Μ 229 – ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009–10

ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ - ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I — ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

I.1. Σφαιρική ἀπόσταση

Ἡ σφαιρική γεωμετρία εἶναι ἡ γεωμετρία ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\| = 1\}.$$

Ἕνας μέγιστος κύκλος, μήκους 2π, εἶναι ἡ τομή τῆς S καί ἑνός ἐπιπέδου πού περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή $\vec{o}$. Κάθε ἄλλος κύκλος τῆς S εἶναι μία τομή τῆς S μέ ἕνα ἐπίπεδο μήκους $< 2\pi$. Ἐάν σ εἶναι ἕνας μέγιστος κύκλος καί γ εἶναι ἕνα τόξο του, τότε τό μῆκος τοῦ γ εἶναι ἁπλῶς ἡ γωνία (σέ ἀκτίνια) πού ὑποτείνεται ἀπό τό γ στήν ἀρχή. Δεδομένων δύο σημείων $\vec{a}, \vec{b} \in S$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός μέγιστος κύκλος, ἔστω ὁ C πού τά περιέχει. Ὁ C εἶναι γιά τήν ἀκρίβεια ἡ τομή τῆς S καί τοῦ ἐπιπέδου πού περιέχει τά $\vec{o}$, $\vec{a}$ καί $\vec{b}$. Ἐπίσης, τά $\vec{a}$ καί $\vec{b}$ διαιροῦν τόν C σέ δύο τόξα πού ἔχουν ἄνισα μήκη παρεκτός ἄν $\vec{a} = -\vec{b}$.

Ὁρισμός 1.1.1. Ἔστω $\vec{a}$ καί $\vec{b}$ δύο σημεῖα τῆς S. Τότε ἡ σφαιρική ἀπόσταση $\delta(\vec{a}, \vec{b})$ μεταξύ τῶν $\vec{a}$ καί $\vec{b}$ εἶναι τό μῆκος τοῦ μικρότερου τῶν δύο τόξων τοῦ μοναδικοῦ μέγιστου κύκλου πού περιέχει τά $\vec{a}$ καί $\vec{b}$. Δηλαδή,

$$\delta(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \qquad (1.1.1)$$

ὅπου τό $\cos^{-1}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ἐπιλέγεται νά ἀνήκει στό $[0,\pi]$.

<u>Ἐφαρμογή.</u> Θεωρεῖστε τήν Γῆ ὡς τέλεια σφαῖρα ἀκτῖνας R τῆς ὁποίας τό κέντρο κεῖται στήν ἀρχή $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$. Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι ὁ $\vec{\imath}$-ἄξονας τέμνει τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς στό σημεῖο μέ μηδενικό γεωγραφικό μῆκος καί πλάτος, καί ὅτι ὁ θετικός $\vec{k}$-ἄξονας περνᾶ ἀπό τόν Βόρειο Πόλο. Ἔτσι, ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς μέ πλάτος a (θετικό στό βόρειο ἡμισφαίριο καί ἀρνητικό στό νότιο) καί μήκους β δίδεται ἀπό τό διάνυσμα

$$R(\cos a\cos\beta\,\vec{\imath} + \cos a\sin\beta\,\vec{\jmath} + \sin a\,\vec{k})$$

(Θυμηθεῖτε τίς σφαιρικές συντεταγμένες, κοιτάξτε τόν Tromba)

Ἔστω τώρα ὅτι $\vec{x_1}$ καί $\vec{x_2}$ εἶναι δύο σημεῖα ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, ἄς ποῦμε

$$\vec{x}_i = R(\cos a_i\cos\beta_i\,\vec{\imath} + \cos a_i\sin\beta_i\,\vec{\jmath} + \sin a_i\,\vec{k}) \quad i=1,2.$$

Τότε, ἀπό τήν (1.1.1) συνάγεται (πῶς?) ὅτι

$$\delta(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = R\cos^{-1}\left(\cos a_1\cos a_2\cos(\beta_1-\beta_2) + \sin a_1\sin a_2\right) \qquad (1.1.2)$$

Ὁ τύπος (1.1.2) δίδει τήν ἀπόσταση (μετρημένη ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς) μεταξύ δύο σημείων πλάτους a_i καί μήκους β_i, $i=1,2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ I.1.

1. Βεβαιῶστε ὅτι κάθε σημεῖο πλάτους a ἀπέχει σφαιρική ἀπόσταση $R(\pi/2-a)$ ἀπό τόν βόρειο πόλο.

