ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ — ΤΕΤΡΑΝΙΑ ΚΑΙ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΜΕΡΟΣ Α

ΙΙ.1 Ἰσομετρίες τοῦ Εὐκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$.

Ὁρισμός 2.1.1 Μία ἀπεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ εἶναι μία ἰσομετρία ἐάν διατηρεῖ τίς ἀποστάσεις δηλαδή,

$$\forall\, \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \qquad \|f(\vec{x})-f(\vec{y})\| = \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Σέ ὅτι ἀκολουθεῖ, θά θεωρήσουμε ἀνακλάσεις πάνω σέ ἐπίπεδα. Ἔστω ἐπίπεδο Π τοῦ $\mathbb{R}^3$ ὁριζόμενο ἀπό τήν σχέση $\langle \vec{x},\vec{n}\rangle = d$ ὅπου $\vec{n}$ κάθετο στό Π καί $d \geq 0$. Ἔστω ἐπίσης $R(\vec{x})$ ἡ ἀνάκλαση ἐπάνω στό Π. Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι

$R(x) = \vec{x} + 2t\vec{n}$, ὅπου τό t ἐπιλέγεται ἔτσι ὥστε τό μέσον $\vec{x}+t\vec{n}$ τῶν $\vec{x}$ καί $\vec{x}+2t\vec{n}$ νά ἀνήκει στό Π. Αὐτό ὅμως σημαίνει ὅτι $t = d - \langle\vec{x},\vec{n}\rangle$ ἄρα

$$R(\vec{x}) = \vec{x} + 2(d - \langle \vec{x},\vec{n}\rangle)\vec{n}. \qquad (2.1.2)$$

Εἶναι γεωμετρικά προφανές ὅτι

a) $R(\vec{x}) = \vec{x} \iff \vec{x} \in \Pi$
b) $R(R(\vec{x})) = \vec{x} \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$
c) R εἶναι ἰσομετρία

<u>Ἄσκηση</u>: Ἐπιβεβαιῶστε ἀλγεβρικά τά a) b) c) ὅπως καί τό

Θεώρημα 2.1.2 Μία ἀνάκλαση ἐπί ἕνα ἐπίπεδο Π εἶναι γραμμική ἀπεικόνιση ἄν καί μόνο ἄν $O \in \Pi$.

Ἄς θεωρήσαμε τώρα δύο παράλληλα ἐπίπεδα, ἄς ποῦμε τά

$$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d_1 \quad , \quad \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d_2 ,$$

μέ ἀντίστοιχες ἀνακλάσεις τίς R_1 καί R_2. Βλέπουμε εὔκολα ὅτι

$$R_1\big(R_2(\vec{x})\big) = \vec{x} + 2(d_1 - d_2)\vec{n}, \text{ ἄρα}$$

> ἡ σύνθεση δύο ἀνακλάσεων σέ παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι μεταφορά (καί ἀντιστρόφως. (γιατί;))

Κατόπιν, θεωροῦμε τήν σύνθεση τῶν ἀνακλάσεων R_j δύο διαφορετικῶν μεταξύ τους τεμνόμενων ἐπιπέδων Π_1 καί Π_2. Τοῦτα τέμνονται κατά μῆκος μιᾶς εὐθείας L, καί κάθε R_j σταθεροποιεῖ κάθε σημεῖο τῆς L. Ἐπιπρόσθετα, $R_j(\Pi) = \Pi$ γιά κάθε ἐπίπεδο Π ὀρθογώνιο στήν L (κάνετε ἕνα σχῆμα). Ἡ δράση τῆς $R_2 R_1$ στό Π εἶναι μία ἀνάκλαση ἐπί τήν εὐθεία $\Pi \cap \Pi_1$ ἀκολουθούμενη ἀπό μία ἀνάκλαση ἐπί τήν εὐθεία $\Pi \cap \Pi_2$· ἄρα

> ἡ σύνθεση δύο ἀνακλάσεων σέ τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι μία περιστροφή γύρω ἀπό τόν ἄξονα L κατά γωνία διπλάσια τῆς διέδρης γωνίας τῶν ἐπιπέδων

Ὁ παρακάτω ὁρισμός εἶναι συνεπῶς εὔλογος:

Ὁρισμός 2.1.3 Μία περιστροφή τοῦ $\mathbb{R}^3$ εἶναι σύνθεση ἀνακλάσεων ἐπί δύο διαφορετικά τεμνόμενα ἐπίπεδα. Ἡ εὐθεία τομῆς τῶν ἐπιπέδων

Καλεῖται ἄξονας τῆς περιστροφῆς.

