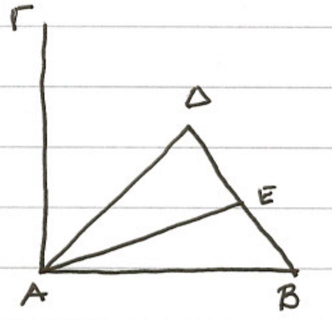
M207 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

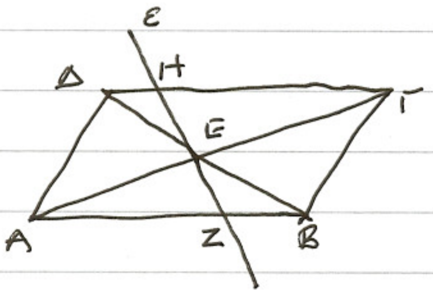
1.



Ἔστω ὀρθὴ γωνία ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ κατασκευάζομε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ (α΄ 1). Φέρνομε τὴν διχοτόμο ΑΕ τῆς γωνίας ΔΑΒ. Ἐπειδὴ $\angle \Delta A B = \frac{\Omega}{3}$ (α΄ 32) εἶναι

$$\angle \Gamma A \Delta = \angle \Delta A E = \angle E A B$$

2.



Ἔστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ΑΓ μία διαγώνιός του, Ε τὸ μέσον τῆς διαγωνίου καὶ ε εὐθεῖα ποὺ τέμνει τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΔΓ στὰ Ζ, Η ἀντίστοιχα. Τότε:

$$\triangle AEZ = \triangle HE\Gamma \quad \text{διότι:}$$

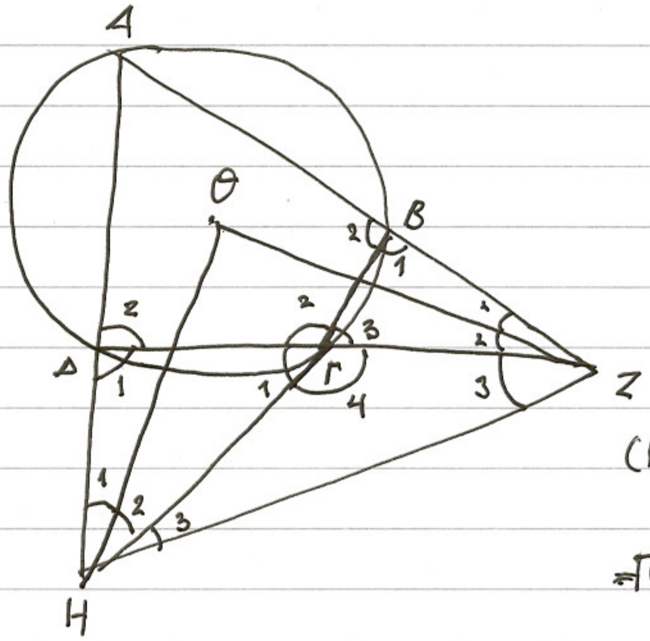
$\angle AEZ = \angle HE\Gamma$, $\angle EAZ = \angle H\Gamma E$ (α΄29) καὶ ΑΕ=ΕΓ. Ἄρα ἡ ἰσότητα προκύπτει ἀπὸ τὴν α΄. 15. Φέρνομε κ' τὴν διαγώνιο ΒΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομε ὅτι $\triangle \Delta EH = \triangle EZB$ καὶ $\triangle \Delta EA = \triangle E\Gamma B$. Ἄρα

$$\Delta HZA = \triangle \Delta HE + \triangle \Delta EA + \triangle EAZ =$$
$$\triangle EZB + \triangle E\Gamma B + \triangle EH\Gamma = HZB\Gamma.$$

3. Ἔστω ΑΓ ἴση μὲ τὴν πλευρὰ τοῦ μικρότερου τετραγώνου. Προεκτείνομε τὴν ΑΓ στὸ Β ἔτσι ὥστε ΑΓ = ΓΒ καὶ ἐπίσης προεκτείνομε τὴν ΑΒ στὸ Δ ὥστε ἡ ΓΔ νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλύτερου τετραγώνου. Ἀπὸ τὴν β΄ 6

$$A\Delta \cdot \Delta B + B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 \quad \text{Ἄρα}$$
$$A\Delta \cdot \Delta B = \Gamma\Delta^2 - B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 - A\Gamma^2.$$

4.



γ' Ἔστω οἱ διχοτόμοι τῶν $\angle ΒΖΓ$ καί $\angle ΓΗΔ$ τέμνονται στό Θ. Ἡ γωνία $\angle ΖΘΗ$ εἶναι ὀρθή: Φέρνουμε τήν ΖΗ.