2. Ὑποθέστε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαῖρα ἀκτίνας 4000 μιλίων. Δεῖξτε ὅτι ἡ σφαιρική ἀπόσταση μεταξύ τοῦ Λονδίνου (πλάτος 51°, μῆκος 0°) καί τοῦ Σύδνεϋ (πλάτος 34° νότιο, μῆκος 151° ἀνατολικό) εἶναι περίπου 10500 μίλια

3. Ὑποθέστε ὅτι ἕνα ἀεροπλάνο πετᾶ στόν συντομότερο δρόμο πού συνδέει τό Λονδῖνο (πλάτος 51°, μῆκος 0°) μέ τό Λός Ἄντζελες (πλάτος 34° βόρειο, μῆκος 151° δυτικό). Πόσο κοντά στόν βόρειο πόλο πλησιάζει τό ἀεροπλάνο;

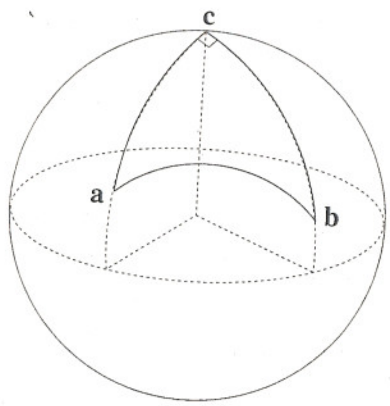
4. Ἔστω $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ δύο σημεῖα ἐπάνω στή σφαῖρα. Δεῖξτε ὅτι ἡ κάθετος στό ἐπίπεδο πού ὁρίζει ὁ μέγιστος κύκλος πού περνᾶ ἀπό τά $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τέμνει τήν σφαῖρα στά σημεῖα $\pm\vec{z}$ ὅπου $\vec{z} = (\vec{x}\times\vec{y}) / \|\vec{x}\times\vec{y}\|$. Ὑποθέστε ὅτι τό $\vec{w}$ κεῖται στήν ἴδια πλευρά τοῦ ἐπιπέδου μέ τό $\vec{z}$. Δεῖξτε ὅτι $\cos\delta(\vec{w},\vec{z}) = \langle \vec{w}, \vec{x}\times\vec{y}\rangle$

I.2 Σφαιρική τριγωνομετρία

Ξεκινοῦμε μέ τήν σφαιρική ἔκδοση τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Ἔστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ σημεῖα τῆς σφαίρας πού δέν κεῖνται ἐπάνω στόν ἴδιο μέγιστο κύκλο. Τοῦτα καθορίζουν ἕνα σφαιρικό τρίγωνο τῆς S, τοῦ ὁποίου οἱ πλευρές εἶναι τά τόξα τῶν μέγιστων κύκλων πού συνδέουν τά τρία σημεῖα ἀνά ζεύγη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ γωνία τοῦ τριγώνου στό $\vec{c}$ εἶναι $\pi/2$, καί μποροῦμε νά θέσουμε τό τρίγωνο ἔτσι ὥστε

$$\vec{c} = \vec{k}, \quad \vec{a} = \cos a_1 \vec{i} + \sin a_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = \cos a_2 \vec{j} + \sin a_2 \vec{k} \qquad (1.2.1)$$

γιά κάποια a_1 καί a_2 (βλ. Σχῆμα 1.2.1). Καί αὐτόν τόν



Σχῆμα 1.1.1

Τρόπο $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$. Ἐφαρμόζοντας τήν (1.1.1) προκύπτει ἀμέσως τό

Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ἔστω $\vec{a}, \vec{b}$ καί $\vec{c}$ οἱ κορυφές ἑνός σφαιρικοῦ τριγώνου τῆς S τοῦ ὁποίου οἱ πλευρές σχηματίζουν ὀρθή γωνία στό $\vec{c}$. Τότε

$$\cos\delta(\vec{a}, \vec{b}) = \cos\delta(\vec{a}, \vec{c}) \cos\delta(\vec{b}, \vec{c}) \qquad (1.2.2)$$

Θεωρεῖστε ἕνα "ἀπειροστό" σφαιρικό τρίγωνο, δηλαδή οἱ πλευρές του εἶναι "πολύ μικρές". Παρατηρεῖστε (κάνοντας χρήση τῆς σχέσης $\cos\theta \approx 1 - \theta/2$ ὅταν θ μικρό) ὅτι τό Πυθαγόρειο Θεώρημα (1.2.2) ὁμοιάζει χονδρικά μέ τό σύνηθες Π.Θ.

