<u>Λήμμα</u>. Δεδομένων ανακλάσεων $R_1,\dots,R_n$ υπάρχουν ανακλάσεις $\tilde R_1,\dots,\tilde R_n$ επί επιπέδων που περιέχουν το $\vec 0$ και διάνυσμα $\vec b$ τέτοιο ώστε

$$R_1 \cdots R_n(\vec x) = \tilde R_1 \cdots \tilde R_n(\vec x) + \vec b.$$

<u>Απόδειξη</u>. Η ανάκλαση R της (2.1.1) μπορεί να γραφεί και ως $R = T\tilde R$ όπου $T(\vec x) = \vec x + 2d\vec u$ είναι μεταφορά κατά $2d\vec u$ και $\tilde R(\vec x)$ είναι η ανάκλαση στο επίπεδο $<\vec x, \vec u> = \vec 0$. Έτσι

$$R(\vec x) = \tilde R(\vec x) + \vec a,$$ όπου $\vec a$ κατάλληλο διάνυσμα.

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της απόδειξης παρατηρώντας ότι αν R_1, R_2 είναι δύο ανακλάσεις τότε

$$R_1 R_2(\vec x) = \tilde R_1 \tilde R_2(\vec x) + \tilde R_1(\vec a_2) + \vec a_1$$

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα ισομετρίας που δεν μπορεί να παρασταθεί σαν σύνθεση λιγότερων των τεσσάρων ανακλάσεων.
Έστω f η ισομετρία $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, x_3+1)$. Τούτη είναι περιστροφή κατά π γύρω από τον $\vec k$ άξονα ακολουθούμενη από μεταφορά κατά $\vec k$.
Έστω A_1, A_2 οι ανακλάσεις στα $<\vec x, \vec i> = 0$ κ' $<\vec x, \vec j> = 0$ αντίστοιχα. Τότε $f(\vec x) = A_1 A_2(\vec x) + \vec k$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f μπορεί να γραφεί ως σύνθεση p ανακλάσεων και, όπως στο Λήμμα γράφουμε

$$f(\vec x) = \tilde R_1 \cdots \tilde R_p(\vec x) + \vec b$$

Είναι $f(\vec 0) = \vec b = \vec k$ άρα $A_1 A_2 = \tilde R_1 \cdots \tilde R_p$.
Θα δείξουμε παρακάτω (το πιστεύουμε προς στιγμήν) ότι αν Q είναι μια ανάκλαση επί επίπεδο που περιέχει την αρχή, τότε $\forall\, \vec x, \vec y, \vec z$

$$(Q(\vec x), Q(\vec y), Q(\vec z)) = -(\vec x, \vec y, \vec z)$$

(αφού οι ανακλάσεις αντιστρέφουν τον προσανατολισμό).

Ἐφαρμόζουμε αὐτό στήν σχέση $A_1 A_2 = \tilde{R}_1 \cdots \tilde{R}_p$ κ' παίρνουμε $(-1)^2 = (-1)^p$ ἄρα ὁ p εἶναι ἄρτιος. Συνεπῶς ἐφοῦ ὁ p δέν μπορεῖ νά εἶναι 2 (γιατί;) καταλήγουμε σέ ἐπιθυμητό ἀποτέλεσμα

<u>Θεώρημα 2.1.11</u> Ἔστω R ἀνάκλαση ἐπί ἐπίπεδο πού περιέχει τήν ἀρχή. Τότε $\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$

$$\langle R(\vec{x}), R(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \qquad (2.1.2)$$

$$R(\vec{x}) \times R(\vec{y}) = -R(\vec{x} \times \vec{y}) \qquad (2.1.3)$$

$$\left(R(\vec{x}), R(\vec{y}), R(\vec{z})\right) = -(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \qquad (2.1.4)$$

<u>Ἀπόδειξη.</u> Πρόκειται περί κατευθείαν ὑπολογισμῶν. Θυμίζουμε μόνο ὅτι

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{c}) = \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$$

<u>Πόρισμα</u> Ἄν A εἶναι περιστροφή περί τήν ἀρχή,

$$\langle A(\vec{x}), A(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad A(\vec{x}) \times A(\vec{y}) = A(\vec{x} \times \vec{y}) \qquad (2.1.5)$$

$$\text{καί} \quad \left(A(\vec{x}), A(\vec{y}), A(\vec{z})\right) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

(Δικαιολογῆστε).

<u>Θεώρημα 2.1.12</u> Τό σύνολο τῶν περιστροφῶν τοῦ $\mathbb{R}^3$ πού σταθεροποιοῦν τό $\vec{0}$ εἶναι ὁμάδα μέ πράξη τήν σύνθεση.

<u>Ἀπόδειξη.</u> Τό μόνο πού χρειάζεται νά ἀποδείξουμε εἶναι ὅτι ἡ σύνθεση δύο τέτοιων περιστροφῶν εἶναι περιστροφή γύρω ἀπό τήν ἀρχή.
Ἔστω $R_3 = R_1 R_2$ ὅπου R_1, R_2 περιστροφές πού σταθεροποιοῦν τό $\vec{0}$.

Ἀφοῦ κάθε περιστροφή διατηρεῖ τόν προσανατολισμό τῶν διανυσμάτων, τό ἴδιο ἰσχύει ἐ᾽ γιά τή R_3, καί αὐτό δείχνει ὅτι ἄν ἐκφράσουμε τήν R_3 ὡς σύνθεση p ἀνακλάσεων, τότε τό p εἶναι ἄρτιος. Ὅμως, ἀπό τό Θεώρημα 2,1.4 ἡ R_3 εἶναι ἡ σύνθεση τό πολύ ~~δύο~~ τριῶν ἀνακλάσεων, ἄρα $p=2$ καί ἄρα ἡ R_3 εἶναι περιστροφή.

