ζητείται να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσο με το Α.[16]



Σχήμα 6.8: Πρόταση β΄ 14. Τετραγωνισμός τετραπλεύρου.

Απόδειξη.

Κατασκευάζεται ορθογώνιο με πλευρές ΕΔ και ΒΕ, ίσου περιεχομένου με το Α.[17]

Εάν είναι τετράγωνο, έχουμε τελειώσει. Ειδάλλως, έστω ότι η ΒΕ είναι μεγαλύτερη από την ΕΔ.

---

[15] Ο Νόμος των Συνημιτόνων θα ανεπτύσσετο σε πλήρη δύναμη πολύ καιρό μετά τον Ευκλείδη.

[16] Κατά τον Αριστοτέλη στα μετά τα Φυσικά, ο τετραγωνισμός ορίζεται καλύτερα ως η εύρεση του μέσου ανάλογου, παρά του τετραγώνου ίσου περιεχομένου. Και αυτό διότι, το πρώτο αναφέρετσι στην αιτία ενώ το ύστερο στο συμπέρασμα και μόνο.

[17] Πρόταση α΄ 45.

Επεκτείνουμε την ΒΕ στο Ζ έτσι ώστε ΕΖ=ΕΔ. Διχοτομούμε την ΒΖ στο Η, γράφουμε το ημικύκλιο ΒΘΖ κέντρου Η. Επεκτείνουμε την ΒΕ στο Θ.

Ισχυριζόμαστε ότι ΒΕ·ΕΔ=ΕΘ^2.

Πράγματι:

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EZ}+\mathrm{EH}^2=\mathrm{HZ}^2.$$ [18]

Η ΗΖ είναι ίση με την ΗΘ από κατασκευή. Άρα,

$$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EZ}+\mathrm{EH}^2=\mathrm{H}\Theta^2=\mathrm{EH}^2+\mathrm{E}\Theta^2.$$ [19]

Αφαιρώντας το ΕΗ^2 και από τα δύο σκέλη, και παρατηρώντας ότι ΕΖ=ΕΗ προκύπτει το ζητούμενο. □

Το παραπάνω θεώρημα έχει την δική του αξία. Είναι ο σκοπός της θεωρίας που αναπτύχθηκε στις α′ 35-45 μέσω της α′ 47 και β′ 5 και κορυφώθηκε στην β′ 14. Δεν εξυπηρετεί κανένα άλλο σκοπό από το να μεταδώσει μία συγκεκριμένη γνώση ή αλλιώς, να απαντήσει σε μία σημαντική ερώτηση της θεωρίας, αλλά και της πρακτικής συνάμα.

[18] Πρόταση β′ 5.

[19] Πρόταση α′ 47.

Κεφάλαιο 7

Πηγές των μαθηματικών IV: Τετραγωνίζοντας τον Κύκλο

Το Θεώρημα β′ 14 λύνει ένα σημαντικό πρόβλημα: Κάθε πολυγωνικό σχήμα μπορεί να τετραγωνιστεί. Όπως συνήθως στα μαθηματικά, η λύση ενός προβλήματος δεν είναι παρά η αρχή ενός άλλου. Το επόμενο σημαντικό σχήμα είναι ο κύκλος. Πως τον τετραγωνίζουμε; Ο Πρόκλος υποστηρίζει, ότι η Πρόταση α′ 45, που είναι το τελευταίο βήμα πρίν την β′ 14, ήταν αυτή που οδήγησε στο πρόβλημα.

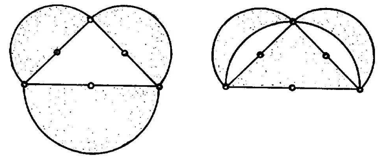
Το πρόβλημα του τετραγωνισμού ήταν τόσο εξέχον στους κλασσικούς χρόνους[1] και πασίγνωστο στους κύκλους της διανόησης και όχι μόνο, που ακόμη και ο Αριστοφάνης κάνει μία αναφορά σε αυτό στους *Όρνιθές* του (414 π.Χ.).[2] Λέγεται ότι ο Αναξαγόρας ($\sim$ 500-430 π.Χ.) προσπάθησε να τετραγωνίσει τον κύκλο όντας έγκλειστος στη φυλακή. Περίπου την ίδια χρονική περίοδο, ο Ιπποκράτης ο Χίος τετραγώνισε τους *μηνίσκους*.[3]

[1] Ήταν ένα από τα λεγόμενα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Τα άλλα δύο ήταν ο διπλασιασμός του κύβου (το *Δήλιον πρόβλημα*) και η τρχοτόμηση της γωνίας.

[2] Λέγει ο Μέτων, ο αυτοδιορισμένος πολιτικός επίτροπος της Νεφελοκοκκυγίας:

Ορθῴ μετρήσω κανόνι προστιθείς,
ο κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος καν μέσω
αγορά, φέρουσαι δ′ ώσιν εις αυτήν οδοί
ορθαί προς αυτό το μέσον, ώσπερ δ′ αστέρος
αυτού κυκλοτερούς όντος ορθαί πανταχή
ακτίνες απολάμπωσιν.

[3] Μηνίσκος =μικρός μήνας. Αν εννοήσουμε *σεληνιακό* μήνα, τότε καταλαβαίνουμε την



Σχήμα 7.1: Τετραγωνισμός του μηνίσκου.

Ο Ιπποκράτης βασίστηκε στην εξής αρχή:

Ο λόγος των εμβαδών των τμημάτων ενός κύκλου είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των βάσεων των τμημάτων.

Κατόπιν, (δείτε και το σχήμα 7.1) σε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο κατασκεύασε ημικύκλια με βάσεις τις αντίστοιχες πλευρές. Χρησιμοποιώντας το Π.Θ. και την πιο πάνω αρχή, έδειξε ότι το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα είναι διπλάσιο του εμβαδού του καθενός από τα ημικύκλια με διάμετρους τις (ίσες) κάθετες πλευρές. Ύστερα, με εντυπωσιακό για την εποχή του τρόπο, ανακλά το ημικύκλιο της υποτείνουσας επάνω σε αυτήν και παρατηρεί ότι το άθροισμα του εμβαδού των δύο μηνίσκων και του εμβαδού του μεγάλου ημικυκλίου είναι ίσο με το άθροισμα του εμβαδού των δύο μικρών ημικυκλίων και του εμβαδού του τριγώνου. Λόγω όμως του ότι το εμβαδόν του μεγαλύτερου ημικυκλίου δείχθηκε ίσο με δύο φορές το εμβαδό του καθενός μικρού ημικυκλίου, προκύπτει ότι το διπλάσιο του εμβαδού του μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου! Με άλλα λόγια ο μηνίσκος είναι το τεράγωνο με πλευρά το μισό της πλευράς του ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου, δηλαδή το μισό της βάσης του.

Η αρχή του Ιπποκράτη αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη στην Πρόταση ιβ′ 2, χρησιμοποιώντας μεθόδους του Ευδόξου. Αν έχουμε δύο κύκλους με εμβαδά E_1, E_2 και ακτίνες r_1, r_2, τότε η ιβ′ 2 μας λέγει ότι

$$E_1 : E_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Άρα, ισοδύναμα

$$E_1 : r_1^2 = E_2 : r_2^2,$$

ονομασία. Οι ασχολούμενοι με τα αθλητικά θα ξέρουν βέβαια ότι ο μηνίσκος είναι σύνδεσμος του γονάτου, στον οποίο έχουν ευπάθεια οι ποδοσφαιριστές. Και αυτός ο μηνίσκος έχει σχήμα σελήνης στη χάση.

που σημαίνει ότι ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς το τετράγωνο της ακτίνας του είναι σταθερός και συμβολίζεται με π. Δηλαδή,

$$E : r^2 = \pi, \quad ή \quad E = \pi r^2.$$

Ο προσδιορισμός του π έγινε στην αρχαιότητα[4] με μεγάλη ακρίβεια απο τον Αρχιμήδη:[5]

$$3.1408 = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} = 3.1429.$$

Κατά τον μαθητή του Πρόκλου Αμμώνιο, που γράφει 900 χρόνια μετά τον Ιπποκράτη, είναι μόνο ο Αρχιμήδης που βρήκε μία ακριβή προσέγγιση του π, ενώ όσοι προσπάθησαν να τον κατασκευάσουν (και άρα να τετραγωνίσουν τον κύκλο) απέτυχαν οικτρά.

Με την σειρά του ο μαθητής του Αμμώνιου Σιμπλίκιος, γράφει το 540 μ.Χ. ότι ο λόγος που το πρόβλημα του τετραγωνισμού είναι διάσημο, δεν είναι μόνο το ότι κανείς δεν τετραγώνισε τον κύκλο, αλλά και το ότι κανείς δεν μπόρεσε να δείξει ότι ο κύκλος *δεν* τετραγωνίζεται.[6]

Ως σχολιαστής του Αριστοτέλη, ο Σιμπλίκιος διαβαζόταν πολύ στον Μεσαίωνα. Αυτό φαίνεται και από το ότι ο Δάντης[7] αφιερώνει στους τελευταίους δώδεκα στίχους της Θείας Κωμωδίας του μία αναφορά στο πρόβλημα:

Σαν τον γεωμέτρη, που βυθίζεται βαθειά στη σκέψη του,
για να μετρήσει τον κύκλο, και δεν μπορεί,
όσο και να σκεφτεί, την κατάλληλη αρχή να βρει.

---

[4] Δείτε και εδώ: http://www.joyofpi.com/

[5] Στο βιβλίο του *Κύκλου Μέτρησις*. Εκεί απέδειξε ότι και η περιφέρεια του κύκλου είναι ίση με $2\pi r$.

[6] Χωρίς την προϋπόθεση της χρησιμοποίησης μόνο κανόνα και διαβήτη, ο κύκλος είχε τετραγωνιστεί από τον Δεινόστρατο, τον αδελφό του μεναίχμου και τον Νικομήδη, γύρω στο 350 και στο 200 π.Χ. αντίστοιχα. Αυτοί χρησιμοποίησαν την καμπύλη του Ιππία του Ηλείου ($\sim$450 π.Χ.), που για αυτό το λόγο ονομάστηκε *τετραγωνίζουσα*, η οποία δεν είναι όμως κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη. Για λεπτομέρειες, δείτε λ.χ. την ιστοσελίδα
http://users.ira.sch.gr/thafounar/Genika/problemGeometry/SquaringTheCircle/Dinostratus/dinostratus.html
Σε πολικές συντεταγμένες, η τετραγωνίζουσα είναι η $r = \theta/\sin\theta$. Γνωστή επίσης ήταν η λύση του Αρχιμήδη, που χρησιμοποίησε την έλικά του, $r = \theta$. Δείτε λ.χ. και την ιστοσελίδα
http://el.wikipedia.org/wiki/Σπείρα_του_Αρχιμήδη

[7] Dante Aligheri (1265-1321). Φλωρεντίνος ποιητής, ο πρώτος που έγραψε ποίηση στη δημώδη γλώσσα και όχι στα κατεστημένα ως τότε, αλλά νεκρά Λατινικά.

Κατά τον δέκατο έβδομο αιώνα, και με τη συστημ,ατικότερη μελέτη των ορίων, είχε ήδη αρχίσει να διαφαίνεται ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ήταν ουσιαστικά πρόβλημα που αφορούσε την ίδια τη φύση των αριθμών. Ο James Gregory διατύπωσε το 1667 την εικασία ότι η μέτρηση του κύκλου χρειάζεται εισαγωγή νέων αριθμών. Ο Leibniz εξεπλάγη όταν διαπίστωσε ότι το π είναι το όριο μίας άπειρης σειράς, αλλά μόνο από την μιγαδική ανάλυση και τον γνωστό τύπο του Euler $e^{2\pi i} = 1$ το π καθιερώθηκε στην κύρια αιχμή των μαθηματικών.

Εκατό χρόνια μετά τον Gregory, ο Lambert έδωσε μία μερική απάντηση στον Σιμπλίκιο, αποδεικνύοντας ότι το π είναι άρρητος. Οι Euler, Legendre διαπίστωσαν γύρω στα 1750 ότι ένας άρρητος μπορεί να είναι ρίζα μιας πολυωνιμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές,[8] μπορεί και να μην είναι. Στην τελευταία περίπτωση, οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται *υπερβατικοί*[9] και ο Legendre είκασε ότι ο π είναι υπερβατικός.

Σύμφωνα με τη Θεωρία του Galois που ανεπτυσσόταν ραγδαία περί τα τέλη του 19ου αιώνα, ένας αριθμός κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν δεν είναι υπερβατικός. Ο Lindemann απέδειξε το 1882 ότι ο π είναι υπερβατικός, και απάντησε οριστικά αρνητικά στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Αυτό βέβαια δεν κατέστη αρκετό για να σταματήσει τη χορεία των περίφημων *τετραγωνιστών* που ακόμη και στις μέρες μας αποτελούν μία αρκετά ισχυρή, αν και τελείως ετερόκλητη ομάδα. Οι 'αποδείξεις ' τους ότι ο κύκλος τετραγωνίζεται κινούνται από τα όρια της γελοιότητας έως της πολύ σοβαρής, αν και καταδικασμένης εκ των προτέρων, προσπάθειας. Στο διαδίκτυο,[10] αλλά όχι μόνο εκεί, μπορεί κανείς να δει τέτοιες αποδείξεις.

[8] Τέτοιοι αριθμοί λέγονται αλγεβρικοί. Λ.χ. ο $\sqrt{2}$ ίναι αλγεβρικός εφόσον είναι ρίζα της $x^2 - 2 = 0$.

[9] Διότι υπερβαίνουν τις δυνάμεις των αλγεβρικών μεθόδων.

[10] Απλώς πληκτρολογείστε 'τετραγωνισμός κύκλου' σε μία οποιαδήποτε μηχανή αναζήτησης, και τα τέρατα θα εμφανιστούν μπροστά σας.

Κεφάλαιο 8

Στοιχείων Βιβλίο γ΄: Περί κύκλου

8.1 Περιεχόμενα του Βιβλίου γ΄

Ορισμοί 1–11

Πρόταση 1	Πως βρίσκουμε το κέντρο του κύκλου.
Προτάσεις 2–15	Α: Χορδές, κύκλοι τεμνόμενοι και εφαπτόμενοι.
Προτάσεις 16–19	Β: Εφαπτόμενες.
Προτάσεις 20–22	Γ1: Γωνίες σε τμήματα κύκλου και τετράπλευρα σε κύκλους.

Προτάσεις 23–29	Γ2: Χορδές, τόξα και γωνίες.
Πρόταση 30	Πως διχοτομείται ένα τόξο.
Προτάσεις 31–34	Γ3: Περισσότερα περί γωνιών σε κύκλους.
Προτάσεις 35–37	Δ: Τομές χορδών, τεμνουσών και εφαπτομένων.

8.2 Ορισμοί του Βιβλίου γ′

Ορισμοί

1. *Ίσοι κύκλοι είναι αυτοί, των οποίων οι διάμετροι είναι ίσες, ή οι αποστάσεις τους από τα κέντρα είναι ίσες.*[1]

Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι η έννοια της ισότητας κύκλων *δεν* είναι ισότητα περιεχομένου όπως στα παραλληλόγραμμα, αλλά μάλλον ισότητα διαμέτρων (ή ακτίνων). Ο Ευκλείδης σκοπεύει να αποδείξει την αρχή του Ιπποκράτη, από την οποία προκύπτει η ισοδυναμία των ορισμών.

2. [Της εφαπτομένης του κύκλου] *Μία ευθεία λέγεται ότι εφάπτεται σε ένα κύκλο, αν όταν συναντά*[2] *τον κύκλο και προεκτείνεται, δεν τέμνει τον κύκλο.*

...

6. *Τμήμα κύκλου είναι το περιεχόμενο από τον κύκλο και μία ευθεία σχήμα.*

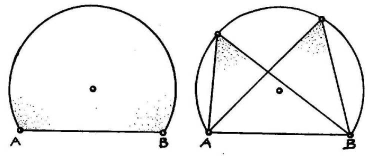
---

[1] Κατά πολλούς όπως λ.χ οι Tartaglia, Borelli, Playfair τούτος ο ορισμός έπρεπε να είναι αξίωμα. Κατ′ άλλους, όπως ο Simson, είναι δυνατόν να αποδειχθεί ως πρόταση χρησιμοποιώντας φερ′ ειπείν την εναπόθεση, αλλά ο Ευκλείδης το αποφεύγει αυτό όπου μπορεί. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ορισμός της ακτίνας, οι Αρχαίοι δεν χρησιμοποιούσαν αυτόν τον όρο. Έτσι ακτίνα εδώ είναι η απόσταση από το κέντρο.

[2] *άπτεται* στο αρχαίο κείμενο. Ας παρατηρήσουμε τη διαφορά του άπτεται=συναντά και εφάπτεται.

7. **Γωνία τμήματος**[3] *είναι η περιεχόμενη από κάποια ευθεία και περιφέρεια κύκλου.*

8. **Γωνία σε τμήμα**[4] *είναι η γωνία που περιέχεται στα συνδεδεμένα τμήματα, όταν κάποιο σημείο ληφθεί επί της περιφέρειας του τμήματος, και οι ευθείες συνδεθούν από αυτό προς τα άκρα της ευθείας, η οποία είναι η βάση του τμήματος.*[5]



Σχήμα 8.1: Γωνία τμήματος (αριστερά) και γωνία σε τμήμα (δεξιά).

...

11. *Όμοια τμήματα κύκλων είναι τα δεχόμενα ίσες γωνίες, η σε αυτά οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

8.3 Βιβλίο γ′, Μέρος Α: Χορδές κύκλων, κύκλοι τεμνόμενοι και εφαπτόμενοι

Πρίν ξεκινήσει με το Μέρος Α, ο Ευκλείδης παραθέτει το πρόβλημα γ′ 1: πως βρίσκεται το κέντρο ενός κύκλου. Τούτο φαίνεται παράξενο, αφού η ύπαρξη του κέντρου εξασφαλίζεται στους Ορισμούς α′ 15, 16 και είναι εμφανές ότι η κατασκευή του κύκλου με διαβήτη εξασφαλίζει τον προσδιορισμό του κέντρου. Μάλλον η παράθεση αυτής της πρότασης απηχεί παλιότερες τεχνικές. Ας φανταστούμε έναν αρχαίο γεωμέτρη (ή τεχνίτη) να γράφει ένα κύκλο στο χώμα χρησιμοποιώντας τη βάση ενός αγγείου. Που είναι το κέντρο; Η απάντηση είναι εύκολη. Ο Ευκλείδης παίρνει μία τυχαία χορδή και την μεσοκάθετό της.[6] Κατόπιν αποδεικνύει ότι το μέσον της μεσοκαθέτου είναι το κέντρο του κύκλου,

[3] Ο ορισμός της γωνίας σε τμήμα απηχεί την παράδοση της μεικτής γωνίας. Σήμερα είναι παντελώς ξεπερασμένος.

[4] Είναι η γνωστή σε όλους εγγεγραμμένη γωνία.

[5] Δηλαδή, η χορδή.

[6] Προτάσεις α′ 9 και 11. Εδώ όμως υπάρχει ένα χάσμα: από πουθενά δεν δικαιολογείται ότι η μεσοκάθετος θα τέμνει τον κύκλο σε ακριβώς δύο σημεία! Τούτο οδήγησε τον De

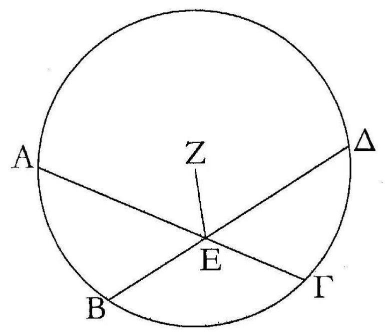
με την απαγωγή σε άτοπο. Αν το κέντρο ήταν κάποιο άλλο σημείο εντός του κύκλου, το ενώνει με τα άκρα της χορδής και το μέσον της και αποδεικνύει ότι η εξωτερική γωνία του ενός σχηματιζόμενου τριγώνου είναι ίση με την εσωτερική του άλλου, το οποίο είναι αδύνατο.

Στην Πρόταση γ′ 2 αποδεικνύεται ότι η χορδή ενός κύκλου ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου, ενώ στην Πρόταση γ′ 3 αποδεικνύεται ότι μία διάμετρος διχοτομεί μία χορδή αν και μόνο αν είναι κάθετη σε αυτήν.

Πρόταση γ′ 4.

Εάν σε ένα κύκλο δύο ευθείες που δεν περνούν από το κέντρο τέμνονται μεταξύ τους, τότε δεν διχοτομούνται.

Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ, και μέσα σ′ αυτόν δύο ευθείες οι ΑΓ, ΒΔ που δεν περνούν από το κέντρο και τέμνονται μεταξύ τους στο Ε· λέγω, ότι δεν διχοτομούνται.



Σχήμα 8.2: Πρόταση γ′ 4.

Απόδειξη.

Διότι, έστω ότι είναι δυνατόν να διχοτομηθούν ώστε η ΑΕ να είναι ίση με την ΕΓ, και η ΒΕ με την ΕΔ· ας έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου, έστω το Ζ,[7] και ας συνδεθεί η ΖΕ.

Morgan να δώσει μία εναλλακτική μέθοδο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι *η ευθεία που διχοτομεί κάθετα μία χορδή περιέχει το κέντρο του κύκλου.* Παρ′ όλα αυτά, και αυτή η μέθοδος έχει προβλήματα· για λεπτομέρειες, κοιτάξτε τον Heath, vol. II, σελ. 7–8.

[7] Πρόταση γ′ 1.

Επειδή λοιπόν κάποια ευθεία ΖΕ που περνά από το κέντρο διχοτομεί κάποια ΑΓ, την τέμνει και καθέτως,[8] είναι άρα ορθή η ΖΕΑ.

Πάλι, επειδή κάποια ευθεία ΖΕ διχοτομεί κάποια ΒΔ, την τέμνει και καθέτως, άρα είναι ορθή η ΖΕΒ. Δείχθηκε ότι και η ΖΕΑ είναι ορθή, άρα η ΖΕΑ είναι ίση με την ΖΕΒ, η μικρότερη με την μεγαλύτερη· το οποίο είναι αδύνατο.

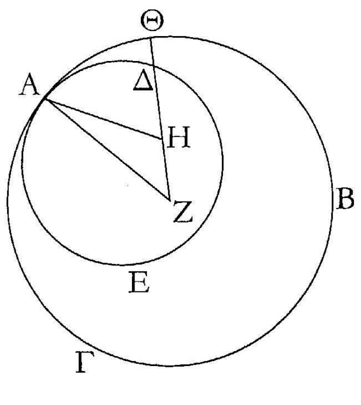
Άρα, εαν σε ένα κύκλο δύο ευθείες που δεν περνούν από το κέντρο τέμνονται μεταξύ τους, τότε δεν διχοτομούνται, Ο.Ε.Δ. □

Οι Προτάσεις γ′ 11/12 είναι 'δίδυμες '. Θα δείξουμε μόνο την Πρόταση γ′ 11 που μιλά για εσωτερικά εφαπτόμενους κύκλους· η απόδειξη της γ′ 12 που μιλά για εξωτερικά εφαπτόμενους κύκλους είναι παραπλήσια.

Πρόταση γ′ 11.

Εάν δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους εσωτερικά, και ληφθούν τα κέντρα τους, τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους, προεκτεινόμενη θα περάσει από το σημείο επαφής των κύκλων.

Διότι ας είναι δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ που εφάπτονται μεταξύ τους εσωτερικά στο σημείο Α, και ας ληφθεί το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓ και το κέντρο Η του κύκλου ΑΔΕ.[9] *Λέγω ότι η ευθεία που συνδέει τα Η και Ζ προεκτεινόμενη περνά από το Α.*



Σχήμα 8.3: Πρόταση γ′ 11.

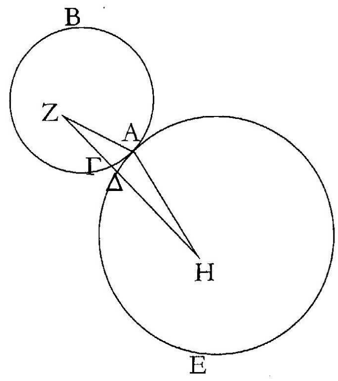
Απόδειξη.