Ἀπό α' 32,

$$(1) \quad \angle Θ = \angle ΖΘΗ = π - Η_2 - Η_3 - Ζ_2 - Ζ_3$$

Πάλι ἀπό α' 32,

$$(2) \quad Η_1 + Η_2 = π - Δ_1 - Γ_1 = Δ_2 + Γ_2 - π$$

καί $Ζ_1 + Ζ_2 = π - Β_1 - Γ_3 \Rightarrow$

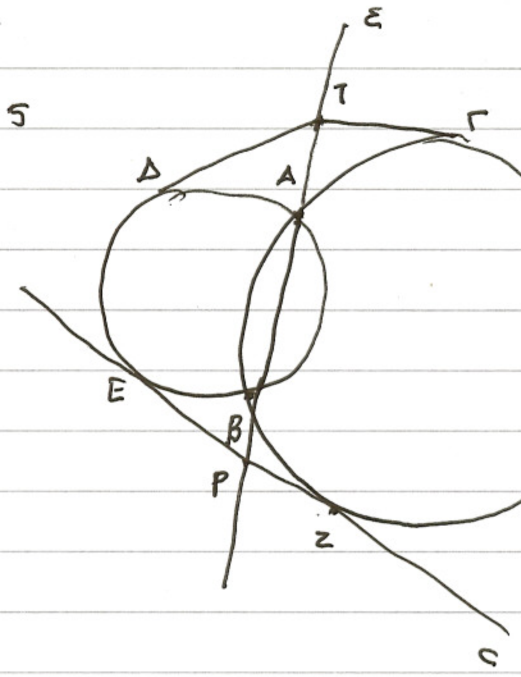
$$(3) \quad Ζ_1 + Ζ_2 = Β_2 + Γ_2 - π$$

Τώρα, $Ζ_3 + Η_3 = π - Γ_4 = π - Γ_2$ (4). Ἄρα

$$(1) \Rightarrow \angle Θ = π - (Η_2 + Ζ_2) - (Ζ_3 + Η_3) \overset{(4)}{=} \cancel{π} - (Η_2 + Ζ_2) + Γ_2 - \cancel{π} \overset{(2)(3)}{=}$$

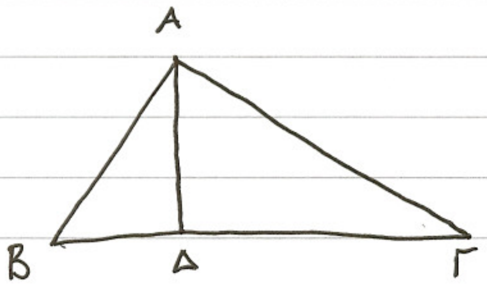
$$= Γ_2 - \frac{1}{2}(Δ_2 + Γ_2 - π) - \frac{1}{2}(Β_2 + Γ_2 - π) = π - \frac{(Β_2 + Δ_2)}{2} \overset{(γ' 22)}{=} π - \frac{π}{2} = \frac{π}{2}.$$

5



Έστω ε η κοινή χορδή και Τ σημείο της προέκτασής της. Από γ΄.36 αν ΤΓ, ΤΔ οι εφαπτόμενες
$Τ\Gamma^2 = ΤΑ \cdot ΤΒ = Τ\Delta^2$ Άρα $Τ\Gamma = Τ\Delta$
Αν c μία κοινή εφαπτομένη και Ρ το σημείο τομής με την κοινή χορδή, τότε από πιο πάνω $ΡΕ = ΡΖ$.

6.



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με την ∠ΒΑΓ ορθή. Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Από στ΄.8 τα ΔΑΒΔ και ΔΑΔΓ είναι όμοια μεταξύ τους και το καθένα όμοιο με το ΔΑΒΓ.

$\triangle ΑΒ\Delta \approx \triangle ΑΒ\Gamma \Rightarrow \dfrac{ΑΒ}{Β\Gamma} = \dfrac{Β\Delta}{ΑΒ} \Rightarrow ΑΒ^2 = Β\Delta \cdot Β\Gamma \quad (1)$

$\triangle Α\Delta\Gamma \approx \triangle ΑΒ\Gamma \Rightarrow \dfrac{\Delta\Gamma}{Α\Gamma} = \dfrac{Α\Gamma}{Β\Gamma} \Rightarrow Α\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot Β\Gamma \quad (2)$

$(1) \oplus (2) \Rightarrow ΑΒ^2 + Α\Gamma^2 = Β\Gamma^2.$

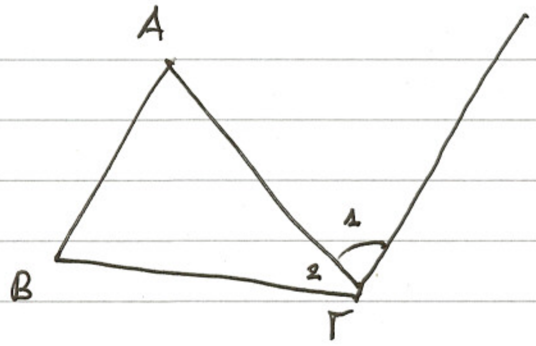
ΜΕΡΟΣ Β

1. Είναι $\dfrac{1}{85} = \dfrac{1}{5 \cdot 17} = \dfrac{5 \cdot 7 - 2 \cdot 17}{5 \cdot 17} = 7\left(\dfrac{1}{17}\right) - 2\left(\dfrac{1}{5}\right).$

Άρα αν x είναι το τόξο του πενταγώνου και y το τόξο του δεκαεπταγώνου, το τόξο του 85-γώνου ισούται με $7y - 2x$.