Ἔστω πάλι τυχόν σφαιρικό τρίγωνο μέ κορυφές $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ καί γωνίες στίς ἀντίστοιχες πλευρές α, β, γ. Ἐπίσης θέτουμε $A = \delta(\vec{b}, \vec{c})$, $B = \delta(\vec{a}, \vec{c})$, $C = \delta(\vec{a}, \vec{b})$.

Θεώρημα 1.2.1. Σέ κάθε σφαιρικό τρίγωνο μέ κορυφές $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ἔχουμε

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \sin A \sin B \sin \gamma. \qquad (1.2.3)$$

Ἀπόδειξη. Ἐπιλέγουμε τούς ἄξονες οὕτως ὥστε $\vec{c}=\vec{k}$ καί τό $\vec{a}$ κεῖται ἐπί τοῦ $(\vec{j},\vec{k})$-ἐπιπέδου. Ἐφ' ὅσον $\delta(\vec{a},\vec{c})=B$, βλέπουμε ὅτι $\vec{a}=(\sin B, 0, \cos B)$. Παρόμοια τό $\vec{b}$ ἔχει πλάτος $\pi/2-\alpha$ καί μῆκος γ· ἄρα,

$$\vec{b}=(\sin A\cos\gamma, \sin A\sin\gamma, \cos A),$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ (1.2.3) (πῶς;). □

Οἱ νόμοι ἡμιτόνων καί συνημιτόνων. Σέ σφαιρικό τρίγωνο μέ κορυφές $\vec{a}$, $\vec{b}$ καί $\vec{c}$ ἰσχύει:

1 Ὁ κανόνας τῶν ἡμιτόνων $\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin\beta}{\sin B}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$ καί

2. Ὁ κανόνας τῶν συνημιτόνων $\cos C=\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma$.

Ἀπόδειξη. (Ἄσκηση. Γιά τόν κανόνα τῶν ἡμιτόνων χρησιμοποιεῖστε τήν (1.2.3) καί τήν ταυτότητα

$$\langle\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\rangle=\langle\vec{c},\vec{a}\times\vec{b}\rangle=\langle\vec{b},\vec{c}\times\vec{a}\rangle.$$

Γιά τόν κανόνα τῶν συνημιτόνων, διαλέξτε $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ὅπως στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 1.2.1.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι.2.

1. Ἀποδεῖξτε τό Πυθαγόρειο Θεώρημα μέ χρήση τοῦ νόμου τῶν συνημιτόνων.

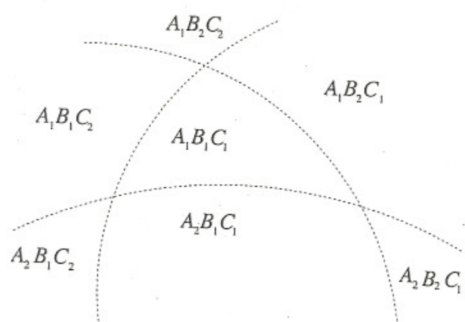
2. Δεῖξτε ὅτι ἐάν ἕνα ἰσόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο ἔχει πλευρές μήκους A καί ἐσωτερικές γωνίες a, τότε $\cos(a/2)\cos(A/2)=1/2$. Συμπεράνατε ὅτι ἐάν $a>\pi/3$ (ἔτσι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν

τοῦ τριγώνου ὑπερβαίνει τό π.

3. Ὑπολογίστε τήν περίμετρο ἑνός σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ γωνίες εἶναι π/2.

I. 3. Σφαιρικό ἐμβαδόν.

Θά δηλώνουμε τό σφαιρικό ἐμβαδόν (δηλαδή, τό ἐμβαδόν ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς S) ἑνός συνόλου E μέ $\mu(E)$ καί θά δεχτοῦμε ὅτι $\mu(S) = 4\pi$. Δύο διαφορετικοί μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σέ διαμετρικά ἀντίθετα σημεῖα καί χωρίζουν τήν σφαῖρα σέ τέσσερις περιοχές πού καλοῦνται μηνίσκοι. Ἡ γωνία ἑνός μηνίσκου εἶναι ἡ γωνία κατά τήν ὁποία τέμνονται οἱ κύκλοι καί εἶναι φανερό ὅτι τό ἐμβαδόν ἑνός μηνίσκου γωνίας a εἶναι $2a$, διότι εἶναι προφανῶς ἀνάλογο μέ τό a καί ἴσο μέ 4π ὅταν $a=2\pi$.
Σέ ἀντίθεση μέ τήν Εὐκλείδεια Γεωμετρία, τό ἐμβαδόν ἑνός σφαιρικοῦ τριγώνου καθορίζεται πλήρως ἀπό τίς γωνίες του (δέν ὑπάρχει ὁμοιότητα, γιατί;) καί ὁ ἀκόλουθος τύπος πρωτοαποδείχθηκε τό 1625 ἀπό τόν A. Girard.