[8]Πρόταση γ′ 3.
[9]Πρόταση γ′ 1.

Διότι εάν δεν είναι δυνατόν, ας εμπέσει όπως η ΖΗΘ, και ας συνδεθούν οι ΑΖ, ΑΗ.

Επειδή λοιπόν το άθροισμα των ΑΗ, ΗΖ είναι μεγαλύτερο από την ΖΑ, δηλαδή και από την ΖΘ,[10] ας αφαιρεθεί η κοινή ΖΗ. Άρα η λοιπή ΑΗ είναι μεγαλύτερη της λοιπής ΗΘ. Η ΑΗ είναι ίση με την ΗΔ, άρα και η ΗΔ είναι μεγαλύτερη από την ΗΘ, δηλαδή η μικρότερη είναι μεγαλύτερη από την μεγαλύτερη, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα η από τα Ζ και Η συνδεδεμένη ευθεία δεν θα περάσει έξωτερικά (από τον ένα κύκλο, αλλά εσωτερικά του άλλου)· άρα θα περάσει από το κοινό σημείο Α.

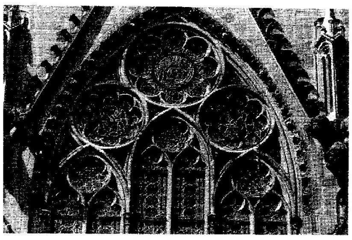
Άρα, εάν δύο κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους εσωτερικά, και ληφθούν τα κέντρα τους, τότε η ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους, προεκτεινόμενη θα περάσει από το σημείο επαφής των κύκλων, Ο.Ε.Δ. □



Σχήμα 8.4: Πρόταση γ΄ 12.

Οι Προτάσεις γ΄ 11/12 είχαν αναρίθμητες εφαρμογές στην αρχιτεκτονική του Μεσαίωνα, και είναι ουσιαστικό συστατικό του λεγόμενου Γοτθικού ρυθμού. (Σχήμα 8.5)

[10]Πρόταση α΄ 20.



Σχήμα 8.5: Εφαρμογές των Προτάσεων γ′ 11/12 στην μεσαιωνική αρχιτεκτονική: Η αψίδα της Ritterstiftskirche στο Wimpfen της Γερμανίας, 1280.

Σχόλια στις Προτάσεις γ′ 11/12: Σχετική θέση κύκλων

Είναι γενικά παραδεκτό από τους μελετητές των Στοιχείων, ότι οι αποδείξεις των Προτάσεων γ′ 11/12 είναι αρκετά προβληματικές.[11] Η σημερινή πρακτική, που αντικαθιστά αυτές τις Προτάσεις, αλλά εξακολουθεί να βασίζεται στα προηγούμενα Ευκλείδεια θεωρήματα, συνδέει τον αριθμό, την φύση και την θέση των κοινών σημείων δύο κύκλων, με την σχέση που έχει η απόσταση των κέντρων τους με το μήκος των ακτίνων τους. [12]

Συνολικά, οι Προτάσεις γ′ 11/12 αντικαθίστανται από τις επόμενες:[13]

1. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι εξωτερικοί ο ένας προς τον άλλον.*

2. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο άνισων κύκλων είναι μικρότερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και ο μικρότερος κύκλος κείται ολόκληρος εσωτερικά του μεγαλύτερου.*

3. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και μόνο, το οποίο κείται στην διάκεντρο. Οι κύκλοι είναι εξωτερικοί ο ένας προς τον άλλον.*

4. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο άνισων κύκλων είναι ίση με τη διαφορά*

[11] Δείτε λ.χ. τον Heath, Vol. II, σελ. 24–32.

[12] Οι ρίζες αυτής της μεθόδου βρίσκονται στους Veronese, Legendre και άλλους.

[13] Για τις αποδείξεις, κοιτάξτε τον Heath, Vol. II, σελ. 30–32, ή τα βιβλία της Γεωμετρίας του Λυκείου.

των ακτίνων τους, τότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και μόνο, το οποίο κείται στην διάκεντρο. Ο μικρότερος κύκλος κείται εσωτερικά του μεγαλύτερου.

5. *Εάν η απόσταση των κέντρων δύο κύκλων είναι μικρότερη από το άθροισμα και μεγαλύτερη από τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε έχουν δύο κοινά σημεία που βρίσκονται συμμετρικά ως προς τη διάκεντρο, αλλά δεν κείνται σ' αυτήν.*

8.4 Βιβλίο γ', Μέρος Β: Εφαπτόμενες

Οι τέσσερις προτάσεις αυτής της παραγράφου είναι θεμελιώδεις για την στοιχειώδη γεωμετρία, διότι μετασχηματίζουν την διαισθητική έννοια της εφαπτομένης ως 'μίας γραμμής που ακουμπά τον κύκλο' σε ένα εύχρηστο εργαλείο, με το να δώσουν μία απλή κατασκευή της εφαπτόμενης: Η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην ακτίνα που άγεται από το κέντρο προς στο σημείο επαφής.

Πρόταση γ' 16

Η ευθεία που φέρεται κάθετα από το άκρο της διαμέτρου ενός κύκλου, θα πέσει εκτός του κύκλου. Και στον τόπο μεταξύ της ευθείας και της περιφέρειας δεν μπορεί να παρεμβληθεί[14] *άλλη ευθεία. Και η μεν γωνία του ημικυκλίου είναι μεγαλύτερη από κάθε οξεία ευθύγραμμη γωνία, η δε λοιπή είναι μικρότερη (από κάθε οξεία ευθύγραμμη γωνία).*[15]

Έστω ο κύκλος ΑΒΓ γύρω από το κέντρο Δ και με διάμετρο ΑΒ· λέγω ότι η αγόμενη από το Α προς την ΑΒ κάθετη θα πέσει εκτός του κύκλου.

Απόδειξη.

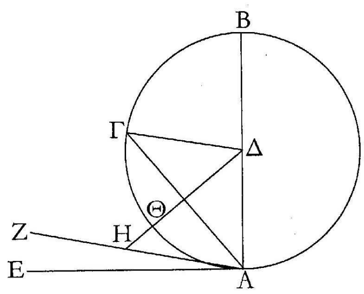
Διότι αν όχι, ας έχει πέσει εντός του κύκλου όπως η ΓΑ και ας έχει συνδεθεί η ΔΓ.

Επειδή η ΔΑ είναι ίση με την ΔΓ, η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΑΔΓ.[16] Η ΔΑΓ είναι ορθή, άρα και η ΑΓΔ. Έτσι στο τρίγωνο ΑΓΔ το άθροισμα των

[14] ου παρεμπεσείται στο αρχαίο κείμενο=δεν μπορεί να πέσει μεταξύ.

[15] Από την αρχαιότητα ήδη, αλλά και στο διάστημα από τον 13ο έως τον 17ο αιώνα, το τελευταίο μέρος της πρότασης έγινε αντικείμενο διαμάχης. Ποιες γωνίες εννοεί ο Ευκλείδης; Κατά τον Πρόκλο, και εδώ απηχείται η παράδοση των *μεικτών* γωνιών, τις οποίες κατά τ' άλλα ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί από ελάχιστα έως καθόλου. Η γωνία που παρεμβάλλεται βέβεια δεν είναι μεικτή. Στν προ-Ευκλείδεια εποχή, ο Δημόκριτος είχε γράψει *περί της διαφορής γνώμης ή περί ψαύσεως κύκλου και σφαίρης*.

[16] Πρόταση α' 5.



Σχήμα 8.6: Πρόταση γ′ 16. Ορισμός της εφαπτομένης.

δύο γωνιών ΔΑΓ, ΑΓΔ είναι ίσο με δύο ορθές, το οποίο είναι αδύνατο.[17] Άρα η αγόμενη από το Α κάθετη στην ΒΑ θα πέσει εντός του κύκλου. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι καμμία τέτοια κάθετη δε θα πέσει επί της περιφέρειας. Άρα θα πέσουν όλες εκτός.

Ας πέσει όπως η ΑΕ. Λέγω ότι στον τόπο μεταξύ της ΑΕ και της περιφέρειας ΓΘΑ δεν παρεμβάλλεται καμμία άλλη ευθεία.

Διότι αν ήταν δυνατόν, ας παρεμβληθεί όπως η ΖΑ και ας αχθεί από το σημείο Δ η ΔΗ κάθετη στην ΖΑ.[18] Και επειδή η ΑΗΔ είναι ορθή και η ΔΑΗ είναι μικρότερη από ορθή, είναι άρα μεγαλύτερη η ΑΔ από τη ΔΗ. [19] Η ΔΑ είναι ίση με τη ΔΘ, άρα η ΔΘ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΗ, η μικρότερη από τη μεγαλύτερη· το οποίο είναι αδύνατο. Άρα στον τόπο μεταξύ της ευθείας ΑΕ και της περιφέρειας δεν παρεμβάλλεται καμμία άλλη ευθεία.

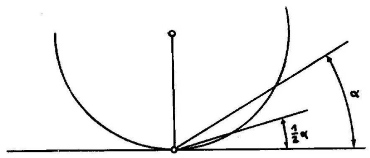
Λέγω ότι και η μεν γωνία του ημικυκλίου που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ είναι μεγαλύτερη από καθε ευθύγραμμη οξεία γωνία, η δε λοιπή που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη οξεία γωνία.

Διότι αν υπάρχει ευθύγραμμη γωνία μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ ή μικρότερη από την γωνία που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ, στον τόπο μεταξύ της περιφέρειας ΓΘΑ και της ευθείας ΑΕ θα παρεμβάλλεται ευθεία, η οποία θα κάνει την γωνία (που περιέχεται στις ευθείες) μεγαλύτερη μεν από την περιεχόμενη από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ, μικρότερη δε από την γωνία

[17] Πρόταση α′ 17.
[18] Πρόταση α′ 12.
[19] Πρόταση α′ 19.

που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ.

Αλλά δεν παρεμβάλλεται. Άρα δεν υπάρχει ευθύγραμμη οξεία γωνία που να είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και την περιφέρεια ΓΘΑ ή μικρότερη από τη γωνία που περιέχεται από την περιφέρεια ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ. □



Σχήμα 8.7: 'Κερατοειδείς γωνίες '.

Σχολιάζοντας την απόδειξη, ας δούμε ξανά την 'κερατοειδή '[20] γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία και τον κύκλο στο σημείο επαφής. Είδαμε ότι ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι η γωνία μεταξύ του κύκλου και της εφαπτομένης είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία.

Τούτο έχει σοβαρές συνέπειες στη διάταξη των γωνιών αναλόγως του μεγέθους τους. Η γωνία α του σχήματος 8.7 μπορεί να διχοτομηθεί (ξανά και ξανά), αλλά ποτέ η προκύπτουσα γωνία δεν θα γίνει μικρότερη από την κερατοειδή. με σύγχρονους όρους, η διάταξη αυτή των γωνιών (των μεικτών συμπεριλαμβανομένων) είναι μη Αρχιμήδεια.[21]

Ο Ευκλείδης ήταν ενήμερος της κατάστασης, διότι σε άλλες περιπτώσεις αποκλείει μη-Αρχιμήδειες διατάξεις. Στον Ορισμό ε′ 4, μιλά για μεγέθη 'ικανά όταν πολλαπλασιαστούν, να ξεπεράσουν το ένα το άλλο', και στην Πρόταση ι′ 1 έχει ακριβώς την κατάσταση της γ′ 16 και δείχνει με τη βοήθεια του ορισμού ε′ 4 ότι τα διαδοχικά μισά, τελικά θα γίνουν μικρότερα από το δεύτερο μέγεθος. Οι Αρχιμήδειες και οι μη-Αρχιμήδειες διατάξεις ήταν γνωστές εκατό περίπου χρόνια πριν τον Αρχιμήδη.

Πόρισμα.

[20] Ο όρος οφείλεται στον Πρόκλο.

[21] Ας είναι x η γωνία μεταξύ του κύκλου και της εφαπτομένης και y μία τυχαία ευθύγραμμη γωνία. Ο Ευκλείδης απλά μας λέγει ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, το $nx < y$ δηλαδή το x είναι *απειροστό* ως προς το y. Ένα σύνολο που έχει μία αλγεβρική δομή και μία διάταξη κατά την οποία υπάρχουν x, y με το x να είναι απειροστό ως προς το y καλείται μη-Αρχιμήδειο.

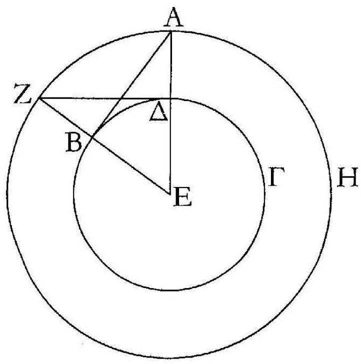
Από τούτο είναι φανερό, ότι η ευθεία που άγεται κάθετα από τα άκρα μιας διαμέτρου κύκλου, εφάπτεται στον κύκλο [και ότι η ευθεία εφάπτεται σε ένα μόνο σημείο, επειδή δείχθηκε ότι η ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία πέφτει εντός του κύκλου.[22]]. Ο.Ε.Δ.

Οι Προτάσεις γ′ 18/19 είναι (μερικά) αντίστροφα του Πορίσματος. Η Πρόταση γ′ 17 είναι ειδικού ενδιαφέροντος λόγω της τυπικής της χρήσης της συμμετρίας σε ένα μαθηματικό επιχείρημα.

Πρόταση γ′ 17.

Να αχθεί εφαπτομένη του κύκλου από δοθέν σημείο του.

Έστω Α το δοθέν σημείο, και ΒΓΔ ο δοθείς κύκλος. Πρέπει να αχθεί από το Α εφαπτομένη του κύκλου ΒΓΔ.



Σχήμα 8.8: Πρόταση γ′ 17.

Απόδειξη.

Διότι ας έχει ληφθεί το κέντρο Ε του κύκλου,[23] και ας έχει συνδεθεί η ΑΕ. Και ας έχει γραφεί ο κύκλος ΑΖΗ με κέντρο Ε και διάστημα[24] ΕΑ. Και ας έχει αχθεί κάθετα στην ΕΑ η ΔΖ από το Δ[25] και ας έχουν συνδεθεί οι ΕΖ, ΑΒ. Λέγω ότι η εφαπτομένη από το Α στον κύκλο ΒΓΔ έχει αχθεί η ΑΒ.

[22] Πρόταση γ′ 2.
[23] Πρόταση γ′ 1.
[24] διάστημα=ακτίνα.
[25] Πρόταση α′ 11.

Διότι επειδή το Ε είναι κέντρο των κύκλων ΒΓΔ, ΑΖΗ, άρα η ΕΑ είναι ίση με την ΕΖ και η ΕΔ με την ΕΒ. Έτσι οι δύο ευθείες ΑΕ, ΕΒ είναι ίσες με τις δύο ευθείες ΖΕ, ΕΔ και περιέχουν κοινή γωνία.[26]. Άρα η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΑΒ, και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΕΒΑ, και οι λοιπές γωνίες είναι ίσες με τις λοιπές γωνίες.[27] Άρα η γωνία ΕΔΖ είναι ίση με τη γωνία ΕΒΑ. Η ΕΔΖ είναι ορθή, άρα ορθή και η ΕΒΑ. Και η ΕΒ είναι από το κέντρο,[28]. Και η ευθεία που άγεται κάθετα από το άκρο της διαμέτρου εφάπτεται στον κύκλο·[29] άρα η ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο ΒΓΔ.

Άρα από το δοθέν σημείο Α του κύκλου ΒΓΔ άχθηκε εφαπτομένη ευθεία η ΑΒ, Ο.Ε.Π. □

Φυσικά, το 'κόσμημα' της απόδειξης είναι ο απροσδόκητος τρόπος με τον οποίο η εφαπτομένη ΔΖ, που στην πρώτη ματιά δεν δείχνει να έχει σχέση με το πρόβλημα, χρησιμοποιείται για να παραχθεί η ζητούμενη εφαπτομένη ΑΒ· τούτο κάνει την κατασκευή κομψοτέχνημα.

Η κατασκευή δείχνει επίσης ότι από δοθέν σημείο (εκτός κύκλου) μπορούν να αχθούν δύο εφαπτόμενες στον κύκλο. Είναι επίσης φανερό ότι τούτες οι εφαπτόμενες είναι ίσες, και ότι οι γωνίες με πλευρές τις εφαπτόμενες και την ευθεία που συνδέει το δοθεν σημείο με το κέντρο είναι επίσης ίσες.[30] Ο Ευκλείδης παραλείπει την περίπτωση όπου το δοθέν σημείο βρίσκεται επάνω στην περιφέρεια, προφανώς λόγω της λεπτομερούς ανάλυσης της Πρότασης γ′ 16. Ας παρατηρήσουμε τέλος, ότι εάν ξέραμε ότι η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή (Πρόταση γ′ 31 παρακάτω), απλώς θα είχαμε να γράψουμε κύκλο διαμέτρου ΑΕ· τούτος τέμνει τον δοθέντα κύκλο στα δύο σημεία επαφής.

8.5 Βιβλίο γ′, Μέρος Γ1: Γωνίες σε τμήματα κύκλων

Ίσως οι τέσσερις πιο σημαντικές προτάσεις των Στοιχείων είναι οι παρακάτω:

1. Η Πρόταση α′ 32 περί του αθροίσματος γωνιών τριγώνου·

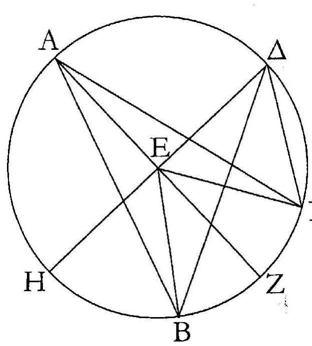
[26] Με κορυφή το Ε.
[27] Πρόταση α′ 4.
[28] δηλαδή ακτίνα.
[29] Πρόταση γ′ 16.
[30] Τα παραπάνω δείχθηκαν από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα.

2. η Πρόταση α′ 47 (το Πυθαγόρειο Θεώρημα)·
3. η Πρόταση φ′ 21 περί του αναλλοιώτου των γωνιών σε τμήμα και
4. η Πρόταση στ′ 2 περί των αναλογιών των πλευρών ομοίων τριγώνων.

Η Πρόταση γ′ 20 σηματοδοτεί μία νέα αρχή στο Βιβλίο γ′.

Πρόταση γ′ 20.

Σε ένα κύκλο, η γωνία στο κέντρο [31] είναι διπλάσια της γωνίας στην περιφέρεια, όταν οι γωνίες έχουν την ίδια περιφέρεια βάση.[32]



Σχήμα 8.9: Πρόταση γ′ 20. Επίκεντρη και εγγεγραμμένη γωνία.

Απόδειξη.

Χρησιμοποιούμε σύγχρονο συμβολισμό για συντομία, αλλά κατά τ′ άλλα ακολουθούμε καταλεπτώς τον Ευκλείδη. Έστω $\alpha = \angle$ΒΑΓ με βάση το τόξο ΒΓ. Το Ε είναι το κέντρο του κύκλου. Για την πρώτη περίπτωση, ας είναι το Ε στο εσωτερικό της α. Η ΑΕ προεκτείνεται στο Ζ. Τότε το $\triangle$ΑΒΕ είναι ισοσκελές· άρα η εξωτερική γωνία $\epsilon = \angle$ΒΕΖ$= 2\angle$ΑΒΕ$=2\beta$. Όμοια, $\eta = \angle$ΓΕΖ$= 2\angle$ΕΑΓ$=2\gamma$. Άρα $\mu = \angle$ΒΕΓ$= \epsilon + \eta = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$. Η περίπτωση του σημείου Δ αντιμετωπίζεται παρόμοια, με τη διαφορά ότι αφαιρούνται αντί να προστίθενται οι γωνίες. □

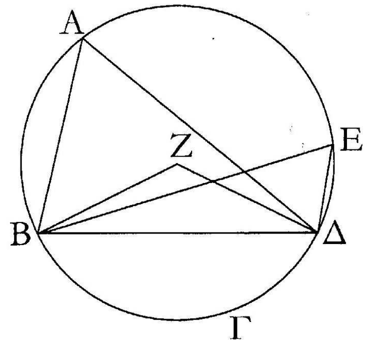
Η Πρόταση γ′ 21 είναι άμεσο πόρισμα της γ′ 20:

[31]=η επίκεντρη γωνία.

[32]Με άλλα λογια η επίκεντρη γωνία ενός τόξου είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης στο ίδιο τόξο.

Πρόταση γ′ 21.

Σε ένα κύκλο οι γωνίες στο ίδιο τμήμα είναι ίσες μεταξύ τους.



Σχήμα 8.10: Πρόταση γ′ 21. Οι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο είναι ίσες.

Η πρώτη ουσιαστική εφαρμογή της Πρότασης γ′ 21 είναι η παρακάτω.

Πρόταση γ′ 22.

Στα τετράπλευρα εντός κύκλων,[33] *το άθροισμα των απέναντι γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές.*

Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ, και μέσα σ′ αυτόν έστω τετράπλευρο το ΑΒΓΔ· λέγω, ότι το άθροισμα των απέναντι γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές.

Απόδειξη.

Ας έχουν συνδεθεί οι ΑΓ, ΒΔ.

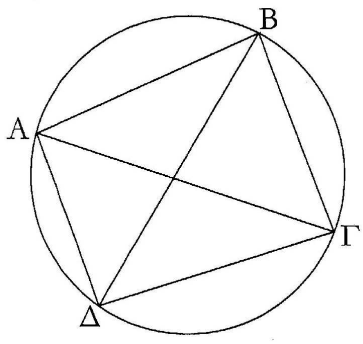
Επειδή σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των τριών γωνιών του είναι ίσο με δύο ορθές,[34] το άθροισμα των τριών γωνιών ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ είναι ίσο με δύο ορθές. Η μεν ΓΑΒ είναι ίση με την ΒΔΓ· είναι στο ίδιο τμήμα ΒΑΔΓ·[35] η δε ΑΓΒ είναι ίση με την ΑΔΒ· είναι στο ίδιο τμήμα ΑΔΓΒ.

Άρα όλη η ΑΔΓ είναι ίση με το άθροισμα των ΒΑΓ και ΑΓΒ. Προστίθεται και στις δύο η ΑΓΒ. Άρα το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΑΓ και ΑΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΔΓ. Αλλά το άθροισμα των ΑΒΓ, ΒΑΓ και ΑΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές. Άρα και το άθροισμα των ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσο με δύο

[33]=εγγεγραμμένα τετράπλευρα.

[34]Πρόταση α′ 32.

[35]Πρόταση γ′ 21.



Σχήμα 8.11: Πρόταση γ′ 22. Εγγεγραμμένο τετράπλευρο: Οι απέναντι γωνίες έχουν άθροισμα δύο ορθές.

ορθές. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι και το άθροισμα των γωνιών ΒΑΔ, ΔΓΒ είναι ίσο με δύο ορθές.

Άρα, στα τετράπλευρα εντός κύκλων, το άθροισμα των απέναντι γωνιών είναι ίσο με δύο ορθές, Ο.Ε.Δ. □

8.6 Βιβλίο γ′, Μέρος Γ2: Χορδές, τόξα και γωνίες

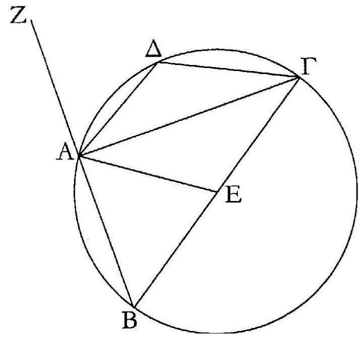
Σε τούτη τη παράγραφο του Βιβλίου γ′, τα αποτελέσματα της προηγούμενης επεκτείνονται με ένα τεχνικό τρόπο σε γενικότερες καταστάσεις, παρόμοια με τις προτάσεις περί εμβαδών παραλληλογράμμων και τριγώνων στο Βιβλίο α′ 36-38. Η ισότητα των γωνιών μεταφέρεται από 'το ίδιο τμήμα' σε 'ίσα τμήματα ίσων κύκλων' και όμοια για τις χορδές και τα τόξα: ίσα τόξα καθορίζουν ίσες χορδές και αντιστρόφως· το ίδιο ισχύει για τις γωνίες και τα τόξα. Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στο Βιβλίο δ′.