2. α) Το αντίστροφο του 5ου Αιτήματος είναι η Πρόταση α΄.27.

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και από το Γ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΒ

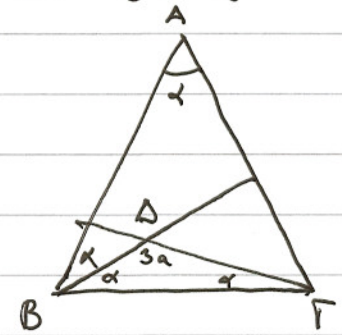


Είναι $\angle\Gamma_1 = \angle A$ και

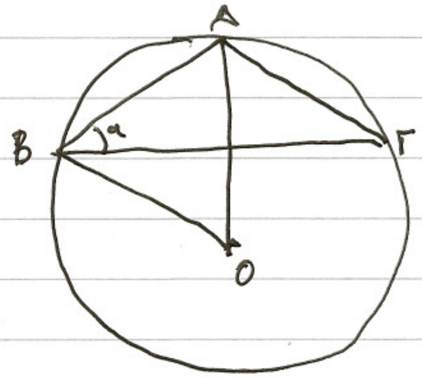
$\angle\Gamma + \angle B = \pi$ από α' 29

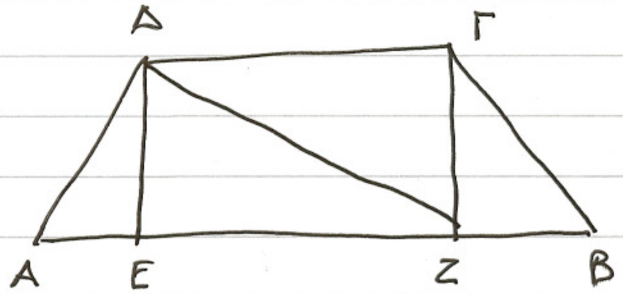
Άρα $\angle A + \angle B + \angle\Gamma_2 = \angle\Gamma_1 + \angle\Gamma_2 + B = \pi$

3. Ας θέσουμε $a = \pi/5$ και το κατασκευάσιμο ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες $\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5$ (Πρόταση δ' 11). Φέρνουμε τις διχοτόμους από τα Β, Γ, τότε η γωνία στο Δ θα είναι ίση με $\pi - 2a = 5a - 2a = 3a$



Σε κύκλο εγγράφουμε τρίγωνο ισογώνιο με το ΒΔΓ. Τότε η επίκεντρη γωνία $\angle B O \Delta$ είναι ίση με $2a$, άρα το τόξο ΒΔ (και το ΔΓ) είναι το τόξο του πενταγώνου.



4. 

Είναι

$$\frac{\blacktriangle \Delta A E}{\blacktriangle \Delta E Z} = \frac{AE}{EZ} \quad (\text{στ'} 1)$$

$$\frac{\blacktriangle \Gamma Z B}{\blacktriangle \Delta E Z} = \frac{ZB}{EZ} \quad \text{όμοια.}$$

Άρα, $AB\Gamma\Delta = \blacktriangle \Delta A E + 2\blacktriangle \Delta E Z + \blacktriangle \Gamma Z B = \left(\frac{AE}{EZ} + \frac{ZB}{EZ} + 2\right) \cdot \blacktriangle \Delta E Z$

$= \frac{AE + ZB + 2EZ}{EZ} \cdot \blacktriangle \Delta E Z = \frac{AB + EZ}{EZ} \cdot \blacktriangle \Delta E Z = \frac{AB + EZ}{EZ} \cdot T$

Ἔστω τώρα δύο τραπέζια $AB\Gamma\Delta$ κ' $A'B'\Gamma'\Delta'$ πού βρίσκονται κάτω ἀπό τό ἴδιο ὕψος. Γιά τά ἀντίστοιχα τρίγωνά τους T εἶναι $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{E'Z'}{EZ}$. Ἄρα

$$\frac{A'B'\Gamma'\Delta}{AB\Gamma\Delta} = \frac{\dfrac{A'B'+E'Z'}{E'Z'}\cdot T'}{\dfrac{AB+EZ}{EZ}\cdot T} = \frac{A'B'+E'Z'}{AB+EZ}.$$