Σχῆμα 1.3.1.

Θεώρημα 1.3.1. Έστω T σφαιρικό τρίγωνο μέ γωνίες α, β, γ. Τότε
$$\mu(T) = \alpha+\beta+\gamma-\pi$$

Απόδειξη. Τό τρίγωνο T αποτελείται από πλευρές πού κεῖνται σέ τρεῖς μέγιστους κύκλους, τούς όποίους σημειώνουμε μέ $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Ο $\mathcal{A}$ ύποδιαιρεῖ τήν σφαίρα σέ δύο ημισφαίρια τά όποῖα καλοῦμε A_1 καί A_2. Παρόμοια ορίζουμε τά B_1, B_2, C_1, C_2 καί τά επιλέγουμε έτσι ώστε $T = A_1 \cap B_1 \cap C_1$ μέ τό T νά έχει γωνίες α, β, γ στίς κορυφές $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\cap\mathcal{A}$, καί $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ αντίστοιχα. Τώρα οί $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ διαιροῦν τήν σφαίρα σέ όκτώ τρίγωνα $A_i \cap B_j \cap C_k$, όπου $i, j, k = 1, 2$ καί τά όποία γιά συντομία θά γράφουμε $A_iB_jC_k$. Τό τρίγωνο $T = A_1B_1C_1$ καί οί έξι γειτονές του φαίνονται στό Σχῆμα 1.3.1· εδῶ μόνο τό $A_2B_2C_2$ δέν φαίνεται.

Τώρα (γιά παράδειγμα) τά $A_1B_1C_1$ καί $A_2B_1C_1$ μαζί σχηματίζουν ένα μηνίσκο γωνίας α πού ορίζεται από τούς μέγιστους κύκλους $\mathcal{B}$ καί $\mathcal{C}$. Έτσι βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_2B_1C_1) &= 2\alpha \\
\mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_1B_2C_1) &= 2\beta \\
\mu(A_1B_1C_1) + \mu(A_1B_1C_2) &= 2\gamma \\
\mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_1B_2C_2) &= 2\alpha \\
\mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_2B_1C_2) &= 2\beta \\
\mu(A_2B_2C_2) + \mu(A_2B_2C_1) &= 2\gamma .
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τίς παραπάνω έξι σχέσεις καί παρατηρώντας ότι

$$\mu(A_1B_1C_1) = \mu(A_2B_2C_2) \qquad \sum_{i,j,k=1}^{2} \mu(A_iB_jC_k) = 4\pi$$

βλέπουμε ότι $\mu(A_1B_1C_1) + \pi = \alpha+\beta+\gamma$ πού εἶναι τό ζητούμενο $\square$

Γιά σφαιρικά πολύγωνα έχουμε τό παρακάτω

Θεώρημα 1.3.2. Έστω P ένα σφαιρικό πολύγωνο (μέ κάθε μία από τίς n πλευρές του νά είναι τόξο μέγιστου κύκλου) καί έστω οί εσωτερικές γωνίες του $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Τότε

$$\mu(P) = \theta_1 + \cdots + \theta_n - (n-2)\pi.$$

Απόδειξη: Άσκηση όταν τό P είναι κυρτό. (Διαιρέστε το σέ τρίγωνα).

$\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ I.3

1. Υπολογίστε τό εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου τού οποίου όλες οί γωνίες είναι $\pi/2$ καί επιπλέον τό εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου τού οποίου όλες οί γωνίες είναι $3\pi/2$.

2. Γιά ποιές τιμές τού θ μπορεί νά κατασκευαστεί ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο γωνίας θ;

3. Θεώρημα τού Αρχιμήδη. Τό εμβαδόν τού τμήματος τής επιφάνειας τής S πού κεΐται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων (άς πούμε $x_3=a$ καί $x_3=b$) ισούται μέ τό εμβαδόν τού τμήματος τού περιγεγραμμένου κυλίνδρου πού κεΐται μεταξύ αυτών των δύο επιπέδων. Πορισματικά υπολογίστε τό εμβαδόν τού "πολικού καπέλου" $\{\vec{x} \in S : \delta(\vec{x}, \vec{k}) < r\}$.