8.7 Βιβλίο γ′, Μέρος Γ3: Περισσότερα περί γωνιών σε κύκλους

Στο Μέρος Γ1, δύο ακραίες περιπτώσεις δεν μελετήθηκαν. Η πρώτη είναι αυτή της γωνίας σε ημικύκλιο. Η διάμετρος ενός κύκλου είναι μία ευθεία γραμμή και για τον Ευκλείδη αυτό δεν ορίζει γωνία (180 μοιρών ή δύο ορθών) στο κέντρο.

Πρόταση γ′ 31.[36]

Σε ένα κύκλο η γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή...[37]



Σχήμα 8.12: Πρόταση γ′ 31. Η εγγεγραμμένη σε διάμετρο είναι ορθή.

Η απόδειξη κάνει πάλι χρήση ισοσκελών τριγώνων και περιληπτικά έχει ως εξής: Η εξωτερική γωνία ∠ΖΑΓ είναι ίση με το άθροισμα ∠ΑΒΓ+∠ΑΓΒ· άρα αφού ∠ΑΒΓ+∠ΑΓΒ= ∠ΒΑΕ+∠ΕΑΓ, προκύπτει ότι η ∠ΒΑΓ είναι ορθή.

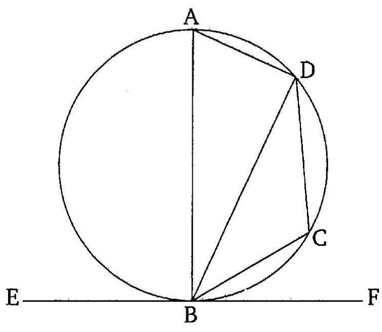
Πρόταση γ′ 32.

Εάν κάποια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, και από το σημείο επαφής αχθεί ευθεία που τέμνει τον κύκλο, οι γωνίες που σχηματίζει με την εφαπτομένη θα είναι ίσες με τις γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου.

Διότι εάν η ευθεία EF εφάπτεται στον κύκλο $ABCD$ στο σημείο B, και από το B αχθεί ευθεία BD που τέμνει τον κύκλο· λέγω ότι οι γωνίες που σχηματίζει η BD με την εφαπτομένη EF είναι ίσες με τις γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου, δηλαδή η γωνία FBD είναι ίση με τη γωνία BAD και η γωνία EBD είναι ίση με τη γωνία DCB.

[36]Το θεώρημα αυτό αποδίδεται στον Θαλή. Έχει ειπωθεί προηγουμένως ότι είναι άμεση απόρροια της Πρότασης γ′ 20, αν αυτή επεκταθεί ώστε να περιέχει την περίπτωση είναι μικρότερο *ή ίσο* του ημικυκλίου, δηλαδή η γωνία στο κέντρο είναι ίση με δύο ορθές. Υπάρχουν ενδείξεις στα Μετά τα Φυσικά του Αριστοτέλη, ότι υπήρχε διαφορετική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού γνωστής στους προ-Ευκλείδειους χρόνους.

[37]Η πρόταση περιέχει και άλλα αποτελέσματα που αφορούν γωνίες τμημάτων και γωνίες σε τμήματα μεγαλύτερα ή μικρότερα ημικυκλίων.



Σχήμα 8.13: Πρόταση γ′ 32. Θεώρημα γωνίας χορδής και εφαπτομένης.

Απόδειξη.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi = \angle FBD = \angle BAD = \alpha$ και $\psi = \angle EBD = \angle DCB = \gamma$. Εν γένει, το Α είναι τυχαίο σημείο στον κύκλο, αλλά λόγω του αναλλοιώτου της γωνίας BAD μπιορούμε να υποθέσουμε ότι η BA είναι διάμετρος. Θέτουμε επίσης $\beta = \angle ABC$. Η $\angle ADB$ είναι ορθή·[38] άρα το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι ίσο μία ορθή.[39] Αλλά επίσης $\beta + \phi$ είναι μία ορθή και έτσι $\alpha = \phi$.

Επίσης, $\gamma = \pi - \alpha = \pi - \phi = \psi$.[40] □

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι παραλλαγές της γ′ 32 που είναι χρήσιμες γιατί δημιουργούν καταστάσεις κατάλληλες για την εφαρμογή της γ′ 21.

Πρόταση γ′ 33.

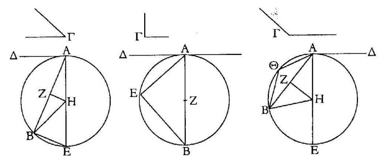
Να γραφεί σε δοθείσα ευθεία, τμήμα κύκλου που δέχεται γωνία ίση με ευθύγραμμη γωνία.

Πρόταση γ′ 34.

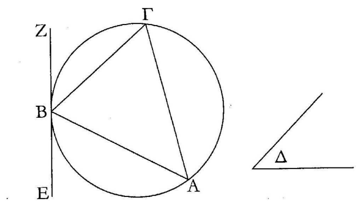
Από δοθέντα κύκλο να αφαιρεθεί τμήμα που δέχεται γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.

Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και Δ η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία· ζητείται να αφαιρεθεί τμήμα κύκλου που δέχεται γωνία ίση με την ευθύγραμμη γωνία Δ.

[38] Πρόταση γ′ 31
[39] Πρόταση α′ 32.
[40] Πρόταση γ′ 22.



Σχήμα 8.14: Πρόταση γ′ 33.



Σχήμα 8.15: Πρόταση γ′ 34.

Απόδειξη.

Ας αχθεί από το Β εφαπτομένη ΕΖ. Και ας έχει κατασκευαστεί πάνω στο ΖΒ γωνία ΖΒΓ ίση με την Δ. [41]

Επειδή λοιπόν η ευθεία ΕΖ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ, και από το σημείο επαφής Β διέρχεται η ΒΓ, η γωνία ΖΒΓ είναι άρα ίση με την γωνία που κατασκευάστηκε στο εναλλάξ τμήμα ΒΑΓ. Αλλά η ΖΒΓ είναι ίση με την Δ· άρα και η γωνία στο τμήμα ΒΑΓ είναι ίση με την Δ.

Άρα, από τον δοθέντα κύκλο ΑΒΓ αφαιρέθηκε το ΒΑΓ που δέχεται γωνία ίση με τη δοθείσα ευθύγραμμη γωνία Δ. Ο.Ε.Π.[42] □

8.8 Βιβλίο γ′ Μέρος Δ: Τομές χορδών τεμνουσών και εφαπτομένων

Στη σημερινή γεωμετρία του λυκείου, οι τελευταίες τρεις προτάσεις του Βιβλίου γ′ τίθενται εντός του πλαισίου της θεωρίας της ομοιότητας όπου, οι αποδείξεις

[41] Πρόταση α′ 23.

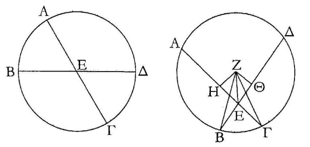
[42] Μία εναλλακτική κατασκευή εδώ θα ήταν να κατασκευάσουμε μία επίκεντρη γωνία διπλάσια της δοθείσας· αν η δοθείσα είναι ορθή, χρειάζεται μόνο να φέρουμε την διάμετρο του κύκλου.

τους είναι εύκολες. Σε αυτό το στάδιο ο Ευκλείδης δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αναλογίες και για αυτό το λόγο δίδει περίπλοκες και μακροσκελείς αποδείξεις.

Πεπλεγμένη στις Προτάσεις γ′ 35/36 είναι η κατασκευή της αναλλοιώτου που καλείται σήμερα δύναμη σημείου ως προς κύκλο η οποία έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην ιστορία της γεωμετρίας.

Πρόταση γ′ 35.

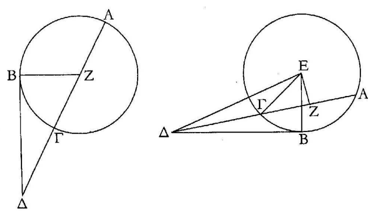
Εάν δύο ευθείες τέμνονται σε κύκλο, το περιεχόμενο από τα τμήματα της μιας ορθογώνιο ισούται με το περιεχόμενο ορθογώνιο από τα τμήματα της άλλης.



Σχήμα 8.16: Πρόταση γ′ 34: ΑΕ·ΕΓ=ΒΕ·ΕΔ.

Πρόταση γ′ 36.[43]

Εάν ληφθεί κάποιο σημείο εκτός του κύκλου, και στον κύκλο πέφτουν δύο ευθείες, η μία τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από όλη την τέμνουσα και το τμήμα της εκτός του κύκλου μεταξύ του σημείου και της κυρτής περιφέρειας, είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτομένης.



Σχήμα 8.17: Πρόταση γ′ 36. Θέωρημα Τέμνουσας και Εφαπτομένης: $\Delta B^2 = \Delta\Gamma \cdot \Delta A$.

[43]Η Πρόταση αυτή είναι το γνωστό Θεώρημα Τέμνουσας και Εφαπτομένης.

Ας ξαναπαραθέσουμε την παραπάνω Πρόταση ώστε να συμπεριλαμβάνει και την αντίστροφή της Πρόταση γ′ 37, δέστε και το σχήμα 8.17:

$$\Delta\mathrm{B} \text{ εφαπτομένη } \textit{αν και μόνο αν } \Delta\mathrm{B}^2 = \Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{A}.$$

Θα δείξουμε μόνο το ευθύ· το αντίστροφο δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Απόδειξη με την χρήση ομοιότητας.

Θεωρούμε τα τρίγωνα △ΔΒΓ και △ΔΒΑ, τα οποία έχουν κοινή την ∠ΑΔΒ. Εάν η ΔΒ είναι εφαπτομένη, τότε από την γ′ 32 είναι ∠ΔΒΓ=∠ΒΑΓ. Από την α′ 32 οι αντίστοιχες λοιπές γωνίες είναι ίσες και τα τρίγωνα △ΔΒΓ και △ΔΒΑ είναι ισογώνια. Άρα,[44]

$$\Delta\Gamma:\Delta\mathrm{B}=\Delta\mathrm{B}:\Delta\mathrm{A},$$

και [45]

$$\Delta\mathrm{B}^2 = \Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{A}.$$

□

Η απόδειξη του Ευκλείδη.

Ο Ευκλείδης θεωρεί πρώτα την περίπτωση όπου η ΑΔ περνά από το κέντρο. Παραλείπουμε αυτή την περίπτωση διότι οι μέθοδοι που ακολουθούνται είναι πανομοιότυπες με αυτές της γενικής περίπτωσης.[46]

Έστω ΕΖ κάθετη στην ΔΑ· συνδέονται οι ΕΔ, ΕΒ. Στην ευθεία ΔΑ έχουμε την κατάσταση της β′ 6:

$$\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma+\Gamma\mathrm{Z}^2=\mathrm{Z}\Delta^2.$$

Τώρα τρεις εφαρμογές του Π. Θ. βοηθούν. Από κατασκευή

$$\mathrm{E}\Gamma^2=\Gamma\mathrm{Z}^2+\mathrm{EZ}^2,$$

$$\mathrm{E}\Delta^2=\Delta\mathrm{Z}^2+\mathrm{EZ}^2.$$

Άρα,

$$\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{E}\Delta^2,$$

και επειδή ΓΕ=ΕΒ,

---

[44]Πρόταση στ′ 4.

[45]Πρόταση στ′ 16.

[46]Τούτη η περίπτωση είναι αυτό που στις μέρες μας ονομάζουμε *οριακή*. Ο Ευκλείδης, όπως και όλοι οι Έλληνες γεωμέτρες άλλωστε, δεν επιτρέπει στον εαυτό του να συνάγει την αλήθεια της οριακής περίπτωσης κατευθείαν από την γενική περίπτωση που την περιέχει, αλλά δίδει ξεχωριστή απόδειξη.

$$\mathrm{A}\Delta\cdot\Delta\Gamma+\mathrm{EB}^2=\mathrm{E}\Delta^2.$$

Τώρα, επειδή η ΔΒ είναι εφαπτομένη,

$$\mathrm{E}\Delta^2=\Delta\mathrm{B}^2+\mathrm{EB}^2.$$

Αντικαθιστώντας και αφαιρώντας το EB^2 η παραπάνω δίδει

$$\mathrm{A}\Gamma\cdot\Delta\Gamma=\Delta\mathrm{B}^2.$$

□

Εκ πρώτης όψεως, η απόδειξη του Ευκλείδη δείχνει πιο περίπλοκη από την απόδειξη με την χρήση ομοιότητας. Παρά τούτο η τελευταία χρησιμοποιεί την Πρόταση στ΄ 4 και την στ΄ 16, οι οποίες χρειάζονται τα εννοιακά δυσκολότερα θεμέλια του Βιβλίου ε΄. Συνολικά λοιπόν η απόδειξη του Ευκλείδη είναι απλούστερη αν και τεχνικά πολύπλοκη.

Κεφάλαιο 9

Στοιχείων Βιβλίο δ′: Κανονικά πολύγωνα

Θα χρησιμοποιούμε τον συνήθη όρο ‘κανονικό πολύγωνο’ αντί του ευκλείδειου ‘ισόπλευρου και ισογώνιου πολυγώνου’· η κυρτότητα υπονοείται πάντοτε. Το Βιβλίο δ′ ακολουθεί ένα σφιχτό πλάνο και δεν έχει τις υποδιαιρέσεις που έχουν τα άλλα βιβλία. Τέσσερα προβλήματα διαπραγματεύονται συστηματικά:

1. Η εγγραφή ευθυγράμμου σχήματος σε δοθέντα κύκλο·
2. η περιγραφή ευθυγράμμου σχήματος σε δοθέντα κύκλο·
3. η εγγραφή κύκλου σε δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και
4. η περιγραφή κύκλου σε δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.

Τα προβλήματα αυτά λύνονται για

- τρίγωνα στις Προτάσεις δ′ 2-5·
- τετράγωνα (κανονικά τετράπλευρα) στις Προτάσεις δ′ 6-9·
- κανονικά πεντάγωνα στις Προτάσεις δ′ 10-14·
- κανονικά εξάγωνα στην Πρόταση δ′ 15 και
- κανονικά δεκαπεντάγωνα στην Πρόταση δ′ 16.

Ο αυστηρός και συστηματικός σχεδιασμός του βιβλίου δ′ μας δίνει να καταλάβουμε ότι είναι μονογραφία ενός μόνο συγγραφέα την οποία ο Ευκλείδης ενσωμάτωσε στα Στοιχεία. Η παράλειψη του αξιώματος των παραλλήλων, η κάπως αρχαική γλώσσα, όπως και τα σχόλια που προστέθηκαν στο βιβλίο αυτό στην μετα-Ευκλείδεια εποχή, μας δίνουν να καταλάβουμε ότι μάλλον τούτο είναι έργο κάποιου Πυθαγορείου. Ο Ευκλείδης δείχνει ότι παρεξέκκλινε του αρχικού κειμένου με δύο τρόπους: πρώτα, ξαναδούλεψε την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου για να εξαλείψει την χρήση των αναλογιών και ύστερα, δεν χρησιμοποίησε καθόλου τους ορισμούς του βιβλίου για την εγγραφή πολυγώνων σε πολύγωνα, την οποία προφανώς διατήρησε από την αρχική μονογραφία.

Από μαθηματική άποψη, το πλέον ουσιαστικό επίτευγμα του Βιβλίου δ′ είναι η κατασκευή του κανονικού πενταγώνου. Τα υπόλοιπα θεωρήματα είναι σχετικά εύκολα, άρα κάποιος μπορεί να πεί ότι η κατασκευή του πενταγώνου είναι ο λόγος ύπαρξης όλου του βιβλίου. Η θεωρία στο Βιβλίο δ′ είναι ενδιαφέρουσα μόνο εξαιτίας αυτής της δύσκολης περίπτωσης, την οποία θα διαπραγματευτούμε ξεχωριστά στην επόμενη παράγραφο.

Σημείο εκκίνησής μας είναι η Πρόταση δ′ 2 με την εξαιρετικά όμορφη απόδειξη.

Πρόταση δ′ 2.

Να εγγραφεί σε δοθέντα κύκλο, τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο.

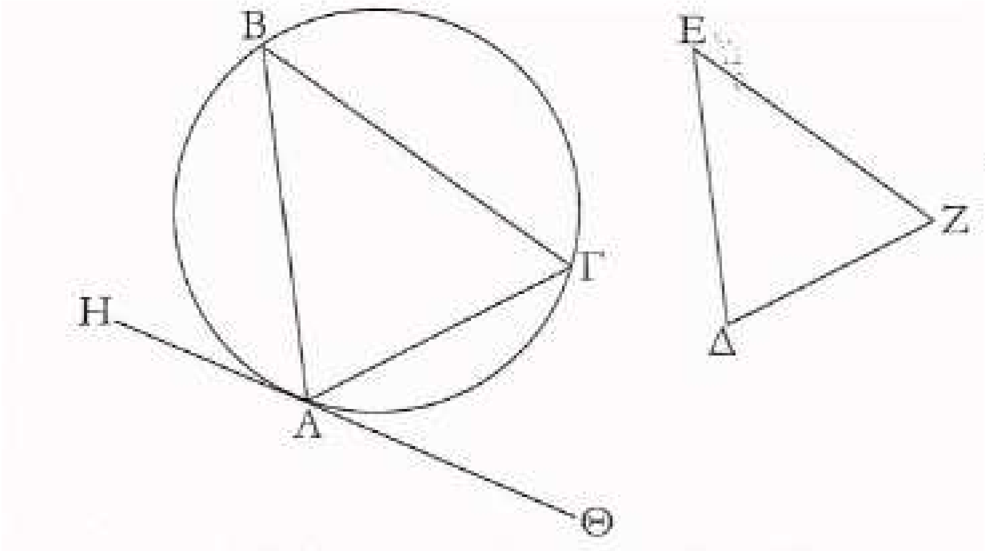
Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και το δοθέν τρίγωνο το ΔΕΖ· ζητείται να εγγραφεί στον κύκλο ΑΒΓ τρίγωνο ισογώνιο με το ΔΕΖ.

Απόδειξη.

Ας έχει αχθεί από το Α εφαπτομένη ΗΘ στον κύκλο ΑΒΓ, και έστω ότι έχει κατασκευαστει στην ευθεία ΑΘ και στο σημείο της Α, γωνία ΘΑΓ ίση με τη ΔΕΖ και στην ευθεία ΑΗ και στο σημείο της Α γωνία ΗΑΒ ίση με τη ΔΖΕ·[1] ας έχει συνδεθεί και η ΒΓ.

Επειδή λοιπόν κάποια ευθεία ΑΘ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ και από το σημείο επαφής Α διέρχεται η ευθεία ΑΓ, άρα η γωνία ΘΑΓ είναι ίση με την γωνία ΑΒΓ στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου. [2] Αλλά η ΘΑΓ είναι ίση με τη ΔΕΖ άρα και η ΑΒΓ είναι ίση με τη ΔΕΖ. Για τους ίδιους λόγους και η ΑΓΒ είναι άρα ίση με τη ΔΖΕ· και άρα η λοιπή ΒΑΓ είναι ίση με τη λοιπή ΕΔΖ [άρα

[1] Πρόταση α′ 23.
[2] Πρόταση γ′ 32.



Σχήμα 9.1: Πρόταση δ′ 2: Εγγραφή σε κύκλο τριγώνου ισογωνίου με δοθέν τρίγωνο.

το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ισογώνιο με το ΑΒΓ τρίγωνο και εγγράφεται αυτό στον κύκλο ΑΒΓ].

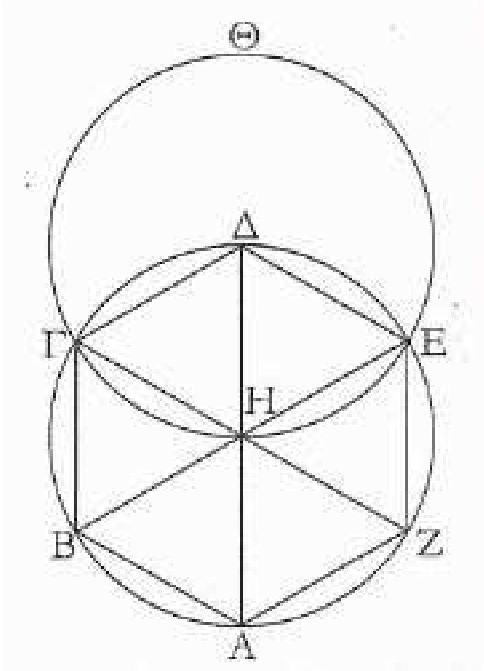
Άρα στον δοθέντα κύκλο εγγράφεται τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο, [3] Ο.Ε.Π. □.

Το επόμενο θεώρημα μας δίδει επίσης τη γεύση του Βιβλίου δ′:

Πρόταση δ′ 15.

Στον δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο εξάγωνο.

[3]Επειδή φυσικά κάθε σημείο του κύκλου μπορεί να ληφθεί ως γωνιακό σημείο, υπάρχουν άπειρες λύσεις στο πρόβλημα. Ακόμη και αν σταθεροποιήσουμε ένα σημείο Α, υπάρχουν έξι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις γωνίες. επίσης το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στην γ′ 34, δηλαδή να αφαιρέσουμε από τον κύκλο τμήμα που περιέχει γωνία ίση με δοθείσα γωνία. Μπορεί επίσης να επιλυθεί με την εναλλακτική μέθοδο που εφαρμόζεται και στην γ′ 34: γράφονται επίκεντρες γωνίες ίσες με το διπλάσιο των γωνιών του δοθέντος τριγώνου. Ως ειδική περίπτωση, μπορούμε με την μέθοδο αυτής της Πρότασης να εγγράψουμε ισόπλευρο τρίγωνο σε κάθε κύκλο· αφού πρώτα το κατασκευάσουμε με την βοήθεια της Πρότασης α′ 1. Ι σοδύναμα, μπορούμε να χωρίσουμε την περιφέρεια κύκλου σε τρία ίσα τόξα.



Σχήμα 9.2: Πρόταση δ′ 15: Εγγραφή σε κύκλο κανονικού εξαγώνου.

Απόδειξη.

Θα δώσουμε την απόδειξη συντομεύοντας κάπως τα επιχειρήματα του Ευκλείδη. Έστω $\mathcal{K}$ ο κύκλος κέντρου Η. Φέρεται η διάμετρος ΑΔ και ο κύκλος $\mathcal{H}$ κέντρου Δ και ακτίνας ΔΗ, ο οποίος τέμνει τον $\mathcal{K}$ στα σημεία Γ και Ε.

1. Το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Από κατασκευή, τα τρίγωνα △ΗΓΔ και △ΗΔΕ είναι ισόπλευρα, οι αντίστοιχες γωνίες τους στο Η είναι το ένα τρίτο των δύο ορθών. Επειδή η ΒΕ είναι ευθεία, η λοιπή γωνία ∠ΒΗΓ είναι επίσης ίση με το ένα τρίτο των δύο ορθών. Οι τρείς υπόλοιπες γωνίες στο Η είναι κάθετες στις προηγούμενες· άρα είναι όλες ίσες. Αλλά ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα[4] και υποτείνονται από ίσες χορδές.[5]. Άρα το εξάγωνο είναι ισόπλευρο.

