ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009–10

M207-ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ–ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Μερος Α

Επιλύστε τις παρακάτω με την βοήθεια των Προτάσεων που αναφέρονται και μόνο, δικαιολογώντας πλήρως τα βήματά σας.

1. Τριχοτομείστε την ορθή γωνία. (α′ 1, 32). **(0.75)**

2. Δείξτε ότι κάθε ευθεία που περνά από το μέσον μίας διαγωνίου ενός παραλληλογράμμου διαιρεί το παραλληλόγραμμο σε δύο ισεμβαδικά σχήματα. (α′ 15, 26, 29). **(1)**

3. Κατασκευάστε ορθογώνιο ίσο με τη διαφορά δοθέντων ανίσων τετραγώνων. (*Υπόδειξη: Θεωρείστε ΑΓ ίση με την πλευρά του μικρότερου τετραγώνου και προεκτείνετέ την κατάλληλα.*) (β′ 6). **(0.5)**

4. Τα Α, Β, Γ, Δ είναι τέσσερα σημεία κατά σειρά επάνω σε κύκλο· οι προεκτάσεις των ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ και αυτές των ΑΔ, ΒΓ στο Θ. Δείξτε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΖΓ και ΑΘΓ είναι κάθετες μεταξύ τους. (α′ 15, 32, γ′ 22). **(1)**

5. Εάν δύο κύκλοι τέμνονται, οι εφαπτόμενες που άγονται προς τους δύο κύκλους από κάθε σημείο της προέκτασης της κοινής χορδής είναι ίσες, και η προέκταση της κοινής χορδής τους διχοτομεί την κοινή εφαπτομένη. (γ′ 36). **(0.75)**

6. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με την βοήθεια της στ′ 8. **(1)**

2. Μέρος Β: Γενικές

1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε εγγράψει σε κύκλο το κανονικό πεντάγωνο, και το κανονικό δεκαεπτάγωνο. Εγγράψτε στον κύκλο το κανονικό ογδονταπεντάγωνο, δίδοντας ένα στοιχειώδη τρόπο υπολογισμού του τόξου που είναι ίσο με το 1/85 του κύκλου, από τα τόξα που αντιστοιχούν στις πλευρές των κατασκευασμένων κανονικών πολυγώνων. **(1)**

2. α) Διατυπώστε το αντίστροφο του 5ου Αιτήματος. Από ποια Πρόταση του α΄ Βιβλίου αποδεικνύεται αυτό; **(0.5)**

β) Δείξτε ότι η ισχύς του αντιστρόφου του 5ου Αιτήματος συνεπάγεται την Πρόταση: *Το άθροισμα γωνιών τριγώνου ισούται με δύο ορθές.* **(0.5)**

3. Το ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες $\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5$ είναι κατασκευάσιμο. (Από ποια Πρόταση των Στοιχείων προκύπτει αυτό;) Δοθέντος του πιο πάνω τριγώνου, να αποκοπεί από αυτό ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες $3\pi/5, \pi/5, \pi/5$ και να δειχθεί ότι το κανονικό πεντάγωνο κατασκευάζεται και από αυτό το τελευταίο τρίγωνο. **(1.25)**

4. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ με παράλληλες πλευρές (βάσεις) τις ΑΒ, ΓΔ, ΑΒ>ΓΔ. Φέρονται τα ύψη ΔΕ και ΓΖ και επίσης η ΔΖ. Με αυτό τον τρόπο το τραπέζιο χωρίζεται σε τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα: △ΑΕΔ, Τ=△ΔΕΖ=△ΖΓΔ και △ΓΖΒ. Αποδείξτε ότι το τραπέζιο είναι προς το Τ όπως το άθροισμα των βάσεων προς την μικρότερη βάση του τραπεζίου. (*Υπόδειξη: Συγκρίνετε κάθε τρίγωνο με το Τ*).

Συμπεράνετε κατόπιν ότι δύο τραπέζια που βρίσκονται κάτω από το ίδιο ύψος είναι το ένα προς το άλλο όπως το άθροισμα των βάσεων του ενός προς το άθροισμα των βάσεων του άλλου. (*Μη χρησιμοποιήσετε τον τύπο για το εμβαδόν του τραπεζίου.*) **(1.75)**

1. Εάν έχετε παραδώσει κάποια εργασία κατά τη διάρκεια του εξαμήνου γράψτε την εδώ:

2. Επιτρέπεται να χρησιμοποιείτε μόνο τα Στοιχεία (οποιοδήποτε κείμενο) και ΟΧΙ τις σημειώσεις του μαθήματος.

3. Οι απαντήσεις σας να είναι το δυνατόν σύντομες, καθαρογραμμένες και ακριβείς.

Διάρκεια εξέτασης: 100 λεπτά.