Θεώρημα 2.1.4 Κάθε ἰσομετρία τοῦ $\mathbb{R}^3$ εἶναι σύνθεση τὸ πολύ τεσσάρων ἀνακλάσεων. Εἰδικότερα, κάθε ἰσομετρία εἶναι μία 1-1 καὶ ἐπὶ ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{R}^3$. Κάθε ἰσομετρία πού διατηρεῖ τὸ $\vec{0}$ εἶναι ἡ σύνθεση τὸ πολύ τριῶν ἀνακλάσεων ἐπὶ ἐπιπέδων πού περιέχουν τὸ $\vec{0}$.

Γιά τήν ἀπόδειξη χρειαζόμαστε τρία ἁπλᾶ λήμματα:

Λῆμμα 2.1.5 Ἔστω f ἰσομετρία μέ $f(\vec{0})=\vec{0}$. Τότε, γιὰ κάθε $\vec{x}$ καὶ $\vec{y}$, $\|f(\vec{x})\|=\|\vec{x}\|$ καὶ $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ (δηλαδή, ἡ f διατηρεῖ τὶς νόρμες κι τό ἐσωτερικό γινόμενο).

Ἀπόδειξη: Πρῶτα,

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})-\vec{0}\| &= \|f(\vec{x})-f(\vec{0})\| = \\ &= \|\vec{x}-\vec{0}\| \\ &= \|\vec{x}\|.\end{aligned}$$

Κατόπιν,

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x})\|^2+\|f(\vec{y})\|^2 - 2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle &= \|f(\vec{x})-f(\vec{y})\|^2 \\ &= \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle.\end{aligned}$$

□

Λῆμμα 2.1.6 Ἐάν ἡ ἰσομετρία f σταθεροποιεῖ τά $\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ τότε $f = I$ ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$: ~~[illegible]~~ μέ $f(\vec{x}) = \vec{y}$.

Τότε $\|\vec{y} - \vec{\imath}\| = \|f(\vec{x}) - f(\vec{\imath})\| = \|\vec{x} - \vec{\imath}\|$

Ὑψώνοντας στό τετράγωνο παίρνουμε $\langle \vec{y}, \vec{\imath} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{\imath} \rangle$ (Γιατί;)

Παρόμοια παίρνουμε $\langle \vec{y}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{j} \rangle$ καί $\langle \vec{y}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{k} \rangle$

Ἄρα, τό $\vec{y} - \vec{x}$ εἶναι κάθετο στά $\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}$ δηλ. $\vec{x} = \vec{y}$. □

Λῆμμα 2.1.7 Ἔστω $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \neq 0$. Τότε ὑπάρχει ἀνάκλαση R ἐπί ἐπίπεδο Π πού περνᾶ ἀπό τό $\vec{0}$ τέτοια ὥστε

$$R(\vec{a}) = \vec{b} \quad \text{καί} \quad R(\vec{b}) = \vec{a}.$$

Ἀπόδειξη. Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $\vec{a} \neq \vec{b}$, διότι ἄν $\vec{a} = \vec{b}$ μποροῦμε νά θεωρήσουμε κάθε ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τά $\vec{0}, \vec{a}$.
Ἄν,

$$\vec{n} = \frac{(\vec{a} - \vec{b})}{\|\vec{a} - \vec{b}\|},$$

ἔστω $\Pi : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ καί R ἡ ἀνάκλαση στό Π.
Εὔκολα βλέπουμε ὅτι $R(\vec{a}) = \vec{b}$ $R(\vec{b}) = \vec{a}$ (κάντε σχῆμα) □.

Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 2.1.4. Ἔστω f ἰσομετρία τοῦ $\mathbb{R}^3$. Ἐάν $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$, τότε ὑπάρχει ἀνάκλαση R_1 πού ἐναλλάσσει τά $\vec{0}$ καί $f(\vec{0})$. Ἐάν ἡ f διατηρεῖ τό $\vec{0}$, θέτουμε $R_1 = I$. Ἄρα, ἡ $f_1 = R_1 f$ εἶναι μία ἰσομετρία πού διατηρεῖ τό $\vec{0}$. Ἀφοῦ $\|f_1(\vec{k})\| = \|\vec{k}\|$ ὑπάρχει ἀνάκλαση R_2 ἐπί κάποιο ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή καί ἐναλλάσσει τά $f_1(\vec{k})$ καί $\vec{k}$.

Ἄρα, ἡ $f_2 = R_2 f_1$ εἶναι μία ἰσομετρία πού διατηρεῖ τά $\vec{0}, \vec{k}$. Ἀπό τό Λῆμμα 2.1.5 τά $f(\vec{i}), f(\vec{j})$ εἶναι ὀρθογώνια μοναδιαῖα διανύσματα στό ἐπίπεδο $\langle \vec{x}, \vec{k} \rangle = 0$. Ὑπάρχει μία ἀνάκλαση R_3 ἐπί κάποιο κάθετο ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή πού ἀπεικονίζει τό $f(\vec{j})$ στό $\vec{j}$ (καί διατηρεῖ τά $\vec{0}, \vec{k}$) ἄρα τώρα, ἡ $R_3 f_2$ διατηρεῖ τά $\vec{0}, \vec{j}, \vec{k}$. Ἔστω $f_3 = R_3 f_2$. Τότε $f_3(\vec{i}) = \pm \vec{i}$. Ἐάν $f_3(\vec{i}) = \vec{i}$, ἔστω $R_4 = I$. Ἄν ὄχι, ἔστω R_4 ἡ ἀνάκλαση στό $\langle \vec{x}, \vec{i} \rangle = 0$. Τότε τό Λῆμμα 2.1.6 συνεπάγεται ὅτι $R_4 f_3 = I$, ἔτσι $f = R_1 R_2 R_3 R_4$.

Θεώρημα 2.1.8 Ἡ γενικότερη μορφή μιᾶς ἰσομετρίας f δίδεται ἀπό

$$f(\vec{x}) = A(\vec{x}) + f(\vec{0})$$

ὅπου A εἶναι μία γραμμική ἀπεικόνιση.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ f εἶναι μία ἰσομετρία. Τότε $A(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{0})$ εἶναι μία ἰσομετρία πού σταθεροποιεῖ τό $\vec{0}$. Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ 2.1.4 προκύπτει ὅτι ἡ A εἶναι σύνθεση τό πολύ τριῶν ἀνακλάσεων ἐπί ἐπιπέδων πού περιέχουν τό $\vec{0}$. Ἀφοῦ κάθε τέτοια ἀνάκλαση εἶναι γραμμική, ἄρα εἶναι καί ἡ A.

Δείχνεται εὔκολα ὅτι κάθε σύνθεση δύο ἰσομετριῶν εἶναι ἰσομετρία (πῶς?) Τετριμμένα, ἡ ταυτοτική ἀπεικόνιση εἶναι ἐπίσης ἰσομετρία. Ἐπίσης ἄν $f = R_1 \cdots R_p$ εἶναι ἰσομετρία τότε καί ἡ $f^{-1} = R_p^{-1} \cdots R_1^{-1}$ εἶναι ἰσομετρία

Θεώρημα 2.1.9 Τό σύνολο τῶν ἰσομετριῶν τοῦ $\mathbb{R}^3$ εἶναι ὁμάδα μέ πράξη τήν σύνθεση συναρτήσεων.

Ἄσκηση Γράψτε μέ λεπτομέρειες τόν ὁρισμό τοῦ ἀντίστροφου στοιχείου.