2. Είναι επίσης ισογώνιο. Το τόξο ΒΓΔΕΖ είναι ίσο με το τόξο ΓΔΕΖΑ·

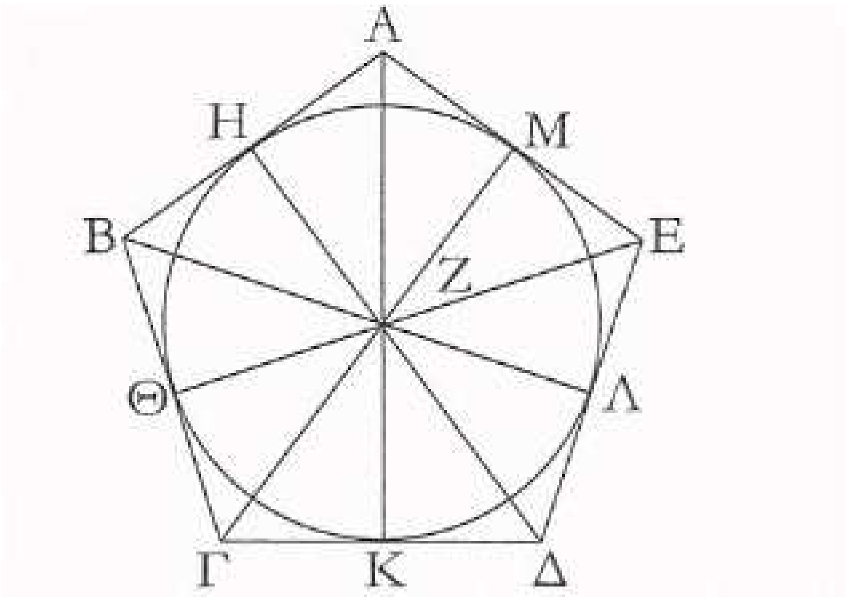
[4]Πρόταση γ′ 26.
[5]Πρόταση γ′ 29.

άρα από την γ′ 27 η ∠ΒΑΖ είναι ίση με την ∠ΓΒΑ κ.ο.κ.

□

Η κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου

Σε αντίθεση με το πρόβλημα της εγγραφής κανονικού n-γώνου σε δοθέντα κύκλο όπου κάθε n πρέπει να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά, η κατασκευή του εγγεγραμμένου (όπως και του περιγεγραμμένου) κύκλου κανονικού n-γώνου επιδέχεται γενικής λύσης. Η διαδικασία της Πρότασης δ′ 13, όπου ο Ευκλείδης εγγράφει κύκλο σε κανονικό πεντάγωνο, μπορεί να γενικευτεί, εφ′ όσον η απόδειξη στην ουσία δεν χρησιμοποιεί πουθενά ότι το εν λόγω πολύγωνο είναι πεντάγωνο. Ο Ευκλείδης το γνωρίζει αυτό, διότι στην στ′ 15 για το εξάγωνο και στην δ′ 16 για το δεκαπεντάγωνο, λέγει ότι η κατασκευή γίνεται όπως και στην περίπτωση του πενταγώνου.



Σχήμα 9.3: Κατασκευή εγγεγραμμένου κύκλου.

Ας δούμε λίγο την κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου κανονικού n-γώνου ΑΒΓΔΕ... (Το σχήμα αναφέρεται στο κανονικό πεντάγωνο, αλλά απ′

ότι είπαμε δεν έχει σημασία.) Φέρονται οι διχοτόμοι ΓΖ, ΔΖ των γωνιών ∠ΒΓΔ και ∠ΓΔΕ αντίστοιχα. Από το Ζ φέρονται οι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ.

Τα τρίγωνα △ΒΓΖ, △ΔΓΖ είναι ίσα: η ΒΓ είναι ίση με τη ΓΔ, η ΓΖ είναι κοινή και η ∠ΒΓΖ είναι ίση με την ∠ΔΓΖ από κατασκευή. [6] Άρα και τα ύψη ΖΘ, ΖΚ είναι ίσα[7] και μάλιστα ισούνται με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Αναλόγως κατασκευάζονται οι ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ, κλπ.

9.1 Το κανονικό πεντάγωνο

Σε τούτη τη παράγραφο θα μελετήσουμε την Ευκλείδεια κατασκευή του κανονικού πενταγώνου που από μόνη της είναι ένα πανέμορφο κομμάτι των μαθηματικών. Ως συνήθως, ο Ευκλείδης δεν μιλά περί κινήτρων η σκοπών κάποιων συγκεκριμένων ενδιάμεσων θεμάτων όπως λ.χ. την δ′ 10, αλλά απλά παραθέτει το υλικό του. Το αποφασιστικό βήμα προς το πεντάγωνο είναι το ‘λήμμα’ δ′ 10.

Πρόταση δ′ 10.

Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο που έχει καθε μία από τις γωνίες του προς τη βάση διπλάσια της λοιπής.

Απόδειξη.

Ας είναι ΑΒ μία οποιαδήποτε ευθεία και ας τμηθεί στο γ ώστε

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}^2.$$ [8]

Έστω $\mathcal{K}$ ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ. Φέρεται ΒΔ ίση με την ΑΓ και συνδέονται οι ΑΔ, ΔΓ. Το ζητούμενο τρίγωνο είναι το △ΑΒΔ. Πράγματι:

Αν $\mathcal{H}$ είναι το ημικύκλιο γύρω από το △ΑΓΔ, επειδή το Β είναι εκτός του $\mathcal{H}$, η ΒΑ το τέμνει στο Α και στο Γ και ‘εμπίπτει’ σε αυτό. Από κατασκευή

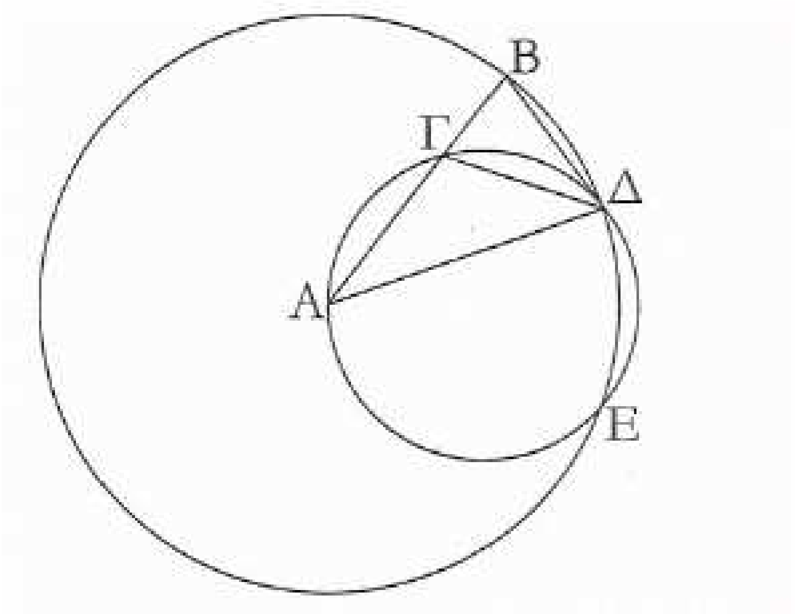
$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Delta}^2.$$

Τώρα το αποφασιστικό βήμα είναι η εφαρμογή της Πρότασης γ′ 37:

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Delta}^2 \text{ άρα η } \mathrm{B\Delta} \text{ είναι εφαπτόμενη στο } \mathcal{H}.$$

Άρα, ∠ΒΔΓ=∠ΒΑΔ από την γ′ 32 επειδή η τελευταία είναι η γωνία στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου $\mathcal{H}$. Τα υπόλοιπα είναι ένας καταιγισμός πυροτεχνημάτων ισοσκελών τριγώνων! Αφού το △ΒΑΔ είναι ισοσκελές,

[6] Πρόταση α′ 4.
[7] Ο Ευκλείδης το αποδεικνύει αυτό λεπτομερώς.
[8] Πρόταση β′ 11.



Σχήμα 9.4: Πρόταση δ′ 10.

$$\angle \mathrm{AB\Delta} = \angle \mathrm{B\Delta\Gamma} + \angle \mathrm{\Gamma\Delta A} = \angle \mathrm{BA\Delta} + \angle \mathrm{\Gamma\Delta A}.$$

Η $\angle \mathrm{B\Gamma\Delta}$ είναι εξωτερική του $\triangle \mathrm{\Delta A\Gamma}$:

$$\angle \mathrm{B\Gamma\Delta} = \angle \mathrm{BA\Delta} + \angle \mathrm{\Gamma\Delta A} = \angle \mathrm{AB\Delta}.$$

Άρα, το $\triangle \mathrm{\Delta\Gamma B}$ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές, και λόγω κατασκευής

$$\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{B\Delta} = \mathrm{A\Gamma}.$$

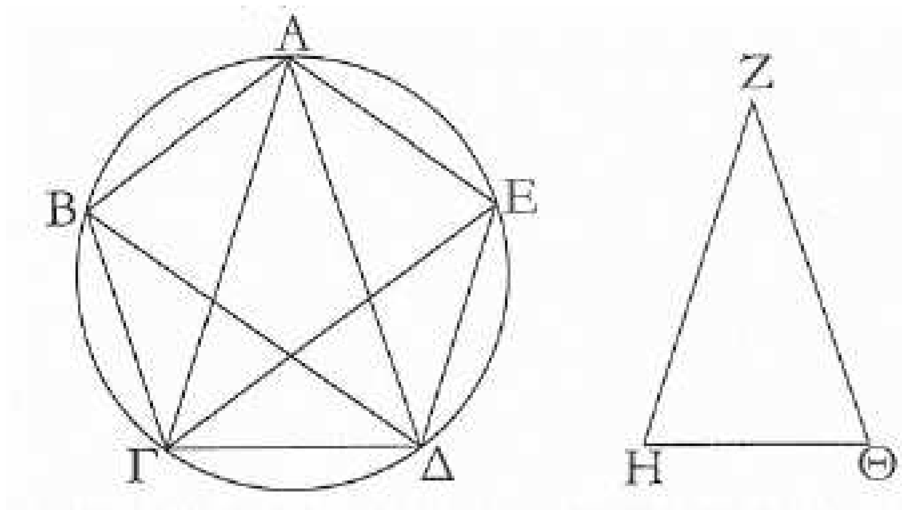
Τώρα το $\triangle \mathrm{\Delta\Gamma A}$ είναι ισοσκελές, άρα

$$\angle \mathrm{BA\Delta} = \angle \mathrm{\Gamma\Delta A}.$$

Άρα οι γωνίες στη βάση, $\angle \mathrm{AB\Delta} = \angle \mathrm{BA\Delta} + \angle \mathrm{\Gamma\Delta A} = \angle \mathrm{BA\Delta} + \angle \mathrm{BA\Delta}$, είναι διπλάσιες της λοιπής $\angle \mathrm{BA\Delta}$, Ο.Ε.Δ. □

Πρόταση δ′ 11.

Στο δοθέντα κύκλο, να εγγραφεί πεντάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.
Απόδειξη.



Σχήμα 9.5: Πρόταση δ′ 11. Εγγραφή κανονικού πενταγώνου σε κύκλο.

Στο δοθέντα κύκλο, εγγράφεται με την μέθοδο της Πρότασης δ′ 2 τρίγωνο $\triangle$ΑΔΓ ισογώνιο με αυτό που κατασκευάστηκε στην Πρόταση δ′ 10. Διχοτομούνται οι γωνίες στα Γ και Δ και προεκτείνονται οι διχοτόμοι στα Ε και Β. Συνδέονται οι ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

1. Το πεντάγωνο είναι ισόπλευρο. Από κατασκευή, οι πέντε γωνίες $\angle$ΔΑΓ, $\angle$ΑΓΕ, $\angle$ΕΓΔ, $\angle$ΓΔΒ,$\angle$ΒΔΑ είναι ίσες μεταξύ τους, άρα από την Πρόταση γ′ 26 βαίνουν σε ίσα τόξα και από την γ′ 29 σε ίσες χορδές.

2. με ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό του εξαγώνου, προκύπτει ότι το πεντάγωνο είναι και ισογώνιο. [9]

□

[9] Ο De Morgan σχολιάζει ότι η μέθοδος της απόδειξης της Πρότασης δ′ 11 δεν είναι τόσο φυσιολογική, αλλά, αν κοιτάξουμε το σχήμα θα καταλάβουμε ότι σχηματίζεται το *πεντάγραμμο* εκτός από την ευθεία ΒΕ. Είναι γνωστή η ενασχόληση του Ίππασου του Μεταποντίνου με το πεντάγωνο-δωδεκάεδρο. Άρα η μέθοδος δείχνει πυθαγόρεια και συνεπώς μεγάλου ιστορικού ενδιαφέροντος.

Μία άλλη μέθοδος θα μπορούσε να είναι η εξής: Με την δ′ 10, εγγράφεται ένα δεκάγωνο στον κύκλο, και κατόπιν ενώνονται οι εναλλάξ κορυφές.

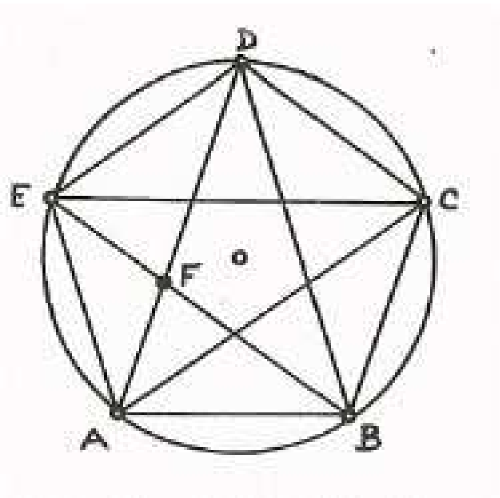
9.2 Εικασίες για το πεντάγωνο

Σε τούτη την παράγραφο θα παραθέσουμε ορισμένες εικασίες για την κατασκευή του εγγεγραμμένου κανονικού πενταγώνου, της οποίας έχουμε ήδη εικάσει την Πυθαγόρεια προέλευση. Θα εξετάσουμε τους επιτρεπτούς (και μη) τρόπους κατασκευών, ακολουθώντας την χρήσιμη διαδικασία της 'ανάλυσης και της σύνθεσης ' όπως αυτή περιγράφεται στην σύντομη προσθήκη στις Προτάσεις ιγ′ 1–5 των Στοιχείων:[10]

Ανάλυση είναι η παραδοχή του αποτελέσματος και η άφιξη μέσω αυτού σε κάποια αληθή πρόταση.

Σύνθεση είναι η παραδοχή των υποθέσεων και η άφιξη μέσω αυτών στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Στη μαθηματική έρευνα, τούτα χρησιμοποιούνται συνεχώς. Αν υποθέσουμε ότι αποδείξαμε ένα αποτέλεσμα, εξετάζουμε εάν μπορούμε να αντιστρέψουμε τις συνεπαγωγές για να φτάσουμε στην υπόθεση. Με άλλα λόγια η ανάλυση είναι η προσπάθεια απόδειξης του 'αντιστρόφου' μιας πρότασης $p \implies q$. Η σύνθεση είναι η καθεαυτή προσπάθεια της απόδειξης της πρότασης, και μόνο αυτή καθιστά την απόδειξη ισχύουσα.



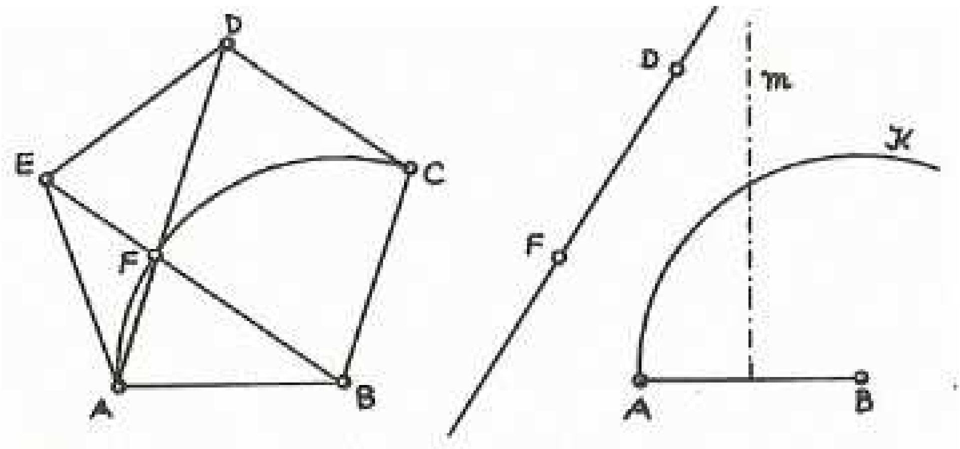
Σχήμα 9.6: Πρώτη ανάλυση του πενταγώνου.

[10] Η προσθήκη αυτή παραλείφθηκε από την οριστική εκδοχή των Στοιχείων.

Πρώτη ανάλυση του πενταγώνου

Υποθέτουμε ότι δίδεται ένα κανονικό εγγεγραμμένο πεντάγωνο μαζί με τις διαγωνίους του (Σχήμα 9.6).

Οι γωνίες $\angle BAC$ και $\angle ACE$ είναι ίσες, όπως εύκολα προκύπτει από την ισότητα των $\triangle DAC$ και $\triangle ACE$. Άρα η διαγώνιος AD είναι παράλληλη στην πλευρά BC. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι όλες οι διαγώνιοι είναι παράλληλες στις απέναντι αντίστοιχες πλευρές. Άρα το τετράπλευρο $BCDF$ είναι παραλληλόγραμμο· άρα η BF είναι ίση με την πλευρά του πενταγώνου, και τα σημεία C, F και A θα κείνται σε κύκλο $\mathcal{K}$ κέντρου B και ακτίνας BA. Από συμμετρία, η κορυφή D θα κείται στη μεσοκάθετο της AB. Όπως παραπάνω, η DF είναι ίση με την AB.



Σχήμα 9.7: Πρώτη σύνθεση του πενταγώνου: Νεύση.

Πρώτη σύνθεση του πενταγώνου: Νεύση

Η μέθοδος της *νεύσης* δεν είναι τίποτε άλλο από την χρησιμοποίηση *διαβαθμισμένου κανόνα* δηλαδή του χάρακα. Τούτη η μέθοδος προφανώς δεν υπάρχει στα Στοιχεία όπου τα μόνα επιτρεπτά γεωμετρικά εργαλεία είναι ο κανόνας και ο διαβήτης.[11] Είναι όμως γεγονός, ότι αρκετοί Έλληνες μαθηματικοί εξάσκη-

[11]Τούτο μάλλον οφείλεται σε πλατωνικές παραδόσεις, αν και πουθενά στα πλατωνικά κείμενα δεν καθορίζεται αυτός ο περιορισμός. Πάντως από ένα σημείο και ύστερα καθιερώθηκε· έτσι η νεύση έπαψε να θεωρείται παραδεκτή μέθοδος απόδειξης.

σαν την μέθοδο της νεύσης, ανάμεσά του και ο Ιπποκράτης ο Χίος. Ο Πάππος επίσης αναφέρει ότι ο Απολλώνιος ο Περγαίος έγραψε δύο βιβλία *Περί νεύσεως*.

Τα βιβλία αυτά χάθηκαν, αλλά ο Πάππος περιγράφει τη μέθοδο· ας δούμε πως αυτή εφαρμόζεται στο πεντάγωνο:

Χαράσσουμε τον κανόνα με δύο σημεία D, F ώστε $DF = AB$. (Σχήμα 9.7). Από την AB κατασκευάζουμε την m και τον κύκλο $\mathcal{K}$ και κατόπιν γλιστράμε τον χάρακα στη θέση όπου το $D \in m$, το $F \in \mathcal{K}$ και η προεκτεταμένη DF περνά από το A. Το να συμπληρωθεί το πεντάγωνο είναι τώρα εύκολο, αν και πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι κανονικό.

Δεύτερη ανάλυση του πενταγώνου

Οι δυσκολίες στην κατασκευή του πενταγώνου αυξάνονται δραματικά αν ξεχάσουμε τη νεύση. Ο Ευκλείδης, χωρίς να το λέει παραθέτει την ανάλυση του πενταγώνου στα πλαίσια της θεωρίας της ομοιότητας. Εκκινώντας από δοθείσα πλευρά του πενταγώνου που πρέπει να κατασκευαστεί, πρέπει κάπως να ορίσουμε τη διαγώνιο. Παραθέτουμε πρώτα τον παρακάτω Ορισμό 3 του Βιβλίου στ′:

Μία ευθεία λέγεται ότι έχει τμηθεί σε μέσο και άκρο λόγο, εάν ο λόγος όλης της ευθείας πρός το μεγαλύτερο τμήμα της είναι ίσο με το λόγο του μεγαλύτερου τμήματός της προς το μικρότερο.[12]

Πρόταση ιγ′ 8.

Σε κανονικό πεντάγωνο οι διαγώνιοι που υποτείνονται από δύο διαδοχικές γωνίες, τέμνουν η μία την άλλη σε μέσο και άκρο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματά τους είναι ίσα με την πλευρά του πενταγώνου.

Συντομευμένη απόδειξη.

Δείχνουμε πρώτα ότι το $DCHE$ είναι παραλληλόγραμμο· άρα $EH = DC = AB$ (Σχήμα). Κατόπιν τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle HAB$ είναι ισογώνια, άρα η στ′ 4 δίδει

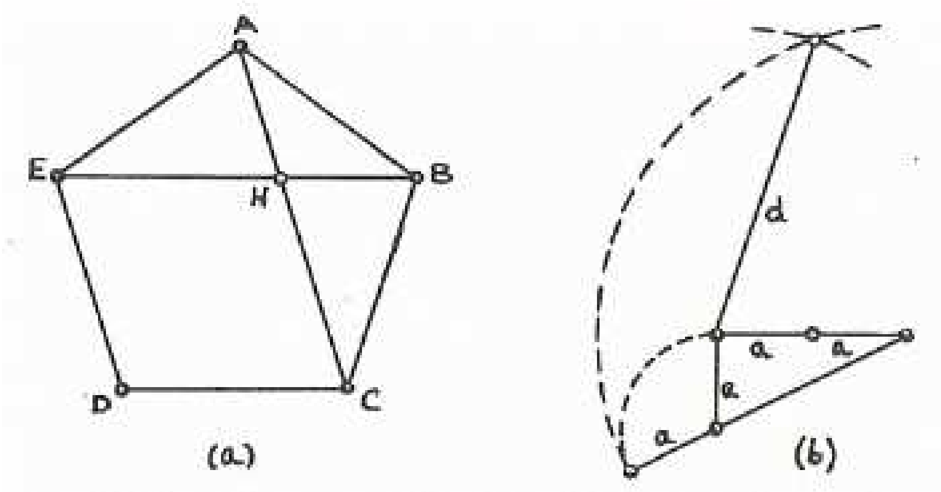
$$EB : BA = AB : BH.$$

Αλλά $AB = EH$· άρα

$$BE : EH = EH : HB.$$

□

[12] Και πάλι η χρυσή τομή. Συγκρίνετε με την Πρόταση β′ 11.



Σχήμα 9.8: Δεύτερη ανάλυση του πενταγώνου.

Από την στ′ 16, το παραπάνω είναι ισοδύναμο με την

$$BE \cdot HB = EH^2,$$

δηλαδή τη συνθήκη της β′ 11. Ας θέσουμε προς στιγμή $x = BE$ και a για μία από τις πλευρές του πενταγώνου. Τότε $HB = x - a$ και παίρνουμε την εξίσωση

$$x(x-a) = a^2,$$

όπου ο a είναι δοθείς και ο x άγνωστος. Εάν $a = 2b$ τότε

$$\begin{aligned} x^2 - 2bx &= 4b^2, \\ x^2 - 2bx + b^2 &= 5b^2, \\ (x-b)^2 &= 5b^2. \end{aligned}$$

Από αυτό το x κατασκευάζεται εύκολα και παίρνουμε το χαρακτηριστικό τρίγωνο της δ′ 10 όπως στο Σχήμα 9.8 (b).

Δεύτερη σύνθεση του πενταγώνου

Εκκινώντας από την $a = 2b$ όπως στο Σχήμα 9,8 (a), παίρνουμε το x και το τρίγωνο της δ′ 10 με την χαρακτηριστική του ιδιότητα και μπορούμε κατόπιν να προχωρήσουμε, αλλά χρησιμοποιώντας συνεχώς θεωρία ομοιότητας.

Τρίτη σύνθεση του πενταγώνου

Όχι μόνον η νεύση, αλλά και τα επιχειρήματα ομοιότητας είναι απαγορευμένα. Αυτή είναι η σύνθεση του Ευκλείδη.

Συμπέρασμα

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε να φανταστούμε τα ακόλουθα στάδια που πέρασε το βιβλίο δ΄:

1. Κατασκευάζει κάποιος (μάλλον Πυθαγόρειος) το πεντάγωνο με τη μέθοδο της νεύσης.

