ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Το παραμετρικό δίκτυο u =σταθ. και v =σταθ. ενός τμήματος επιφάνειας σ καλείται *ισοθερμικό*, εάν

$$\mathbf{I}_\sigma = \lambda^2(u,v)(du^2+dv^2)$$

για κάποια λεία συνάρτηση λ.

Αποδείξτε ότι το δίκτυο είναι ισοθερμικό, αν και μόνο αν

$$F=0, \quad \frac{E}{G}=\frac{A(u)}{B(v)}$$

όπου A, B λείες συναρτήσεις των u και v αντίστοιχα.

(Υπόδειξη: Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο, υποθέστε χωρίς βλάβη ότι $A, B>0$ και γράψτε

$$\mathbf{I}_\sigma = \frac{G}{B(v)}(A(u)du^2+B(v)dv^2.$$

Αναπαραμετρήστε τώρα με

$$(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \left(\int\sqrt{A(u)}du, \int\sqrt{B(v)}dv\right).$$

Παρατηρήστε, ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτο το παραμετρικό δίκτυο.)

2. Βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή του τόρου

$$\sigma(u,v) = (b+a\sin v)\cos u, (b+a\sin v)\sin u, a\cos u), \quad (u,v)\in(0,2\pi)^2, \quad a,b>0.$$

Κατόπιν, υπολογίστε το εμβαδόν του.

3. Μία επιφάνεια εκ περιστροφής δίνεται από το

$$\sigma(u,v) = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u+\log\tan(\pi/4+u/2), \quad (u,v)\in(0,\pi/2)\times(0,2\pi).$$

(1) Βρείτε την πρώτη υεμελιώδη μορφή της.
(2) Δείξτε ότι η σ είναι ισομετρική με το τμήμα $(\pi/3,\pi/2))\times(0,2\pi)$ του επιπέδου. Για να το κάνετε αυτό θέσατε

$$\tilde{u}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\cos u\right), \quad \tilde{v}=2v.$$

Δικαιολογήστε τα βήματά σας.

4. Από τον τύπο για την γωνία των επιφανειακών καμπυλών ενός τμήματος επιφάνειας $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ συμπεράνετε ότι δύο οικογένειες $\phi(u,v)$=σταθ. και $\psi(u,v)$ =σταθ. επιφανειακών καμπυλών είναι ορθογώνιες, εάν και μόνο εάν ικανοποιούν την δ.ε.

$$E\phi_v\psi_v - F(\phi_u\psi_v + \phi_v\psi_u) + G\phi_u\psi_u = 0.$$

Συνεπώς, αν $\phi(u,v)$=σταθ. είναι μία δεδομένη οικογένεια επιφανειακών καμπυλών, οι *ορθογώνιες τροχιές της* δίνονται από την λύση της δ.ε. με μερικές παραγώγους

$$(G\phi_u - F\phi_v)\psi_u + (E\phi_v - F\phi_u)\psi_u = 0.$$

Η παραπάνω μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{du}{dv} = \frac{G\phi_u - F\phi_v}{F\phi_u - E\phi_v}.$$

Ως εφαρμογή του παραπάνω τύπου, βρείτε και λυστε την δ.ε. που δίδει τις ορθογώνιες τροχιές των καμπύλων u =σταθ. της

$$\sigma(u,v) = (u, v, uv), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(Απάντηση:

$$\frac{du}{dv} = \frac{1+u^2}{uv},$$

και η λύση είναι $\psi(u,v) = \sqrt{1+u^2}/v = c$, όπου c είναι θετικό.)

5. Έστω τα τμήματα επιφάνειας

$$\sigma_1(t,v) = (\cosh t \cos v, \cosh t \sin v, t), \quad (t,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi),$$
$$\sigma_2(u,s) = (u\cos s, u \sin s, s), \quad (u,s) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ όπου

$$\Phi(t,v) = (\sinh t, v)$$

ορίζει μία απεικόνιση μεταξύ των δύο επιφανειών. Δείξτε ότι η απεικόνιση αυτή, είναι ισομετρία.

6. Βρείτε τό εμβαδόν, την περίμετρο και τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου

$$u = \frac{1}{2}v, \quad v = 1,$$

επάνω στο ελικοειδές

$$x = u\cos v, \quad y = u \sin v, z = -v.$$

7. Θεωρήστε τίς επιφάνειες $\mathcal{S}_1$ και $\S_2$ με παραμετρήσεις

$$\sigma_1(u,v) = (u+v, u-v, uv), (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\sigma_2(u,v) = (u, v, uv), (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

και την απεικόνιση $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ όπου

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, z\right)$$

Εξετάστε εάν η f είναι α) τοπική ισομετρία, β) σύμμορφη απεικόνιση, γ) ισεμβαδική απεικόνιση.