2. Το επιχείρημα της νεύσης απαλείφεται και αντικαθίσταται από κάποιο όμοιο με αυτό του σχήματος

3. Κάποιος (μάλλον και πάλι Πυθαγόρειος, αλλά με επιρροές από τον Πλάτωνα) γράφει μία μονογραφία χρησιμοποιώντας κάποια θεωρία αναλογιών, αλλά ουσιαστικά δίδοντας το κείμενο που βρίσκουμε στα Στοιχεία.

Κεφάλαιο 10

Πηγές των μαθηματικών VI: Τα πολύγωνα μετά τον Ευκλείδη

10.1 Τί χάσαμε στο Βιβλίο δ′

Στην Πρόταση δ′ 16 ο Ευκλείδης κατασκευάζει ένα κανονικό 15-γωνο εναποθέτοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε ένα κανονικό πεντάγωνο (Σχήμα 10.1). Πεπλεγμένη σε αυτή τη λύση είναι η παρακάτω γενική αρχή:

Εάν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό r-γωνο και ένα κανονικό s-γωνο και επιπλέον γνωρίζουμε αριθμούς x, y τέτοιους ώστε $xr+ys=1$, τότε μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε ένα κανονικό rs-γωνο.

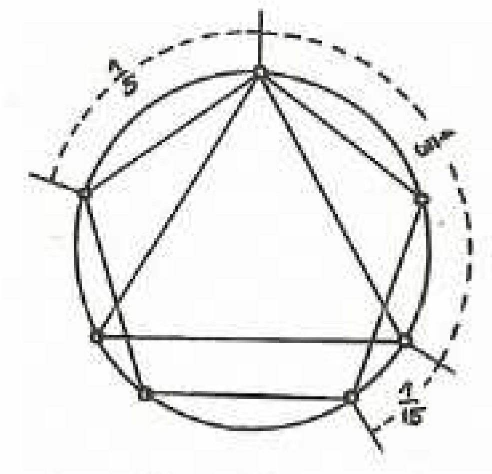
Χρειαζόμαστε τόξο ίσο με το $1/rs$ του κύκλου και x, y όπως παραπάνω. Τότε,

$$\frac{1}{rs} = \frac{xr+ys}{rs} = x\frac{1}{r} + y\frac{1}{s}.$$

Άρα, ο συνδυασμός αυτός δίδει το ζητούμενο τόξο. Στην περίπτωση του 15-γώνου είναι

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

Εφ′ όσον για κάθε αριθμούς r, s με μέγιστο κοινό διαιρέτη $(r, s) = 1$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο (ζ′ 1,2) και να βρούμε x, y με την ζητούμενη ιδιότητα, οδηγούμαστε εύκολα στην περίπτωση (3) του καταλόγου της επόμενης παραγράφου. Εννοείται, ότι η γενική μορφοποίηση είναι σύγχρονη. Ο Ευκλείδης δεν είχε κανένα λόγο να παραθέσει την γενική αρχή (3)· του χρειάζεται μόνο η ειδική περίπτωση που διαπραγματεύεται.



Σχήμα 10.1: Η κατασκευή του κανονικού δεκαπενταγώνου.

10.2 Τι γνώριζε ο Ευκλείδης

Μπορούμε με τις οποιεσδήποτε επιφυλάξεις να θεωρήσουμε ότι ο Ευκλείδης 'γνώριζε' την (3) παρακάτω, και οπωσδήποτε και αυτός και ο προ-ευκλείδειος συγγραφέας του Βιβλίου δ΄ γνώριζαν τις τετριμμένες παρατηρήσεις (1) και (4):

1. Για κάθε $n > 1$, το κανονικό 2^n-γωνο είναι κατασκευάσιμο.

2. Τα κανονικά 3-γωνα και 5-γωνα είναι κατασκευάσιμα.

3. Εάν τα κανονικά r-γωνα και s-γωνα είναι κατασκευάσιμα και $(r, s) = 1$. τότε και το κανονικό rs-γωνο είναι κατασκευάσιμο.

4. Εάν το κανονικό n-γωνο είναι κατασκευάσιμο και ο k διαιρεί τον n, τότε και το κανονικό k-γωνο είναι κατασκευάσιμο.

Δεδομένων των (1)–(4), το πρόβλημα για το τυχαίο n ανάγεται σε δυνάμεις πρώτων p^i, $p \neq 2$. [1]

10.3 Τι έκανε ο Αρχιμήδης

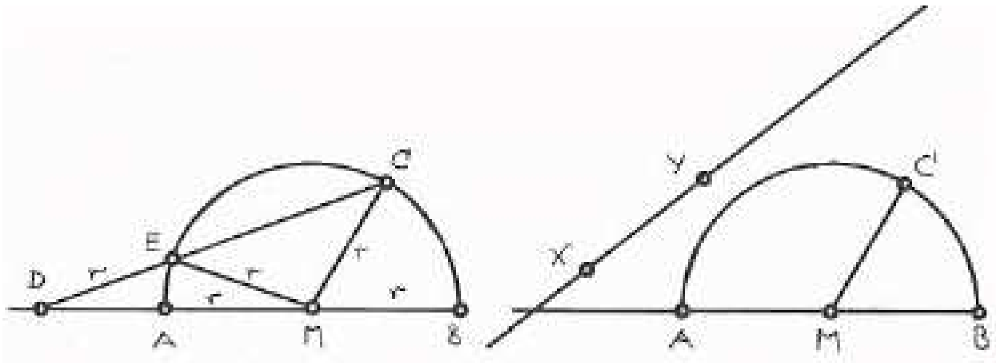
Με κάποια συγκεκριμένη παραλλαγή της μεθόδου της νεύσης, ο Αρχιμήδης κατασκεύασε το κανονικό επτάγωνο και με την συνήθη νεύση το κανονικό εννεάγωνο. Τούτη η νεύση δίνει την λύση της τριχοτόμησης της γωνίας:

Ας δούμε το σχήμα 10.2 και ας προχωρήσουμε με ανάλυση και σύνθεση:

Ανάλυση: Έστω ο κύκλος κέντρου M και ακτίνας r και η ευθεία DEC με τη απόσταση $CE = r$ δοθείσα.

Χρησιμοποιώντας τις α′ 32 και α′ 5 βρίσκουμε για τις α, β ότι

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle MDE + \angle MCD \\ &= \angle MDE + \angle MEC \\ &= \angle MDE + 2\angle MDE \\ &= 3\beta. \end{aligned}$$



Σχήμα 10.2: Η Αρχιμήδεια τριχοτόμηση γωνίας με νεύση.

Σύνθεση: Έστω δοθείσα γωνία $\alpha < \pi/2$. Χαράσσουμε απόσταση $XY = r$ στον κανόνα και τον γλιστράμε στη θέση όπου το X βρίσκεται στην προεκτεταμένη ευθεία AB, το Y είναι επάνω στον κύκλο και η XY περνά από το C. Η γωνία β είναι $\alpha/3$.

[1] Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής: Για κάθε $n > 1$ υπάρχουν πρώτοι $p_1, \ldots, p_j$ ξένοι μεταξύ τους και φυσικοί $m_1, \ldots, m_j$ τέτοιοι ώστε $n = p_1^{m_1} \ldots p_j^{m_j}$.

Εφαρμογή: Τριχοτομείται γωνία $\pi/3$ ώστε $\beta = \pi/9$. Με την 2β στο κέντρο του κύκλου κατασκευάζεται το κανονικό εγγεγραμμένο εννεάγωνο.

10.4 Τι απέδειξε ο Gauss

Ο Carl Friedrich Gauss (1777–1855) αρχίζει το επιστημονικό του ημερολόγιο με την παρακάτω καταχώρηση.

Το θεμέλιο στο οποίο βασίζεται η διαίρεση του κύκλου, είναι η γεωμετρική του διαίρεση σε δεκαεπτά μέρη, και ούτω καθ΄ εξής.

Ο έφηβος Gauss δεν είχε βρει μόνο την κατασκευή του κανονικού δεκαεπταγώνου, αλλά επίσης και τις γενικές αρχές πίσω απ΄ αυτήν. Στην πρώτη του δημοσίευση[2] γράφει:

Για ένα περιττό πρώτο p, το κανονικό p^i-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη εάν και μόνο εάν $i = 1$ και $p = 2^{2^k} + 1$, δηλαδή ο p είναι ένας αριθμός του Fermat.

Δεν είναι όλοι οι αριθμοί του Fermat πρώτοι. Λ.χ. οι αριθμοί $F_5, \dots F_{23}$ είναι γνωστό ότι είναι σύνθετοι. Κατά συνέπεια, από τη στιγμή που δεν είναι ακόμη γνωστό κανένα γενικό αποτέλεσμα για το πότε ένας αριθμός Fermat είναι πρώτος, το πρόβλημα κατασκευής του κανονικού εγγεγραμμένου n-γώνου παραμένει ανοικτό.[3]

10.5 Πως το έκανε ο Gauss

Θα παραθέσουμε τη μέθοδο του Gauss για την περίπτωση του κανονικου πενταγώνου. Στο μιγαδικό επίπεδο, το κανονικό n-γωνο παρίσταται από τις n-οστές ρίζες της μονάδας, δηλαδή από τις ρίζες της εξίσωσης

$$z^n - 1 = 0.$$

Τούτες οι ρίζες είναι οι

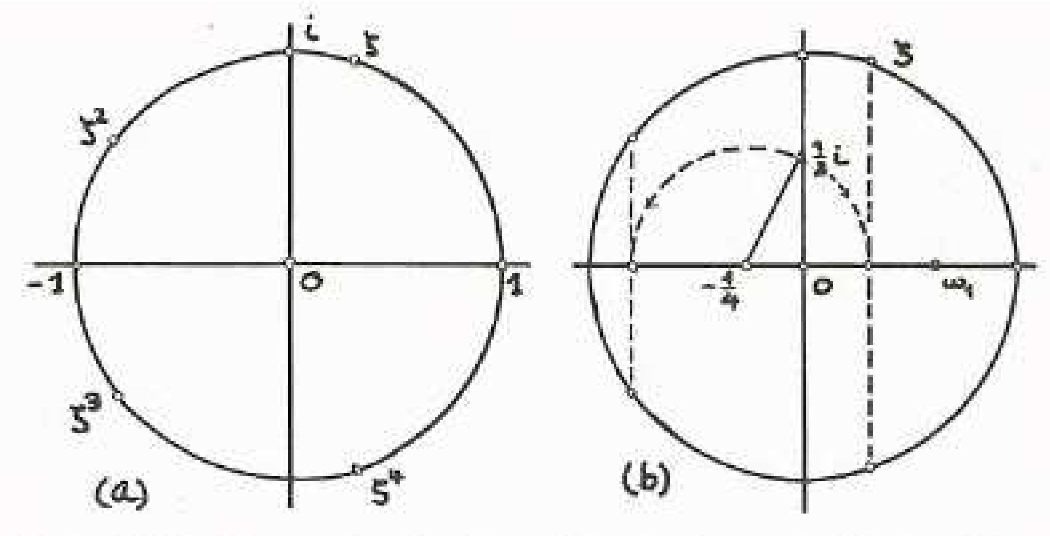
$$\zeta_k = \cos\frac{2\pi}{k} + \sin\frac{2\pi}{k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

[2]Disquisitiones Arithmeticae, Αριθμητικές Έρευνες, 1801.

[3]Σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss το κανονικό εννεάγωνο δεν είναι κατασκευάσιμο, πράγμα που δείχνει ότι η μέθοδος της νεύσης είναι ισχυρότερη από αυτή του κανόνα και του διαβήτη.

και επίσης ισχύει ότι αν $\zeta_1 = \zeta$ τότε $\zeta_k = \zeta^k$, $k = 2, \ldots, n$. Μολαταύτα, ο παραπάνω τύπος δεν βοηθά. Για την περίπτωση του πενταγώνου (Σχήμα 10.3) θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$



Σχήμα 10.3: Η μέθοδος του Gauss για το κανονικό πεντάγωνο.

Ο πρώτος παράγοντας δίδει την λύση $\zeta_1 = 1$ και δεν έχει άλλο ενδιαφέρον πλην του ότι σταθεροποιεί την θέση του πενταγώνου στον μοναδιαίο κύκλο. Επειδή όλες οι λύσεις είναι μη μηδενικές, διαιρούμε τον δεύτερο παράγοντα με z^2 και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ &= z^2 + 2 + z^{-2} + z + z^{-1} - 1 \\ &= (z + z^{-1})^2 + (z + z^{-1}) - 1. \end{aligned}$$

Με αυτό το μικρό τέχνασμα, θέτουμε $w = z + z^{-1}$ και καταλήγουμε στην τετραγωνική εξίσωση

$$w^2 + w - 1 = 0, \text{ που έχει λύσεις τις } \quad w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Άρα λοιπόν, οι πέμπτες ρίζες της μονάδας που είναι διαφορετικές του 1, ικανοποιούν τις

$$z + z^{-1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

Αν ζ είναι μία πέμπτη ρίζα της μονάδας διαφορετική του 1, τότε το ίδιο ισχύει για την ζ^2 και οι παραπάνω εξισώσεις δίδουν

$$\Re(\zeta) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \Re(\zeta^2) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

τα οποία είναι κατασκευάσιμα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10.3 (b): Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα 0, (κέντρο του κύκλου), $i/2$, $(-1)/4$ (κατασκευάσιμα). Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, η ακτίνα του είναι $\sqrt{5}/2$. Με κέντρο το $(-1)/4$ και με αυτή την ακτίνα, φέρεται κύκλος που τέμνει τον πραγματικό άξονα (τη διάμετρο του κύκλου που ορίζεται από τα $0, 1$) στα σημεία $\Re(\zeta)$ και $\Re(\zeta^2)$.

Απομένει να προσδιοριστεί το φανταστικό μέρος y του $\zeta = x + iy$. Επειδή $x^2 + y^2 = 1$, παίρνουμε

$$y_1 = \Im(\zeta) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}, \quad y_2 = \Im(\zeta^2) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Άρα η πλευρά f του κανονικού πενταγώνου και η διαγώνιος του d δίδονται από τις

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad d = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Η σύγκριση της εξίσωσης $w^2 + w - 1 = 0$ και αυτής που δίδεται στην δεύτερη ανάλυση του πενταγώνου, μας δίδει να καταλάβουμε ότι τούτη είναι η *αφηρημένη ουσία* του προβλήματος. Ο Gauss έφτασε εκεί ψάχνοντας το *γενικό* πρόβλημα και χρησιμοποιώντας το νέο εργαλείο των μιγαδικών· ο Ευκλείδης διαπραγματευόταν κάθε περίπτωση χωριστά. Η γενίκευση και η αφηρημένη διαπραγμάτευση έκαναν το πρόβλημα προσβάσιμο και την λύση διάφανη.

Κεφάλαιο 11

Στοιχείων Βιβλίο ε′: Η γενική θεωρία των αναλογιών

11.1 Οι αναλογίες έξω από τα μαθηματικά

Μία από τις κύριες ανακαλύψεις του Πυθαγόρα ήταν η σχέση μεταξύ των μουσικών αρμονικών και των λόγων των τμημάτων του μονοχόρδου· η απλούστερη ήταν 2:1 για την οκτάβα. Έχουν γραφεί πολλά για αυτό το θέμα.[1] Παρακάτω θα μιλήσουμε για την επιρροή τους στην αρχιτεκτονική και τις τέχνες.

Μέρος της γεωμετρικής ορολογίας έχει προέλθει από την οικοδομική τέχνη, όπου ήταν απαραίτητα τα ακριβή σχέδια. Γύρω στο 540 π.Χ. χτίστηκε ο ναός του Απόλλωνα στην Κόρινθο. Είναι ο παλαιότερος γνωστός ναός με καθαρή αναλογία

$$\text{μήκος} \ : \ \text{πλάτος} \ = \ \text{πλάτος} \ : \ \text{ύψος}.$$

Ο ναός του Διός στην Ολυμπία, χτισμένος γύρω στο 450 π.Χ. κυβερνάται από την αναλογία $1:2$. Ο ναός του Παρθενώνα, χτισμένος από τον Ικτίνο και τον Καλλικράτη στα 447-432 π.Χ. βρίθει από τον λόγο $9:4$, δηλαδή αυτόν των μικρότερων τετράγωνων αριθμών. Πράγματι είναι μεταξύ άλλων,

$$81 \ : \ 36 \ = \ \text{μήκος} \ : \ \text{πλάτος} \ = \ \text{πλάτος} \ : \ \text{ύψος} \ = \ 36 \ : 16.$$

Περίπου την ίδια εποχή, ο Πολύκειτος και ο Φειδείας, έγραψαν μία διατριβή για τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, με τίτλο *Κανών*, η οποία δυστυχώς χάθηκε. Ο Πλάτων στο *Σοφιστή* λέγει:

[1] Κοιτάξτε λ. χ. την ιστοσελίδα
http://www.musicheaven.gr/html/modules.php?name=News&file=article&sid=2190

Το τέλειο παράδειγμα (για την σημασία των αναλογιών) έγκειται στο ότι από αυτές, φτιάχνεται ένα αντίγραφο σύμμορφο με τις αναλογίες του πρωτοτύπου σε όλες τις τρεις διαστάσεις.

Ο Αριστοτέλης είχε τις αναλογίες σε μεγάλη εκτίμηση. Ακόμα και τη δικαιοσύνη την ορίζει σαν αναλογία στα *Ηθικά Νικομάχεια.*[2] Στο ίδιο βιβλίο ο Αριστοτέλης αναφέρει τις πιο τεχνικές διαδικασίες της εναλλαγής και της σύνθεσης του λόγου που θα εξηγηθούν παρακάτω στους Ορισμούς 12 και 14.

Κατά τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο,[3] οι αναλογίες είναι *ο ενοποιητικός δεσμός των μαθηματικών επιστημών*. Η επιδέξια χρήση των αναλογιών υπήρξε ένα κύριο εργαλείο των μαθηματικών έως την εποχή του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα που τις χρησιμοποίησαν με ανυπέρβλητο τρόπο.

Ίσως φαίνεται παράξενο, αλλά οι αναλογίες υπάρχουν και στην Καινή Διαθήκη. Το Κατά Ιωάννη Ευαγγέλιο ξεκινά ως εξής: *Εν αρχή ην ο Λόγος και ο Λόγος ην προς τον Θεόν και Θεός ην ο Λόγος. Ούτος ην αρχή προς τον Θεόν...*

11.2 Γενικά σχόλια περί του Βιβλίου ε΄

Στο Βιβλίο ε΄ δεν υπάρχουν διακριτές παράγραφοι. Έχει μόνο ένα αντικείμενο: την θεωρία των αναλογιών για γενικότερα μεγέθη. Ένα σχόλιο μας λέγει ότι τα θεωρήματα του Βιβλίο ε΄ είναι του Εύδοξου του Κνίδιου και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τους ορισμούς. Τρία είναι τα σημεία που θα υπογραμμίσουμε:

1. Το Βιβλίο ε΄ έχει τον πιο αφηρημένο χαρακτήρα από όλα τα άλλα βιβλία των Στοιχείων. Οι προτάσεις του εφαρμόζονται σε διάφορων ειδών μεγέθη όπως ευθείες, επιφάνειες, στερεά γωνίες, κ.λ.π. Λόγω του υψηλού επιπέδου των αφηρημένων ιδεών, το Βιβλίο ε΄ είναι το πιο κοντινό στις πλατωνικές ιδέες.

[2]Βέβαια, οι απόψεις του για την κοινωνική δικαιοσύνη και την κατανομή των φόρων είναι αρκετά διαφορετικές από τις σύγχρονες: Η δικαιοσύνη είναι *μία κατανομή χρημάτων από το δημόσιο ταμείο, που ακολουθεί τον ίδιο λόγο με αυτόν που έχουν οι αντίστοιχες συνεισφορές (του καθενός πολίτη προς το δημόσιο ταμείο) μεταξύ τους.*

[3]($\sim 250 - 200$ π.Χ.) Υπήρξε βιβλιοθηκάριος της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Φίλος του Αρχιμήδη, διατηρούσε αλληλογραφία με αυτόν. Είναι γνωστός για το *κόσκινό* του, μία διαδικασία που δίδει τους πρώτους αριθμούς μέχρι ένα δοθέντα φυσικό n, και για την μέτρηση -με σφάλμα λίγων χιλιομέτρων- του Ισημερινού της Γης με την χρήση σφαιρικής τριγωνομετρίας.

2. Το Βιβλίο ε′ είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα βιβλία των Στοιχείων. Θα μπορούσε να είναι είτε μονογραφία, είτε εισαγωγή κάποιων 'Στοιχείων' γραμμένων από τη σχολή του Ευδόξου. Η θέση του εντός του έργου του Ευκλείδη, ανοίγει την πύλη της γεωμετρίας της ομοιότητας στο Βιβλίο στ′.

3. Οπωσδήποτε, η αφηρημένη θεώρηση των αναλογιών, δεν θα μπορούσε να αποτελέσει την πρώτη διαπραγμάτευσή τους από τους Έλληνες μαθηματικούς. Μπορεί μόνο να εικασθεί, ότι ο Λέων και ο Ιπποκράτης θα παρέθεταν διαφόρων ειδών θεωρήματα επάνω στις αναλογίες στα δικά τους *Στοιχεία.*

Υπάρχουν δύο διαφορετικά θέματα που θα μας απασχολήσουν στην περαιτέρω συζήτηση του Βιβλίου ε′. Το πρώτο έχει να κάνει με την αφηρημένη φύση και τα λεπτά σημεία του ορισμού των μεγεθών που 'είναι στον ίδιο λόγο'. Το δεύτερο είναι ευκολότερο· αφορά στην εξοικείωση μας με τον διαισθητικό χαρακτήρα των διαφόρων προτάσεων που διατυπώνονται με αφηρημένο τρόπο. Αυτό θα το επιτύχουμε με την χρήση της άλγεβρας. Θα ασχοληθούμε πρώτα με το δεύτερο θέμα.

11.3 Οι αναλογίες σε σύγχρονη εκδοχή

Στο εξής όλα τα γράμματα θα αναπαριστούν μήκη τμημάτων και θα τα μεταχειριζόμαστε σαν (θετικούς) πραγματικούς αριθμούς.

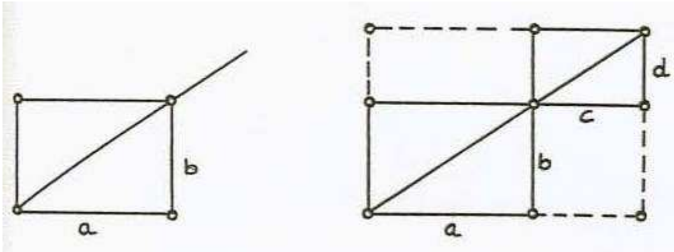
Αριθμητικά, μπορούμε να ορίσουμε ότι ο *λόγος* $a : b$ *του* a *προς το* b *είναι το κλάσμα* $\frac{a}{b}$ και έτσι

$$a : b = c : d \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Γεωμετρικά, και ακολουθώντας τον Ευκλείδη, αφήνουμε τον λόγο χωρίς ορισμό και απλώς τον αναπαριστούμε ως την *κλίση της διαγωνίου σε ένα ορθογώνιο πε πλευρές* a *και* b. Λέγουμε τότε ότι *τα* a, b *και* c, d *είναι στον ίδιο λόγο εάν είναι γύρω από την ίδια διαγώνιο* (Σχήμα 11.1.)

Βλέπουμε ότι το περίφημο Σχήμα της Πρότασης α′ 43 εμφανίζεται ξανά. Λόγω αυτής της Πρότασης έχουμε $ad = cb$. Λόγω και της Πρότασης ε′ 16 έχουμε επίσης $ad = cb$. Άρα, παίρνουμε αυτό που στο σχολείο μας μαθαίνουν ως 'χιαστί'

$$a : b = c : d \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$



Σχήμα 11.1: Ο γεωμετρικός ορισμός της ισότητας λόγων.

Ας δούμε λίγο την

Πρόταση ε′ 16.[4]

$$a : b = c : d \Leftrightarrow a : c = b : d.$$

Αριθμητική απόδειξη.

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Leftrightarrow ad = bc, \\ a : c = b : d &\Leftrightarrow ad = cb. \end{aligned}$$

Λόγω της μεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού των αριθμών, έχουμε $bc = cb$ και προκύπτει το ζητούμενο. □

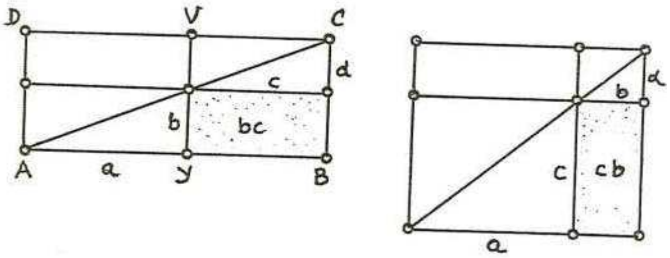
Στη σύγχρονη γεωμετρία, η μετάθετικότητα στον πολλαπλασιασμό των αριθμών είναι ισοδύναμη με την μεταθετικότητα στον πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων, πράγμα που θεσμοθετεί το ισχυρότερο γεωμετρικό αξώμα.[5] Έτσι, δεν είναι παράξενο που η ε′ 16 έχει σημαντικές εφαρμογές.

Το παρακάτω σχήμα μας δείχνει ότι η ε′ 16 δεν είναι προφανής· λ.χ. το τμήμα b μπορεί να τοποθετηθεί με δύο τρόπους.

Ένα άλλο σημαντικό μέσο για τον χειρισμό των αναλογιών είναι η συνεπαγωγή *εξ ισότητας*:

[4] Θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την Πρόταση αυτή και ως εξής: *Η αναλογία παραμένει αναλλοίωτη από την εναλλαγή των μέσων της.*

[5] Θεώρημα του Πάππου.

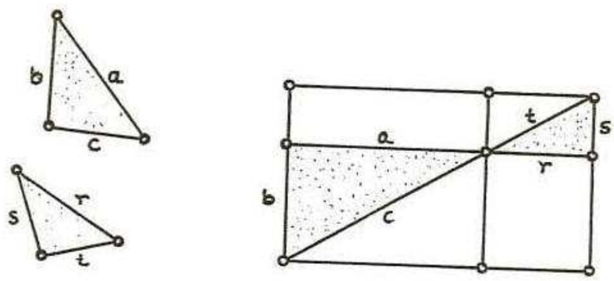


Σχήμα 11.2: Πρόταση ε′ 16.

Πρόταση ε′ 22.

$$\left.\begin{array}{c} a : b = r : s \\ \text{και} \\ b : c = s : t \end{array}\right\} \Rightarrow a : c = r : t.$$

Αριθμητικά, αυτό είναι απλούστατο. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και απαλείφουμε. Γεωμετρικά όμως, είναι πολύ πιο ενδιαφέρον. Έστω δύο όμοια τρίγωνα με πλευρές a, b, c και r, s, t. (Σχήμα 11.3.)



Σχήμα 11.3: Εξ ισότητος!.

Τα τρία ζεύγη των αντίστοιχων γωνιών είναι ίσα. Επειδή το άθροισμα των γωνιών είναι αναλλοίωτο, αρκεί η ισότητα δύο ζευγών. Αλλά ομοιότητα σημαίνει επίσης ότι οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών είναι ίσοι.[6] Η συνεπαγωγή εξ ισότητας μας λέγει ότι αρκούν να είναι ίσοι οι δύο λόγοι.

[6]Πρόταση στ′ 4 και 5.

11.4 Οι ορισμοί του Βιβλίου ε′

Ορισμοί

1. *Ένα μέγεθος είναι* **μέρος** *ενός μεγέθους, το μικρότερο του μεγαλύτερου, αν μετρά το μεγαλύτερο.*

2. *Το μεγαλύτερο είναι* **πολλαπλάσιο** *του μικρότερου, αν μετράται από το μικρότερο.*

Ο Ευκλείδης δεν καθορίζει τι είναι το μέγεθος, και ορίζει το ‘μέρος ’ και το ‘πολλαπλάσιο από τη ‘μέτρηση’ η οποία επίσης δεν ορίζεται. Στις Προτάσεις ε′ 1-6 αναπτύσσει τις ιδιότητες της ‘μέτρησης ’ ή του πολλαπλασιασμού ενός μεγέθους a με ένα φυσικό αριθμό n έτσι ώστε να πάρει τον na.

3. *Ένας* **λόγος** *είναι ενός είδους σχέση μεταξύ δύο ομογενών μεγεθών που αφορά το πηλίκο τους.*

Πάλι, ο λόγος φαίνεται να είναι τόσο θεμελιώδης για τον Ευκλείδη, όπως και τα σύνολα για ένα σύγχρονο μαθηματικό. Το τι σημαίνει ‘ομογενή μεγέθη’ προκύπτει από συγκεκριμένα παραδείγματα και γίνεται πιο συγκεκριμένος στον επόμενο ορισμό. Οι γωνίες είναι ομογενή μεγέθη· το ίδιο και οι ευθείες, τα εμβαδά κ.λ.π. Το ‘πηλίκο’ έχει να κάνει με μία γραμμική διάταξη των ομογενών μεγεθών, και πίσω από τον Ορισμό 3 κρύβεται ένα αξίωμα ότι η διάταξη είναι Αρχιμήδεια. Αυτό σημαίνει ότι τα απειροστά μεγέθη όπως οι κερατοειδείς γωνίες εξαιρούνται. [7] Σε σύγχρονη γλώσσα, ο παρακάτω Ορισμός 4 μεταφράζεται ως εξής: Ο λόγος $a : b$ υπάρχει εάν υπάρχουν αριθμοί n, m τέτοιοι ώστε $na > b$ και $mb > a$.

4. *(Δύο) Μεγέθη λέγεται ότι* **έχουν λόγο** *το ένα προς το άλλο, εάν είναι δυνατό όταν πολλαπλασιαστούν*[8] *να υπερβούν το ένα το άλλο.*

5. *Μεγέθη λέγεται ότι* **είναι στον ίδιο λόγο**, *το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν οποιαδήποτε ισοπολαπλάσια και αν ληφθούν του πρώτου και του τρίτου είναι αντίστοιχα ίσα με γαλύτερα, ή μικρότερα από οποιαδήποτε ισοπολαπλάσια και αν ληφθούν του τρίτου και του τέταρτου, καθ′ οιονδήποτε τρόπο και αν γίνει ο πολλαπλασιασμός αυτός.*

6. *Μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο, καλούνται* **ανάλογα**.

Ο Ορισμός 5 είναι κεντρικός για το Βιβλίο ε′. Ας δούμε τι λέγει αλγεβρικά:

[7] Με άλλα λόγια, λόγοι όπως $\frac{0}{0}$ εξαιρούνται.

[8] Το καθένα με κάποιο φυσικό αριθμό.

Έστω a, b, c, d τέσσερα μεγέθη και m, n φυσικοί αριθμοί. Τότε είναι $a : b = c : d$ αν για κάθε m, n

$$\begin{aligned} na > mb &\Leftrightarrow nc > md, \\ na = mb &\Leftrightarrow nc = md, \\ na < mb &\Leftrightarrow nc < md. \end{aligned}$$

Ας πάμε ένα βήμα παρακάτω και ας το συνδέσουμε αυτό με τη σύγχρονη θεωρία των πραγματικών αριθμών. Ας είναι $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} a : b &= ab^{-1} = x, \\ c : d &= cd^{-1} = y. \end{aligned}$$

Τότε, για την πρώτη από τις τρεις σχέσεις του ορισμού έχουμε,

$$\begin{aligned} & na > mb \Leftrightarrow nc > md, \\ & a > \frac{m}{n}b \Leftrightarrow c > \frac{m}{n}d, \\ & x = ab^{-1} > \frac{m}{n} \Leftrightarrow y = cd^{-1} > \frac{m}{n} \text{ για κάθε ρητό } r = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Στη γλώσσα των συνόλων αυτό μας λέγει ότι οι θετικοί αριθμοί x, y ορίζονται να είναι ίσοι εάν το σύνολο όλων των ρητών $r < x$ είναι ίσο με το σύνολο όλων των ρητών $r < y$. Έτσι, ισότητα θετικών αριθμών ορίζεται ως ισότητα συνόλων. Τούτο ομοιάζει με την κατασκευή του Dedekind των πραγματικών, με μία ουσιώδη διαφορά: Ο Ευκλείδης ξεκινά πάντοτε από δοθέντα μεγέθη, ενώ ο Dedekind αγνοεί την εκ των προτέρων ύπαρξη (κάποιων) πραγματικών αριθμών και με σημείο εκκίνησης τους ρητούς *δημιουργεί*[9] τους πραγματικούς.

11.5 Οι Προτάσεις του Βιβλίου ε′

Οι πρώτες έξι προτάσεις του Βιβλίου ε′ θεωρούν πολλαπλάσια μεγεθών. Είναι προκαταρκτικές για τα κύρια θεωρήματα περί λόγων και αναλογιών. Σε σύγχρονη γλώσσα, για μεγέθη a, b, c, d και φυσικους αριθμούς m, n, r, s:

1. $n(a + b) = na + nb$,

[9] Η φιλοσοφία την οποία ασπαζόταν ο Dedekind δεν είχε καμμία σχέση με την πλατωνική. Κατά τον Πλάτωνα, όλα είναι ήδη δημιουργημένα, και εμείς απλώς τα ανακαλύπτουμε.

2. $(n+m)a = na + ma$,
3. $n(ma) = (nm)a$,
4. $a : b = c : d \Rightarrow (ra) : (sb) = (rc) : (sd)$,
5. $r(a-b) = ra - rb$, (αν $a > b$),
6. $(r-s)a = ra - sa$, (αν $r > s$).

Τα παραπάνω αποτελούν κάποια από τα σύγχρονα αξιώματα των διανυσματικών χώρων. Τα μεγέθη παίζουν το ρόλο των διανυσμάτων και οι φυσικοί των πραγματικών. Η εννοιολογική διαφορά μεταξύ αριθμών και διανυσμάτων εξηγεί μερικώς γιατί ο Ευκλείδης δεν εφαρμόζει αυτή την αφηρημένη θεωρία στο Βιβλίο στ΄ όπου ξεκινά από την αρχή τις αναλογίες *για τους αριθμούς*. Η δυσκολία είναι η ίδια με το να περιγραφεί το $\mathbb{R}$ ως ο διανυσματικός χώρος όπου τα στοιχεία του είναι ταυτόγχρονα αριθμοί και διανύσματα. Στις Προτάσεις στ΄ 7-11 οι λόγοι χειρίζονται σαν μαθηματικά αντικείμενα, αλλά ο Ευκλείδης *ποτέ* δεν θεωρεί ένα λόγο ως ένα ρητό αριθμό.

Προτάσεις ε΄ 7/9.

$$\begin{aligned} a = b \ &\Leftrightarrow\ a : c = b : c. \\ c = d \ &\Leftrightarrow\ a : c = a : d. \end{aligned}$$

Προτάσεις ε΄ 8/10.

$$a > b \ \Leftrightarrow\ a : c > b : c.$$

Πρόταση ε΄ 11.

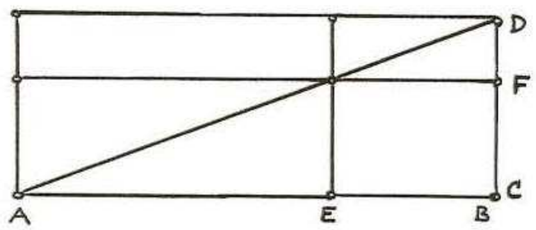
Η ισότητα των λόγων είναι μεταβατική.

Οι Προτάσεις ε΄ 12–25 είναι περί του χειρισμού των αναλογιών· είδαμε μερικά παραδείγματα στην προηγούμενη παράγραφο. Οι αποδείξεις μερικές φορές είναι ιδιαίτερα τεχνικές. Για να πάρουμε μία γεύση θα δούμε τις Προτάσεις ε΄ 17 και 19, ξεκινώντας από την

Πρόταση ε′ 19.

Εάν ένα όλο είναι ως προς ένα όλο όπως ένα αφαιρεθέν τμήμα είναι ως προς ένα αφαιρεθέν τμήμα, το υπόλοιπο θα είναι προς το υπόλοιπο όπως το όλο προς το όλο.

Με την γεωμετρική θεώρηση το καταλαβαίνουμε αμέσως:[10]



Σχήμα 11.4: Γεωμετρική ερμηνεία της Πρότασης ε′ 19.

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την γλώσσα των τμημάτων: έστω AB το όλο μέγεθος και τμήμα AE αφαιρείται με υπόλοιπο $EB\ldots$ τότε

$$AB : CD = BE : DF \Rightarrow EB : FD = AB : CD.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιεί τις ε′ 11, 16 (εναλλαγή) και 17 αλλά όχι τον Ορισμό 5 αναλυτικά. Αυτό το κάνει στην

Πρόταση ε′ 17.

Εάν μεγέθη είναι ανάλογα συντιθέμενα, τότε είναι και ανάλογα χωριζόμενα.[11]

Πάλι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την γλώσσα των τμημάτων και το σχήμα
Με τον συμβολισμό του σχήματος έχουμε $AE+EB = AB$ και $CF+FD = CD$. Ο ισχυρισμός είναι

$$AE : BE = CD : DF \Rightarrow AE : EB = CF : FD.$$

[10] Παραλλαγή αυτής της Πρότασης είναι η ε′ 26.

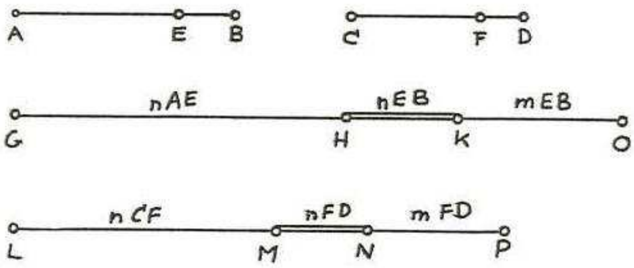
[11] Μεταφράζουμε το *συγκείμενα* και το *διαιρεθέντα* του Ευκλείδη σε συντιθέμενα και χωριζόμενα αντίστοιχα. Αυτή η μετάφραση είναι ακριβώς στο πνεύμα του Heath που χρησιμοποιεί τις λατινικές λέξεις composendo και separendo αντίστοιχα.

Απόδειξη.

Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Ευκλείδη στη σύγχρονη γλώσσα. Πρέπει να ελέγξουμε τον Ορισμό 5 για τα AE, EB, CF, DF δηλαδή

$$nAE > mEB \;\Rightarrow\; nCF > mFD, \text{ και όμοια για τα } <, = . \tag{11.1}$$

Ως ένα είδος γέφυρας μεταξύ των παραπάνω μεγεθών, ο Ευκλείδης εισάγει τα nEB, nFD.



Σχήμα 11.5: Απόδειξη της Πρότασης ε′ 17: οι γέφυρες.

Στο Βήμα 1 της απόδειξης χρησιμοποιεί τις ε′ 1,2 για να δείξει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} nAE + nEB &= nAB \\ mEB + nEB &= (m+n)EB \\ nCF + nFD &= nCD \\ mFD + nFD &= (m+n)FD. \end{aligned}$$

Στο Βήμα 2, δια μέσου της υπόθεσης

$$AB : BE = CD : DF,$$

των παραπάνω πολλαπλασίων και του Ορισμού 5 παίρνει

$$nAB > (n+m)EB \Rightarrow nCD > (n+m)FD \tag{11.2}$$

και όμοια για τα $=$ και $<$.
Βήμα 3. Γράφουμε τη σχέση 11.1 ως $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ και έστω επίσης

$$\mathcal{C} : nAB > (n+m)EB.$$

Τα nEB αφαιρούνται από τα δ΄ψο μέλη και προκύπτει η

$$\mathcal{A} : nAE > mEB.$$

Βήμα 4. Πάλι από την $\mathcal{C}$ έπεται χρησιμοποιώντας την 11.2 ότι

$$nCD > (n + m)FD.$$

Τα nCD αφαιρούντα από τα δύο μέλη και προκύπτει η

$$\mathcal{B} : nCF > mFD.$$

Βήμα 5. Από το Βήμα 3 είναι $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ και από το Βήμα 4 είναι $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$. Άρα λέγει ο Ευκλείδης, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. □

Το εμφανές λογικό λάθος στο Βήμα 5 της απόδειξης δεν είναι σοβαρό και διορθώνεται ως εξής: Στο Βήμα 3, ξεκινάμε από την $\mathcal{A}$ και δείχνουμε την $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$. Από το Βήμα 4 είναι $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$, άρα $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Πέραν τούτου, η απόδειξη είναι αυστηρή. Υπάρχει ο Ορισμός που πρέπει να ελεγχθεί, και συμπεράσματα ‘εκ του σχήματος ’ δεν επιτρέπονται. Επίσης, έχει μία διαισθητική, ή δημιουργική συνιστώσα. Σίγουρα ο ορισμός πρέπει να ελεγχθεί. Αλλά πώς; Σε αυτό το σημείο η ιδέα να χρησιμοποιηθούν τα δύο τμήματα γέφυρες $HK = nEB$ και $MN = nFD$ οδηγεί στη λύση. Κάποιος ενδεχομένως να μπορεί να κάνει κάποιου είδους ανάλυση αυτής της ιδέας, όμως γενικά, δεν υπάρχει συγκεκριμένη διαδικασία που να βοηθά. Η λογική και η δημιουργική συνιστώσα διαπλέκονται εδώ σε μία καλή μαθηματική απόδειξη.

Κεφάλαιο 12

Στοιχείων Βιβλίο στ′: Ομοιότητα

12.1 Τα περιεχόμενα του Βιβλίου στ′

Ορισμοί	Ορισμοί της ομοιότητας ευθυγράμμων σχημάτων.
Πρόταση 1	Το βασικό θεώρημα.
Προτάσεις 2–8	Α: Ομοιότητα τριγώνων.
Προτάσεις 9–13	Β: Ανάλογη διαίρεση τμημάτων.
Προτάσεις 14–17	Γ: Αναλογίες και εμβαδά.

Προτάσεις 18–22	Δ: Όμοια ευθύγραμμα σχήματα.
Πρόταση 23	Σύνθετοι λόγοι.
Προτάσεις 24–30	Ε: Η εφαρμογή των εμβαδών.
Προτάσεις 31–31	Διάφορα.

12.2 Ορισμοί

1. Όμοια σχήματα είναι αυτά που έχουν τις γωνίες αντίστοιχα ίσες και τις *περί*[1] τις ίσες γωνίες αντίστοιχες πλευρές ανάλογες.

2. Μία ευθεία λέγεται ότι τέμνεται σε άκρο και μέσο λόγο όταν όλη προς το μεγαλύτερο τμήμα είναι ίση με το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο.[2]

3. Ύψος παντός σχήματος είναι η αγόμενη από την κορυφή κάθετος προς τη βάση.[3]

[1] Ο Ευκλείδης δεν λέγει ότι οι αντίστοιχες πλευρές είναι αυτές που υποτείνονται από τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.

[2] Και πάλι η χρυσή τομή. Αν a είναι το όλο μήκος και x το μεγαλύτερο τμήμα, έχουμε

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Η θετική λύση της εξίσωσης αυτής (για $a = 1$) είναι ο αριθμός του Fibonacci

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

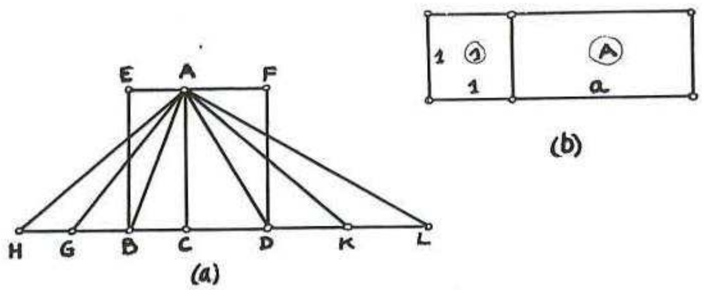
[3] Ο Αριστοτέλης δεν χρησιμοποιεί τον όρο, αλλά προτιμά το *κάθετος*.

12.3 Η βάση της γεωμετρίας της ομοιότητας

Το βασικό θεώρημα του Βιβλίου στʹ δείχνει αρκετά αθώο, αλλά είναι το θεμέλιο της Ευκλείδειας γεωμετρίας της ομοιότητας.

Πρόταση στʹ 1.

Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που είναι κάτω από το ίδιο ύψος είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους.[4]



Σχήμα 12.1: (a) Πρόταση στʹ 1. (b) Ο ορισμός του εμβαδού.

Έστω $\triangle_1 = \triangle ABC$ και $\triangle_2 = \triangle ACD$ δύο τρίγωνα κάτω από το ίδιο ύψος. (Σχήμα 12.1 (a)). Τότε

$$\text{Εμβαδόν } \triangle ABC : \text{Εμβαδόν } \triangle ACD = \text{Μήκος } BC : \text{Μήκος } CD.$$

Για την απόδειξη πρέπει να βεβαιωθεί ο ορισμός 5 του βιβλίου εʹ. Αν $HC = nBC$ τότε το $\triangle HCA$ θα έχει εμβαδόν $n(\text{Εμβαδόν}\triangle BCA)$. Το ίδιο επιχείρημα χρησιμοποιείται για τα CD και το $\triangle CDA$. Άρα,

$$nBC > mCD \Rightarrow n\ (\text{Εμβαδόν } \triangle BCA) > m\ (\text{Εμβαδόν } \triangle CDA), \quad \text{κλπ.}$$

Σχόλιο. Το κύριο στην Πρόταση αυτή είναι ότι συνδέει μεγέθη διαφορετικού είδους: εμβαδά και μήκη. Ας χρησιμοποιήσουμε προς στιγμή σύγχρονη

[4] Ώς συνήθως, λέγοντας 'τρίγωνα' και 'παραλληλόγραμμα' ο Ευθκλείδης εννοεί τα εμβαδά τους.

ορολογία. Έστω $a = BC$ και $b = CD$ οι βάσεις των τριγώνων με κοινό ύψος h. Τότε

$$\triangle_1 = \frac{1}{2}ah, \quad \text{και} \quad \triangle_2 = \frac{1}{2}bh$$

και η συνεπαγωγή $\triangle_1 : \triangle_2 = a : b$ είναι προφανής.

Υπάρχει όμως ένα πολύ λεπτό σημείο και στη σύγχρονη παρουσίαση της γεωμετρίας και σε αυτή των Στοιχείων. Ο πιο πάνω τύπος προκύπτει από την Πρόταση στ′ 1 αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει!

Γιατί όμως; Λόγω της Πρότασης α′ 41 ο τύπος για το εμβαδόν του τριγώνου προκύπτει αμέσως από τον τύπο για το εμβαδόν του ορθογωνίου. Περιοριζόμαστε λοιπόν στα ορθογώνια· ας είναι ορθογώνιο μήκους a και ύψους 1. Αντιμετωπίζουμε τώρα το εξής ερώτημα: Τι σημαίνει να μετράμε ένα ορθογώνιο (ή τι σημαίνει να μετράμε ένα τμήμα); Κάποιος σταθεροποιεί ένα μοναδιαίο τμήμα OE και ψάχνει για ένα πραγματικό a τέτοιον ώστε $AB = aOE$ δηλαδή

$$AB : OE = a : 1.$$

Είδαμε πως αυτό συνδέεται με τη θεωρία των πραγματικών αριθμών στη συζήτηση του Ορισμού 5 του Βιβλίου ε′. Η Πρόταση στ′ 1 κάνει ένα βήμα παραπάνω. Σταθεροποιώντας το OE σημαίνει ότι σταθεροποιείται το μοναδιαίο τετράγωνο στο οποίο αντιστοιχεί εμβάδόν (μέτρου) 1. Μέτρηση ορθογωνίου σημαίνει μέτρησή του ως πολλαπλάσιο του μοναδιαίου τετραγώνου.[5] Οι δυσκολίες στην στ′ 1 προκύπτουν από τα άρρητα τμήματα. Ως συνήθως, ο Ευκλείδης σιωπά περί αυτού–ούτε καν έχει αναφέρει την έννοια μέχρι στιγμής. Στο Σχήμα 12.1 (b) βλέπουμε πως ένα άρρητο τμήμα a, λαμβανόμενο ως όριο κλασμάτων m/n, οδηγεί στο ίδιο πολλαπλάσιο A του μοναδιαίου τετραγώνου.

12.4 Τα βασικά θεωρήματα της γεωμετρίας της ομοιότητας

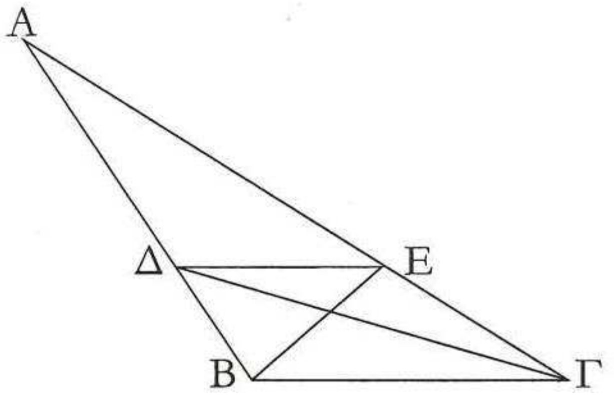
Το θεμελιώδες θεώρημα στ′ 1 χρησιμοποιείται άμεσα για την απόδειξη του θεωρήματος των αναλόγων τμημάτων που είναι το καθολικό εργαλείο στη γεωμετρία της ομοιότητας.

[5]Δηλαδή, νέτρηση των πλευρών σημαίνει το πέρασμα από το 2–διάστατο μέτρο στο 1–διάστατο μέτρο. Η Πρόταση στ′ 1 με άλλα λόγια είναι ο πρώτος αξιοσημείωτος πρόλογος κατασκευής μέτρων γινομένων στη θεωρία μέτρου.

Πρόταση στ′ 2.

Εάν σε τρίγωνο αχθεί ευθεία παράλληλη με μία από τις πλευρές του, τότε τέμνει ανάλογα τις άλλες πλευρές. Και εάν οι πλευρές του τριγώνου τμηθούν ανάλογα, η ευθεία που ενώνει τα σημεία τομής είναι παράλληλη με τη λοιπή πλευρά.

Διότι ας έχει αχθεί παράλληλη η ΔΕ στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ· λέγω ότι η ΒΔ προς τη ΔΑ είναι όπως η ΓΕ προς την ΕΑ.



Σχήμα 12.2: Πρόταση στ′ 2.

Απόδειξη.

Ας έχουν συνδεθεί οι ΒΕ, ΓΔ.

($\Rightarrow$) Άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΓΔΕ. Διότι έχουν την ίδια βάση ΔΕ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων.[6]

Και το ΑΔΕ είναι ένα άλλο τρίγωνο. Τα ίσα μεγέθη έχουν πρός το ίδιο μέγεθος τον ίδιο λόγο.[7] Άρα, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι προς το ΑΔΕ όπως το ΓΔΕ προς το τρίγωνο ΑΔΕ.

Αλλά το τρίγωνο ΒΔΕ είναι προς το τρίγωνο ΑΔΕ όπως η ΒΔ προς την ΔΑ, διότι βρίσκονται κάτω από το ίδιο ύψος, που άγεται από το Ε κάθετα στην ΑΒ· είναι το ένα προς το άλλο όπως οι βάσεις τους. [8] Για τους ίδιους λόγους,

[6]Πρόταση α′ 38.
[7]Πρόταση ε′ 7.
[8]Πρόταση στ′ 1.

το τρίγωνο ΓΔΕ είναι προς το ΑΔΕ όπως η ΓΕ προς την ΕΑ, και άρα όπως η ΒΔ προς την ΔΑ είναι και η ΓΕ προς την ΕΑ. [9]

($\Leftarrow$) Έστω ότι έχουν τμηθεί οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, ΑΒ και ΑΓ σε ανάλογα μέρη στο Δ, δηλαδή η ΒΔ προς την ΔΑ είναι όπως η ΓΕ προς την ΑΕ, και ας έχει συνδεθεί η ΔΕ. Λέγω ότι η ΔΕ είναι παράλληλη με την ΒΓ.

Συνεχίζουμε με σύγχρονη ορολογία για ευκολία: Είναι

$$\triangle \mathrm{B}\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta : \Delta\mathrm{A}, \quad \triangle \Gamma\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{E} : \mathrm{EA}$$

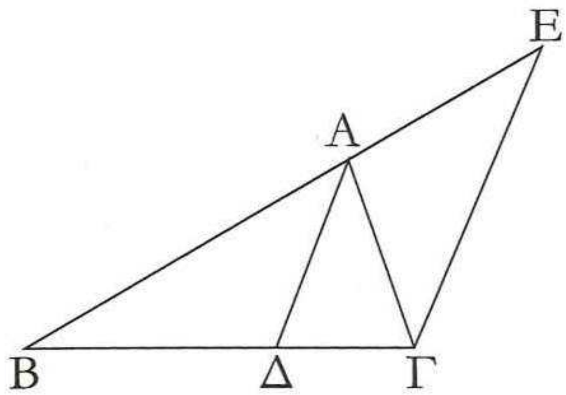
από την στ΄ 1. Άρα

$$\triangle \mathrm{B}\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E} = \triangle \Gamma\Delta\mathrm{E} : \triangle \mathrm{A}\Delta\mathrm{E}.$$

Όμως τότε[10]

$$\triangle \Gamma\Delta\mathrm{E} = \triangle \mathrm{B}\Delta\mathrm{E}$$

και τα τρίγωνα είναι στην ίδια βάση. Άρα,[11] ΔΕ‖ΒΓ. □



Σχήμα 12.3: Πρόταση στ΄ 3.

Η παρακάτω είναι γνωστή και ως θεώρημα της διχοτόμου (Σχήμα 12.3):

Πρόταση στ΄ 3.

[9] Πρόταση ε΄ 11.
[10] Πρόταση ε΄ 9.
[11] Πρόταση α΄ 39.

Εάν διχοτομηθεί γωνία τριγώνου και η τέμνουσα την γωνία τέμνει και τη βάση, τα τμήματα της βάσης θα έχουν τον ίδιο λόγο με αυτόν των λοιπών πλευρών του τριγώνου. Και εάν τα τμήματα της βάσης έχουν τον ίδιο λόγο με αυτόν των λοιπών πλευρών του τριγώνου, η ευθεία από την κορυφή πρός την τομή διχοτομεί την γωνία του τριγώνου.

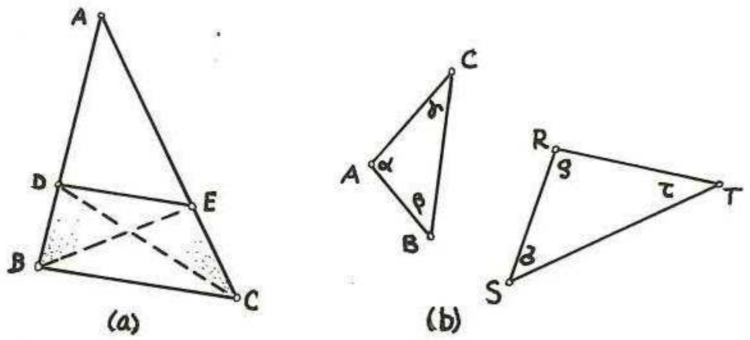
Απόδειξη.

(⇒) Φέρεται η ΕΓ‖ΑΔ. Άρα ∠ΑΓΕ=∠ΓΑΔ=∠ΒΑΔ=∠ΑΕΓ και ΑΓ=ΑΕ. Άρα,

$$\mathrm{B\Delta : \Delta\Gamma = AB : AE = AB : A\Gamma}.$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται παρόμοια. □

Προτάσεις 4/5.



Σχήμα 12.4: Προτάσεις στ′ 4/5.

Οι Προτάσεις 4/5 συνοψίζονται στο παρακάτω συμπέρασμα. Έστω δύο τρίγωνα με πλευρές a, b, c και r, s, t και με γωνίες α, β, γ και ρ, σ, τ αντίστοιχα. Τότε

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\rho\\ \beta=\sigma\\ \gamma=\tau\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b:c=s:t\\ c:a=t:r.\\ a:b=r:s\end{array}\right.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι *εξ′ ισότητος* κάποια από τις τρεις σχέσεις μπορεί να παραληφθεί.

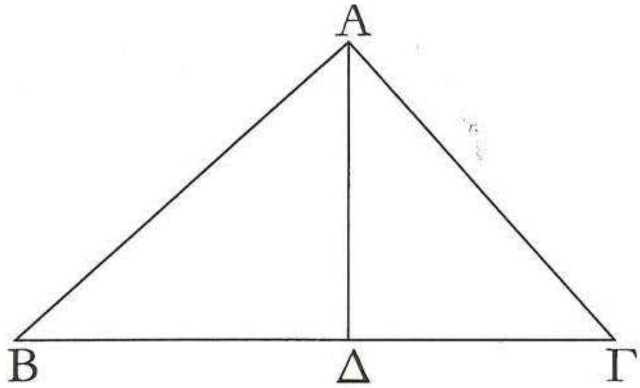
Προκύπτει ότι το σχήμα (όπως εκφράζεται με τις γωνίες) εκφράζεται μέσω αναλογιών. Στην εποχή που τα άρρητα τμήματα ήταν άγνωστα, οι λόγοι των τμημάτων εκφράζονταν με αριθμούς, και συνεπώς τα σχήματα των τριγώνων–αλλά και των σχημάτων που αποτελούνται από τρίγωνα–μπορούν να περιγραφούν με αριθμούς.[12] Όμως τα Στοιχεία δεν κάνουν μεταφυσική...

Οι Προτάσεις 4/5 είναι το πρώτο κριτήριο ομοιότητας. Οι Προτάσεις 6/7 είναι το δεύτερο κριτήριο ομοιότητας.

Προτάσεις 6/7.

$$\left.\begin{array}{r}\alpha=\rho\\ b:c=s:t\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}\beta=\sigma\\ c:a=t:r\end{array}\right..$$

Το παρακάτω είναι γνωστό και ως Θεώρημα του Ευδόξου.



Σχήμα 12.5: Πρόταση στ΄ 8: Θεώρημα του Ευδόξου.

Πρόταση στ΄ 8

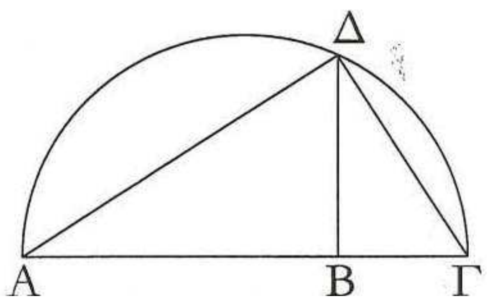
Εάν σε ορθογώνιο τρίγωνο αχθεί κάθετος από την ορθή γωνία προς τη βάση, τα τρίγωνα γύρω από την κάθετο είναι και τα δύο όμοια προς το όλο τρίγωνο και μεταξύ τους.

Η απόδειξη είναι άμεση μέσω των κριτηρίων ομοιότητας. Μία άμεση συνέπεια της Πρότασης στ΄ 8 είναι η Πρόταση στ΄ 13 για το πως βρίσκουμε τον μέσο ανάλογο δύο τμημάτων.

Πρόταση στ΄ 13.

Να βρεθεί ο μέσος ανάλογος δύο δοθέντων τμημάτων.

[12]Πυθαγόρας: τα πάντα είναι αριθμός.



Σχήμα 12.6: Πρόταση στʹ 13: Εύρεση του μέσου αναλόγου.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τα ΑΒ, ΒΓ σε μία ευθεία και φέρουμε το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΓ. Έστω η ΒΔ κάθετη στην ΑΓ στο Δ. Επειδή η γωνία ΑΔΓ είναι ορθή έχουμε τα όμοια τρίγωνα της στʹ 8. Άρα

$$\mathrm{AB} : \mathrm{B}\Delta = \mathrm{B}\Delta : \mathrm{A}\Gamma.$$

□

Ας παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο πως ο τετραγωνισμός τετραπλεύρου της Πρότασης βʹ 14 προκύπτει από την Πρόταση στʹ 13. Αν ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο, τότε βρίσκουμε τους μέσους ανάλογους κάθε δύο διαδοχικών πλευρών και πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις σύμφωνα με τις Προτάσεις εʹ 16/17.[13]

Οι υπόλοιπες προτάσεις του Μέρους Β του Βιβλίου στʹ δείχνουν πως τέμνουμε τμήμα όμοια με δοθέν τετμημένο τμήμα και πως βρίσκουμε τον τρίτο και τον τέταρτο ανάλογο σε δοθέντα τμήματα.

[13] Ο Αριστοτέλης ήξερε και τις δύο αποδείξεις. Λέγει στο *Περί Ψυχής:*

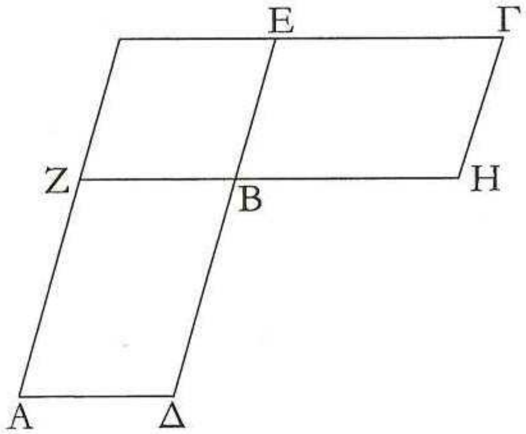
Για παράδειγμα, τι είναι ο 'τετραγωνισμός '; Η κατασκευή ενός τετραγώνου ίσου (σε εμβαδόν) με δοθέν ορθογώνιο. Ένας τέτοιος ορισμός είναι η παράθεση του συμπεράσματος, ενώ, εάν πείτε ότι ο τετραγωνισμός είναι η εύρεση του μέσου αναλόγου, δηλώνετε την αιτία του πράγματος που ορίστηκε.

12.5 Βιβλίο στ΄, Μέρος Γ: Αναλογίες και εμβαδά

Το κύριο θεώρημα του μέρους Γ είναι η Πρόταση στ΄ 16. Ο Ευκλείδης, όπως ένας σύγχρονος συγγραφέας, βάζει τα τεχνικά μέρη της απόδειξης σε ένα λήμμα (Πρόταση στ΄ 14) και προσθέτει κάποια συμπληρώμετα (Προτάσεις στ΄ 15 και 17). Το 'Σχήμα' της α΄ 43 επανεμφανίζεται. Το Μέρος Γ δεν εξαρτάται από τα πρώτα δύο μέρη του Βιβλίου στ΄. Για την απόδειξη ο Ευκλείδης επιστρέφει στις ρίζες της στ΄ 1. Παραθέτουμε τις στ΄ 14 και 16 και σκιαγραφούμε την απόδειξη.

Πρόταση στ΄ 14

Σε ίσα και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές γύρω από τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· και ισογώνια παραλληλόγραμμα στα οποία οι πλευρές γύρω από τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες είναι ίσα.



Σχήμα 12.7: Πρόταση στ΄ 14.

Απόδειξη.

Τοποθετούνται τα παραλληλόγραμμα έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Ε και Ζ, Β, Η να είναι συνευθειακά. Παρατηρείστε στο Σχήμα 12.7 ότι υπάρχει ένα 'αόρατο' παραλληλόγραμμο.

($\Rightarrow$) Έστω ότι τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα. Δηλώνοντας τα εμβαδά με παρενθέσεις προκύπτει

$$(\mathrm{A\Delta BZ}) = (\mathrm{BH\Gamma E}) \;\Rightarrow\; (\mathrm{A\Delta BZ}) : (\mathrm{ZE}) = (\mathrm{BH\Gamma E}) : (\mathrm{ZE})$$

όπου ΖΕ (με τον γνωστό Ευκλείδειο συμβολισμό είναι το πάνω αριστερά παραλληλόγραμμο. Χρησιμοποιούμε τώρα την στ΄ 1

$$(\mathrm{A\Delta BZ}) : (\mathrm{ZE}) = \mathrm{\Delta B} : \mathrm{BE},$$
$$(\mathrm{BH\Gamma E}) : (\mathrm{ZE}) = \mathrm{\Gamma B} : \mathrm{BH}.$$

Άρα

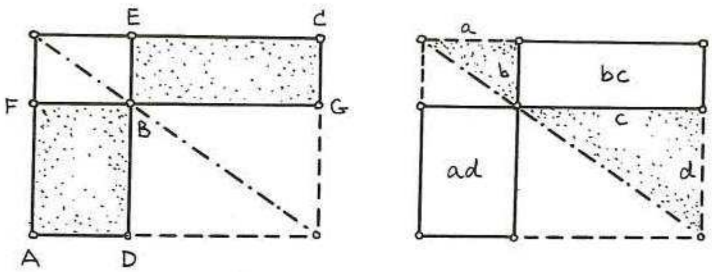
$$\mathrm{\Delta B} : \mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma B} : \mathrm{BH},$$

και οι πλευρές είναι αντιστρόφως ανάλογες.

($\Leftarrow$) Αντιστρέφουμε τα βήματα του προηγούμενου μέρους της απόδειξης. □

Πρόταση στ΄ 16.

Εάν τέσσερις ευθείες είναι ανάλογες, το ορθογώνιο που περιέχεται από τα άκρα είναι ίσο με το οργογώνιο που περιέχεται από τα μέσα· και εάν το ορθογώνιο που περιέχεται από τα άκρα είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τα μέσα, οι τέσσερις ευθείες θα είναι ανάλογες.



Σχήμα 12.8: Πρόταση στ΄ 16.

Απόδειξη.

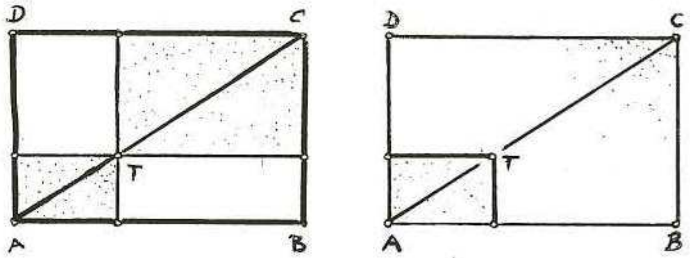
Συμβολίζουμε με a, b, c, d τα μήκη των ευθειών και με ad, bc τα εμβαδά των ορθογωνίων. Ζητείται να αποδειχθεί ότι

$$a : b = c : d \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι αυτή η σχέση είναι μία προφανής αναδιατύπωση της Πρότασης στ΄ 14. □

Οι δύο Προτάσεις στ′ 14/16 μας λέγουν επίσης ότι εάν δύο ισογώνια παραλληλόγραμμα είναι ισεμβαδικά, θα παραμείνουν ισεμβαδικά εάν αλλάξουμε τις γωνίες κρατώντας αναλλοίωτες τις πλευρές.

Υπάρχουν δύο ακόμη θεωρήματα περί ορθογωνίων και ομοιότητας στο Μέρος Ε του Βιβλίου στ′. Ο Ευκλείδης τα αναβάλλει για το Μέρος Ε διότι αναπτύσσει το αντικείμενο των ομοίων σχημάτων στο Μέρος Δ. Πρός στιγμήν ας δεχθούμε ως δεδομένη την ομοιότητα και ας παραθέσουμε τις Προτάσεις στ′ 24, 26 εντός του αντικειμένου της γεωμετρίας των ορθογωνίων. Συμβολίζοντας την ομοιότητα με $\approx$ έχουμε:



Σχήμα 12.9: Προτάσεις στ′ 24/26.

Πρόταση στ′ 24.

$$T \in AC \Rightarrow AT \approx TC \approx AC.$$

Πρόταση στ′ 26.

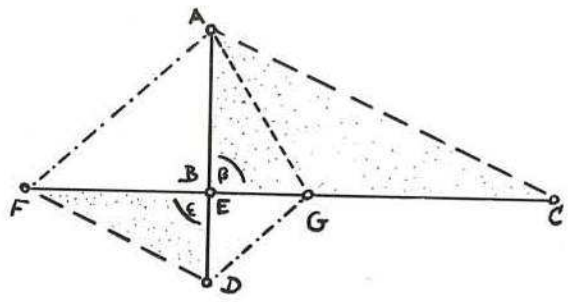
$$AT \approx AC \Rightarrow T \in AC.$$

12.6 Βιβλίο στ′, Μέρος Δ: Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Το πρώτο πράγμα που κάνει ο Ευκλείδης σε τούτο το μέρος του Βιβλίου στ′ είναι να δείξει το πως μπορούν να κατασκευαστούν όμοια τμήματα. (Πρόταση στ′ 18.) Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη ομοίων σχημάτων, προχωρά στο πλέον σημαντικό θεώρημα, το οποίο συνδέει μήκη και εμβαδά ως προς την ομοιότητα.

Πρόταση στ΄ 19.

Τα όμοια τρίγωνα είναι το ένα προς το άλλο στον διπλάσιο λόγο των αντίστοιχων πλευρών.



Σχήμα 12.10: Προτάσεις στ΄ 24/26.

Ο διπλάσιος λόγος ορίζεται στο Βιβλίο ε΄:

Ορισμός ε΄ 9.

Εάν $a : b = b : c$ τότε το $a : c$ καλείται ο διπλάσιος λόγος του $a : b$.

Με σύγχρονους όρους, αν $a : b = b : c = k$ τότε $a : c = (a : b) \cdot (a : b) = k^2$. Η Πρόταση στ΄ 19 μας λέγει λοιπόν ότι εάν οι πλευρές δύο ομοίων τριγώνων συνδέονται με ένα παράγοντα ομοιότητας k, τότε τα εμβαδά τους συνδέονται με τον παράγοντα k^2. Αυτό εφαρμόζεται στην παρακάτω Πρόταση στ΄ 25 από την άλλη πλευρά: Αξιώνεται μία σχέση $a : c = k^2$ για τα εμβαδά, και ζητείται ο παράγοντας k ως ο μέσος ανάλογος των a και c.

Στην απόδειξη της στ΄ 19 ο Ευκλείδης χειρίζεται με μαεστρία τις αναλογίες για τις ευθείες έως ότου να μπορέσει να εφαρμόσει το θεμελιώδες θεώρημα στ΄ 1 για νε περάσει στα εμβαδά.

Επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα του Ευκλείδη, αλλά παραθέτουμε το Σχήμα 12.10 για να κάνουμε την διαδικασία λίγο πιο διάφανη (με την έννοια ότι δίδουμε σε ένα σημείο δύο σύμβολα, τα B και E).

Ξεκινάμε με την $\beta = \epsilon$ και την

$$AB : BC = DE : EF.$$

Η εναλλαγή δίδει

$$AB : DE = BC : EF.$$

Κατασκευάζουμε τώρα το σημείο G στην BC ούτως ώστε[14]

$$AB : DE = EF : BG.$$

Προκύπτουν δύο συμπεράσματα:

1. Το εμβαδόν του $\triangle ABG$ είναι ίσο με αυτό του $\triangle DEF$.[15]
2. $BC : EF = EF : BG$, άρα ο $BC : BG$ είναι ο διπλάσιος λόγος του $BC : EF$.

Το αποτέλεσμα προκύπτει τώρα από την Πρόταση στ′ 1:

$$(ABC) : (DEF) + (ABC) : (ABG) = BC : BG.$$

□

Η επόμενη Πρόταση στ′ 20 επεκτείνει το αποτέλεσμα της στ′ 19 στα όμοια πολύγωνα μέσω τριγωνισμού. Η Πρόταση στ′ 21 δείχνει ότι η σχέση της ομοιότητας είναι μεταβατική.

12.7 Βιβλίο στ′, Μέρος Ε: Η εφαρμογή των εμβαδών

Συζητήσαμε στο Βιβλίο β′ και ιδίως στις Προτάσεις β′ 5/6 το πως η εφαρμογή των εμβαδών στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά μπορεί να μεταφραστεί σαν τη λύση τετραγωνικών εξισώσεων. Γνωρίζοντας τα βασικά, δεν θα συζητήσουμε την γενίκευσή τους από τα τετράγωνα στα όμοια παραλληλόγραμμα που γίνεται στις Προτάσεις στ′ 28/29.[16]

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν στο Βιβλίο β′ χρειάζεται να τροποποιηθούν λίγο για τις ανάγκες τις απόδειξης της παρακάτω

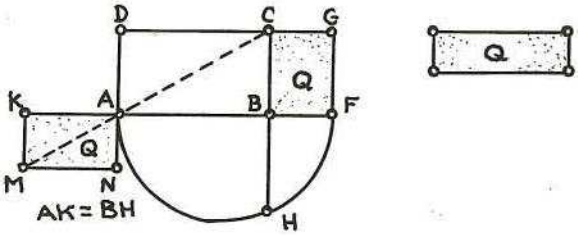
[14] Πρόταση στ′ 11.

[15] Πρόταση στ′ 14.

[16] Ξανατονίζουμε σε αυτό το σημείο την αέναη διαμάχη ιστορικών και μαθηματικών περί του αν τα Ελληνικά μαθηματικά ήταν καθαρά γεωμετρικά όπως υποστηρίζουν οι πρώτοι, ή, επηρεασμένα από τις Βαβυλωνιακές μεθόδους, δεν ήταν τίποτε άλλο από άλγεβρα μεταμφιεσμένη σε γεωμετρία όπως υποστηρίζουν οι δεύτεροι. Αυτό που είναι γεγονός, είναι ότι ενώ οι φιλόλογοι δίδουν ιδιαίτερο βάρος στην έκφραση και στη φόρμα, οι μαθηματικοί τεινουν να θεωρούν τα πάντα υπό το βλέμμα κάποιου *ισομορφισμού*. Και οι δύο όψεις είναι απαραίτητες για την κατανόηση των Αρχαίων μαθηματικών και κατ′ επέκταση των νεώτερων.

Πρόταση στ′ 25.

Να κατασκευαστεί ένα και το αυτό σχήμα όμοιο με δοθέν ευθύγραμμο σχήμα και ίσο με άλλο δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.



Σχήμα 12.11: Πρόταση στ′ 25.

Αντί του τριγώνου που θεωρεί ο Ευκλείδης ως το πρώτο δοθέν σχήμα, εδώ θα πάρουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας το ορθογώνιο $ABCD$, όπως στο Σχήμα 12.11.

Έστω ότι το δοθέν εμβαδόν είναι ίσο με Q. Μέσω της α′ 44 εφαρμόζουμε το Q στην ευθεία BC. Με την στ′ 13 κατασκευάζουμε τον μέσο ανάλογο BH των AB και BF.[17] Τώρα το ορθογώνιο $AKMN$ με πλευρά AK ίση με BH είναι *όμοιο και ομοιόθετο* με το ορθογώνιο $ABCD$ και θα έχει εμβαδό Q σύμφωνα με τις στ′ 19/20.

Ο Πλούταρχος ($\sim 45 - 125$ μ.Χ.), ο συγγραφέας των *Βίων Παραλλήλων* θεωρούσε την Πρόταση στ′ 25 ως μία σημαντική γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Γράφει στα *Συμπόσιά* του:

Ανάμεσα στα περισσότερα γεωμετρικά θεωρήματα, ή προβλήματα, είναι και το ακόλουθο: Δοθέντων δύο σχημάτων, να εφαρμοστεί ένα τρίτο, ίσο με το πρώτο και όμοιο με το άλλο. Στη δύναμη του προβλήματος αυτού λέγεται ότι θυσίασαν οι Πυθαγόρειοι και αναντίρρητα, τούτο το πρόβλημα είναι πιο λεπτό και πιο επιστημονικό από το θεώρημα που αποδεικνύει ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών.[18]

[17] Αλγεβρικά, αυτό σημαίνει ότι βρίσκουμε τη ρίζα $BH = \sqrt{AB \cdot BF}$, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στις στ′ 28/29.

[18] Πράγματι το Πυθαγόρειο Θεώρημα μπορεί να διαβαστεί και ως η λύση του εξής προβλήματος: Να κατασκευαστεί τετράγωνο, ίσο περιεχομένου με ένα άλλο σχήμα, το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι δύο τετράγωνα.

Κεφάλαιο 13

Παράρτημα: Ασκήσεις

Βιβλίο α΄

1–15

1. Σε δοθείσα ευθεία γράψτε ένα ισοσκελές τρίγωνο που έχει την κάθε πλευρά του ίση με δοθείσα ευθεία.

2. Εάν δύο ευθείες διχοτομούνται σε ορθές γωνίες, κάθε σημείο οποιασδήποτε από αυτές ισαπέχει από τα άκρα της άλλης.

3. Εάν οι γωνίες ΑΒΓ και ΑΓΒ στην βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου διχοτομούνται από τις ευθείες ΒΔ, ΓΔ, δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

4. Στο σχήμα της α΄ 5 εάν οι ΖΓ και ΒΗ συναντώνται στο Θ, δείξτε ότι οι ΖΘ και ΗΘ είναι ίσες.

5. Τα ΑΓΒ, ΑΔΒ είναι δύο τρίγωνα στο ίδιο μέρος της ΑΒ, τέτοια ώστε η ΑΓ είναι ίση με την ΒΔ και η ΑΔ είναι ίση με την ΒΓ, και οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ο. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.

6. Εάν δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι στην ίδια βάση, τότε η ευθεία που ενώνει τις κορυφές τους ή η προεκτεινόμενη αυτή ευθεία, θα διχοτομεί τη βάση σε ορθές γωνίες.

7. Βρείτε ένα σημείο σε δοθείσα ευθεία τέτοιο ώστε οι αποστάσεις του από δύο δοθέντα σημεία να είναι ίσες.

8. Διχοτομείται δοθείσα γωνία ΒΑΓ· εάν προεκταθεί στο Η η ΓΑ και διχοτομηθεί η γωνία ΒΑΗ, τότε οι δύο διχοτόμοι είναι σε ορθές γωνίες.

16–26

9. Η γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ διχοτομείται από ευθεία που τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Δείξτε ότι η ΒΑ είναι μεγαλύτερη από τη ΒΔ και η ΓΑ είναι μεγαλύτερη από τη ΓΔ.
10. Η κάθετος είναι η μικρότερη ευθεία που μπορεί να αχθεί από δοθέν σημείο σε δοθείσα ευθεία.
11.Το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείου από τις τρεις γωνίες τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το ημιάθροισμα των πλευρών του τριγώνου.
12. Οι τέσσερις πλευρές κάθε τετραπλεύρου έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από το άθροισμα των δύο διαγωνίων.
13. Κατασκευάστε τρίγωνο με δοθέντα: τη βάση, μία από τις γωνίες στη βάση, και το άθροισμα των πλευρών.
14. Σε δοθείσα ευθεία βρείτε ένα σημείο τέτοιο ώστε οι κάθετες που άγονται απ΄ αυτό προς δύο δοθείσες ευθείες είναι ίσες.
15. Οι ΑΒ, ΑΓ είναι δύο ευθείες που τέμνονται στο Α. Από τυχόν σημείο Ρ να αχθεί ευθεία που τις τέμνει στα Ε και Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε η ΑΕ να είναι ίση με την ΑΖ.

27–31

16. Κάθε ευθεία παράλληλη με τη βάση ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές του.
17. Εάν από σημείο που ισαπέχει από δύο παράλληλες ευθείες, αχθούν δύο ευθείες που τέμνουν τις παράλληλες, τότε θα αποκόπτουν ίσα τμήματα από αυτές τις παράλληλες.
18. Εάν η εξωτερική διχοτόμος τριγώνου είναι παράλληλη με τη βάση του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
19. Η πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνεται στο Δ και η γωνία ΑΓΒ διχοτομείται από ευθεία ΓΕ η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Μία ευθεία άγεται από το Ε παράλληλη με τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την εξωτερική διχοτόμο της ΑΓΔ στο Η. Δείξτε ότι η ΕΖ είναι ίση με τη ΖΗ.
20. Η ΑΒ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Βρείτε σημείο Δ της ΑΒ τέτοιο ώστε η ΔΒ να είναι ίση με την κάθετο από το Δ στην ΑΓ.
21. Ευθεία άγεται κάθετα προς τη βάση ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

32

22. Η γωνία των διχοτόμων των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίση με μία εξωτερική γωνία του τριγώνου.
23. Η Α είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Προεκτείνεται η ΒΑ στο Δ ώστε η ΑΔ είναι ίση με τη ΒΑ. Δείξτε ότι η γωνία ΒΓΔ είναι ορθή.
24. Κατασκευάστε ισοσκελές τρίγωνο που έχει την γωνία στην κορυφή ίση με το τετραπλάσιο της κάθε μίας γωνίας στη βάση.
25. Η ευθεία που ενώνει το μέσον της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με την ορθή γωνία είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
26. Οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου τέμνουν τις πλευρές στα Δ και Ε. Δείξτε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη με τη βάση.
27. Τριχοτομείστε την ορθή γωνία.
28. Τριχοτομείστε δοθείσα πεπερασμένη ευθεία.

33–34

29. Εάν δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
30. Οι ευθείες που διχοτομούν δύο διαδοχικές γωνίες παραλληλογράμμου είναι κάθετες.
31. Τα Α, Β, Γ είναι τρία σημεία πάνω σε μία ευθεία, τέτοια ώστε η ΑΒ είναι ίση με την ΒΓ. Δείξτε ότι το άθροισμα των καθέτων από τα Α και Γ προς οποιαδήποτε ευθεία που δεν περνά μεταξύ των Α και Γ είναι διπλάσιο της καθέτου από το Β προς την ίδια ευθεία.

35–45

32. Διχοτομείστε ένα παραλληλόγραμμο με ευθεία που άγεται από δοθέν σημείο εντός του παραλληλογράμμου.
33. Δείξτε ότι τα τέσσερα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται ένα παραλληλόγραμμο από τις διαγωνίους του είναι ίσου περιεχομένου.
34. Η ευθεία που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλη με τη βάση του και είναι ίση με το μισό της βάσης.
35. Η ευθεία που ενώνει τα μέσα πλευρών τριγώνου αποκόπτει τρίγωνο περιεχομένου ίσου με το τέταρτο του όλου.
36. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από το Δ άγεται ευθεία που τέμνει την ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΑΒ στο Η. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και

ΓΖΗ είναι ίσα.
37. Το ΑΒΓΔ είναι δοθέν τετράπλευρο. Κατασκευάστε ένα άλλο τετράπλευρο ίσου περιεχομένου που έχει μία πλευρά την ΑΒ και μία άλλη επάνω σε ευθεία που άγεται από σημείο της ΓΔ παράλληλη με την ΑΒ.
38. Διχοτομείστε δοθέν τρίγωνο με ευθεία που άγεται από δοθέν σημείο πλευράς του.

46–48

39. Στις πλευρές ΑΓ, ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ γράφονται τετράγωνα ΑΓΔΕ, ΒΓΖΗ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η ΑΖ είναι ίση με τη ΒΔ.
40. Το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει οξεία (αντ. αμβλεία) γωνία τριγώνου είναι μικρότερο (αντ. μεγαλύτερο) από το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία.
41. Σημείο Ρ ενώνεται με τις κορυφές ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Το άθροισμα των τετραγώνων των ΡΑ και ΡΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΡΒ και ΡΔ.
42. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ορθογωνίου είναι ίσο με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ίσων πλευρών.
43. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με την γωνία Α ορθή. Άγονται προς τις απέναντι πλευρές οι ΒΕ, ΓΖ. Τότε το τετραπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των ΒΕ και ΓΖ είναι ίσο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου της ΒΓ.

Βιβλίο β′

1–11

44. Να διαιρεθεί δοθείσα ευθεία σε δύο μέρη, ούτως ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται από αυτά να είναι το μέγιστο δυνατόν.
45. Κατασκευάστε ορθογώνιο ίσο με τη διαφορά δοθέντων τετραγώνων.
46. Στο σχήμα της β′ 11, εάν η ΓΘ προεκταθεί ώστε να τμήσει την ΒΖ στο Ι, δείξτε ότι το ΓΙ είναι κάθετο στο ΒΖ.
47. Δείξτε ότι σε μία ευθεία που διαιρείται όπως στην β′ 11, το ορθογώνιο που περιέχεται από το άθροισμα και τη διαφορά των τμημάτων είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τα τμήματα.

12–14

48. Το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το διπλάσιο άθροισμα του τετραγώνου του μισού της βάσης και του τετραγώνου της ευθείας που άγεται από την κορυφή προς το μέσο της βάσης.
49. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών.
50. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων τετραπλεύρου είναι ίσο με το διπλάσιο άθροισμα των ευθειών που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών.
51. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων τετραπλεύρου είναι μεγαλύτερο το άθροισμα των διαγωνίων κατά τέσσερις φορές το τετράγωνο της ευθείας που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων.
52. Γράφεται τετράγωνο ΒΔΕΓ στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΑ και ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΑ και ΑΒ.
53. Διαιρέστε δοθείσα ευθεία σε δύο τμήματα ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται από αυτά να είναι ίσο με το τετράγωνο δοθείσας ευθείας η οποία είναι μικρότερη από τη μισή της ευθείας που διαιρείται.

Βιβλίο γ΄

1–15

54. Να γραφεί κύκλος δοθέντος κέντρου που τέμνει δοθέντα κύκλο στα άκρα της διαμέτρου του.
55. Δείξτε ότι οι ευθείες που άγονται κάθετα από τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου εγγεγραμμένου σε κύκλο τέμνονται σε σταθεροποιημένο σημείο.
56. Εάν σε δύο εφαπτόμενους κύκλους αχθούν δύο παράλληλες διάμετροι, ένα άκρο από κάθε διάμετρο και το σημείο επαφής θα κείνται στην ίδια ευθεία.

16–19

57. Από σημείο εκτός κυκλου μπορούν να αχθούν δύο εφαπτόμενες προς αυτόν, ίσου μήκους.
58. Προσδιορίστε το σημείο στην προέκταση της διαμέτρου κύκλου, ώστε η εφαπτόμενη που άγεται από αυτό προς την περιφέρεια να έχει δοθέν μήκος.

59. Από τα άκρα της διαμέτρου κύκλου, άγονται εφαπτόμενες που αποκόπτουν από τρίτη εφαπτόμενη τμήμα ΑΒ. Εάν Γ είναι το κέντρο του κύκλου, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

60. Να αχθεί ευθεία που να εφάπτεται σε δύο δοθέντες κύκλους.

61. Ένα τετράπλευρο περιγράφεται ώστε οι πλευρές του να εφάπτονται σε κύκλο. Δείξτε ότι τό άθροισμα των δύο πλευρών του είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων δύο.

62. Σε περιγεγραμμένο τετράπλευρο, το αθροισμα των γωνιών που υποτείνονται από το κέντρο από δύο απέναντι πλευρές είναι ίσο με δύο ορθές.

63. ΑΒ είναι η διάμετρος και Γ το κέντρο ημικυκλίου. Δείξτε ότι το κέντρο Ο κάθε κύκλου που εγγράφεται στο ημικύκλιο ισαπέχει από το Γ και την εφαπτομένη στο ημικύκλιο που είναι παράλληλη με την ΑΒ.

64. Προεκτείνεται η διάμετρος ΒΑ κύκλου στο Ρ ώστε η ΑΡ να είναι ίση με την ακτίνα. Από το Α άγεται η εφαπτομένη ϵ και από το Ρ άγεται ευθεία που τέμνει τον κύκλο στο Γ και την ϵ στο Ε. Ενώνεται η ΒΓ και η προέκτασή της τέμνει την ϵ στο Δ. Τότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο.

20–22

65. Άγονται δύο εφαπτόμενες ΑΒ, ΑΓ προς κύκλο· δείξτε ότι αν Δ είναι σημείο της περιφέρειας εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το άθροισμα των γωνιών ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι σταθερό.

66. ΑΡΒ είναι μία σταθεροποιημένη χορδή που περνά από το σημείο τομής Ρ δύο κύκλων. Για οποιαδήποτε άλλη χορδή ΓΡΔ των κύκλων που περνά από το Ρ ισχύει ότι οι προεκτάσεις των ΑΓ και ΔΒ σχηματίζουν σταθερή γωνία.

67. Δείξτε ότι πλην ορθογωνίων, κανένα παραλληλόγραμμο δεν εγγράφεται σε κύκλο.

68. Τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο. Δείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών στα τρία τμήματα εξωτερικά του τριγώνου είναι ίσο με τέσσερις ορθές.

69. Διαιρέστε ένα κύκλο σε δύο μέρη ώστε η γωνία που περιέχεται στο ένα τμήμα να είναι ίση με το πενταπλάσιο της γωνίας που περιέχεται στο άλλο.

70. Τα Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία κατά σειρά επάνω σε κύκλο· οι προεκτάσεις των ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ και αυτές των ΑΔ, ΒΓ στο Θ. Δείξτε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΖΓ και ΑΘΓ είναι κάθετες μεταξύ τους.

31

71. Οι κύκλοι που περιγράφονται στις ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου ως διάμετροι, θα τέμνονται στο μέσο της βάσης.
72. Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ περιγράφεται κύκλος που την έχει ως διάμετρο. Η ΕΖ είναι διάμετρος παράλληλη στη ΒΓ. Δείξτε ότι οι ΕΒ και ΖΒ διχοτομούν την εσωτερική και την εξωτερική γωνία στο Β.
73. Εάν κύκλος έχει κέντρο Ο και στην ακτίνα ΟΑ περιγραφεί κύκλος που την έχει ως διάμετρο, τότε η περιφέρεια αυτού του κύκλου θα διχοτομεί κάθε χορδή που άγεται από το Α προς τον εξωτερικό κύκλο.
74. Η ΑΔ είναι διάμετρος κύκλου και τα Β, Γ είναι σημεία της περιφέρειας στο ίδιο μέρος της ΑΔ. Η κάθετος από το Δ στη ΒΓ την τέμνει στο Ε. Δείξτε ότι το τετράγωνο της ΑΔ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κατά το διπλάσιο ορθογώνιο που περιέχουν οι ΒΓ, ΓΕ.
75. Δύο ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και από το σημείο επαφής άγονται χορδές, μία προς κάθε κύκλο και κάθετες μεταξύ τους. Δείξτε ότι η ευθεία που ενώνει τα άλλα άκρα αυτών των χορδών είναι ίση και παράλληλη με την διάκεντρο.

32–34

76. Έστω ΑΒ χορδή κύκλου και ϵ εφαπτόμενη στο Α. Από σημείο Δ της ϵ άγεται παράλληλη με την ΑΒ που τέμνει την περιφέρεια στα Ε και Ζ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΖΑΒ.
77. Εάν από σημείο περιφέρειας κύκλου αχθούν χορδή και εφαπτομένη, οι κάθετες που προσπίπτουν σε αυτές από το μέσον του τόξου που βαίνει η χορδή, είναι ίσες.
78. Κατασκευάστε τρίγωνο με δοθέντα: τη βάση, την απέναντί της γωνία, και το ύψος.
79. Από δοθέν σημείο εκτός κύκλου κέντρου Ο, να αχθεί ευθεία που τέμενει τον κύκλο στα Β και Γ, ώστε το εμβαδόν του ΒΟΓ να είναι το ελάχιστο συνατό.

35–37

80. Εάν δύο κύκλοι τέμνονται, οι εφαπτόμενες που άγονται προς τους δύο κύκλους από κάθε σημείο της προέκτασης της κοινής χορδής είναι ίσες.
81. Δείξτε ότι η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί τις κοινές τους εφαπτομένες.

82. Εάν οι ΑΔ, ΓΕ αχθούν κάθετα στις πλευρές ΒΓ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΒΓ και ΒΔ είναι ίσο με το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΒΑ και ΒΕ.
83. Από σημείο της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων, άγονται δύο άλλες χορδές, μία προς κάθε κύκλο. Δείξτε ότι τα άκρα αυτών των χορδών θα κείνται σε περιφέρεια κύκλου.

Βιβλίο δ′

10

84. Δείξτε ότι η γωνία ΑΓΔ στο σχήμα της δ′ 10 είναι ίση με το τριπλάσιο της γωνίας στη κορυφή του τριγώνου. Κατόπιν δείξτε ότι υπάρχουν δύο ισοσκελή τρίγωνα με την ιδιότητα της δ′ 10.
85. Στο σχήμα της δ′ 10 υποθέστε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται ξανά στο Ε. Τότε η ΔΕ είναι ίση με τη ΔΓ.
86. Δείξτε ότι ο μικρότερος από τους κύκλους του σχήματος της δ′ 10 είναι ίσος με τον κύκλο που περιγράφεται στο ζητούμενο τρίγωνο.

11–16

87. Οι ευθείες που συνδέουν τις μη διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου τέμνονται στις κορυφές ενός άλλου κανονικού πενταγώνου.
88. Κατασκευάστε κανονικό εξάγωνο από ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Δείξτε ότι η πλευρά του εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου, και το εξάγωνο έχει διπλάσιο περιεχομένο από το τρίγωνο.
89. Κάθε ισόπλευρο εγγεγραμμένο πολυγωνικό σχήμα είναι επίσης και ισογώνιο.

Βιβλίο στ′

1–2

90. Από σημείο Δ της βάσης ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ άγονται ευθείες ΔΕ, ΔΖ παράλληλες με τις ΑΒ, ΑΓ που τις τέμνουν στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι μέσος ανάλογος μεταξύ των τριγώνων ΖΒΔ, ΕΔΓ.

91. Από σημείο Ε της κοινής βάσης δύο τριγώνων ΑΓΒ, ΑΔΒ, άγονται ευθείες παράλληλες με τις ΑΓ, ΑΔ που τέμνουν τις ΒΓ, ΒΔ στα Ζ, Η αντίστοιχα. Δείξτε ότι η ΖΗ είναι παράληλη στη ΓΔ.

92. Παράλληλη ευθεία με την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Αν οι ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ζ, δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΕΖ.

93. Εάν δύο πλευρές τετραπλεύρου είναι παράλληλες, οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη προς αυτές, τέμνει τις δύο άλλες πλευρές ή τις προεκτάσεις τους, ανάλογα.

3

94. Η πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ διχοτομείται στο Δ και οι γωνίες ΑΔΒ, ΑΔΓ διχοτομούνται από τις ΔΕ, ΔΖ που τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. δείξτε ότι η ΕΖ είναι παράλληλη με την ΒΓ.

4–6

95. Οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, το Ε είναι το μέσον της ΓΔ, οι ΑΓ και ΒΕ τέμνονται στο Ζ και οι ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Η. Δείξτε ότι η ΖΗ είναι παράλληλη με την ΑΒ.

96. Εφαπτόμενη κύκλου στο σημείο Α τέμνει δύο παράλληλες εφαπτόμενες στα Β, Γ, τα σημεία επαφής των οποίων είναι τα Δ, Ε αντίστοιχα. Αν οι ΒΕ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ, δείξτε ότι η ΑΖ είναι παράλληλη με τις εφαπτόμενες ΒΔ, ΓΕ.

97. Στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνονται σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε η ΒΔ είναι ίση με την ΓΕ. Οι προεκτάσεις των ΔΕ, ΒΓ τέμνονται στο Ζ· δείξτε ότι η ΑΒ προς την ΑΓ είναι όπως η ΕΖ προς τη ΔΖ.

7–18

98. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με την βοήθεια της στ′ 8.

99. Δείξτε ότι οι διαγώνιοι κάθε πτετραπλεύρου εγγεγραμμένου σε κύκλο διαιρούν το τετράπλευρο σε τέσσερα τρίγωνα που είναι όμοια ανά δύο. Με τη βοήθεια αυτού αποδείξτε την γ′ 35.

19

100. Το κανονικό εξάγωνο είναι ο μέσος ανάλογος του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κανονικού τριγώνου. Συμπεράνετε ότι ο διπλάσιος λόγος των πλευρών των τριγώνων είναι το τετράγωνο του λόγου του περιγεγραμμένου τριγώνου προς το κανονικό εξάγωνο.