Ἔστω $f(\vec{x}) = \vec{x_0} + A(\vec{x})$ ὅπου $A = I$ ἤ A = σύνθεση τό πολύ τριῶν ἀνακλάσεων ~~δύο~~ σέ ἐπίπεδα πού περιέχουν τήν ἀρχή, ἔστω k.

- Ἐάν $A = I$ ἤ $k=2$ ἡ f λέγεται <u>εὐθεῖα ἰσομετρία</u>
- Εἰδάλλως ἡ f λέγεται μή εὐθεῖα ἰσομετρία.

Οἱ εὐθεῖες ἰσομετρίες διατηροῦν τόν προσανατολισμό, ἐνῶ οἱ μή εὐθεῖες ὄχι.

<u>Ὁρισμός 2.1.13.</u> Μία <u>στρεβλή κίνηση</u> (screw motion) τοῦ $\mathbb{R}^3$ εἶναι μία περιστροφή γύρω ἀπό μία εὐθεῖα τοῦ $\mathbb{R}^3$ ἀκολουθούμενη ἀπό μεταφορά στήν διεύθυνση τῆς εὐθείας.

Εἶναι προφανές ὅτι μία στρεβλή κίνηση εἶναι εὐθεία ἰσομετρία· τό ἀντίστροφο εἶναι λιγότερο προφανές.

<u>Θεώρημα 2.1.14</u> Κάθε εὐθεῖα ἰσομετρία τοῦ $\mathbb{R}^3$ εἶναι στρεβλή κίνηση

Ἀπόδειξη. Ἐφόσον κάθε μεταφορά εἶναι τετριμμένα μία στρεβλή κίνηση, ἐπικεντρωνόμαστε στήν περίπτωση ὅπου ~~f(x)=~~ $\vec{x_0} + A(\vec{x})$ μέ τήν A νά εἶναι περιστροφή ($k=2$). Ἔστω διάνυσμα $\vec{a}$ πάνω στόν ἄξονα τῆς A. Ἐάν $\vec{x_0} = m\vec{a}$ $m \in \mathbb{R}$ τελειώσαμε. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $\vec{w}$ σημεῖο καί ἡ περιστροφή $\vec{x} \longmapsto \vec{w} + A(\vec{x} - \vec{w})$. Ὁ ἄξονας αὐτῆς τῆς περιστροφῆς εἶναι στήν διεύθυνση τοῦ $\vec{a}$ καί περνᾶ ἀπό τό $\vec{w}$, καί ἡ περιστροφή εἶναι κατά τήν ἴδια γωνία μέ τήν A.

Ὁπότε ἀρκεῖ νά μπορέσουμε νά γράψουμε

$$f(\vec{x}) = \vec{w} + A(\vec{x} - \vec{w}) + \lambda\vec{a}$$

γιά κάποιο $\vec{w}$ καί κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Ἰσοδύναμα, ἐπειδή ἡ A εἶναι γραμμική ($\delta\eta\lambda.$ $A(\vec{x}-\vec{w}) = A(\vec{x}) - A(\vec{w})$), πρέπει νά βροῦμε $\vec{\omega}$ καί λ ὥστε

$$\vec{x_0} = \vec{w} - A(\vec{\omega}) + \lambda\vec{a}.$$

Γράφουμε $\vec{x_0} = \vec{x_1} + \mu\vec{a}$ ὅπου $\vec{x_1} \perp \vec{a}$. Τότε θέλουμε τά $\vec{\omega}$ καί λ νά ἱκανοποιοῦν

$$\vec{w} - A(\vec{\omega}) + \lambda\vec{a} = \vec{x_1} + \mu\vec{a}.$$

Παίρνουμε $\lambda = \mu$ καί λύνουμε τήν $\vec{\omega} - A(\vec{\omega}) = \vec{x_1}$. Ἄν W εἶναι τό ἐπίπεδο $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$, τότε ὑπάρχει $\vec{\omega} \in W$ μέ $\vec{w} - A(\vec{w}) = \vec{x_1}$ (Κάνετε σχῆμα!)

<u>Πρόβλημα</u>: Δεδομένων περιστροφῶν R_1, R_2 νά βρεθεῖ ὁ ἄξονας καί ἡ γωνία περιστροφῆς τῆς $R_2 R_1$.

<u>Λύση</u> Ἔστω Π_0 τό ἐπίπεδο πού περιέχει τούς ἄξονες τῶν R_1, R_2 καί a_0 ἡ ἀνάκλαση στό Π_0. Διαλέγουμε ἐπίπεδα Π_1 κ' Π_2 (πού περιέχουν τό $\vec{o}$) τέτοια ὥστε ἄν a_1, a_2 οἱ ἀνακλάσεις τους, νά εἶναι $R_2 = a_2 a_0$ $R_1 = a_0 a_1$. Τότε $R_2 R_1 = a_2 a_0 a_0 a_1 = a_2 a_1$. Θά δώσουμε ἀλγεβρική λύση σ' αὐτό τό πρόβλημα στήν παράγραφο 2.3.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.1</u>

1. Βρεῖτε τύπο γιά τήν ἀνάκλαση στό $x_2 = 0$ ἀκολουθούμενο ἀπό τήν ἀνάκλαση στό ἐπίπεδο $x_3 = 0$. Βρεῖτε τά σταθερά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ μετασχηματισμοῦ κ' ταυτοποιῆστε τα γεωμετρικά.

2. Ἔστω μοναδιαῖα $\vec{a}, \vec{b}$, $R_{\vec{a}}$ ἡ ἀνάκλαση στό $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$ καί παρόμοια ἡ $R_{\vec{b}}$. Δεῖξτε: $R_{\vec{a}} R_{\vec{b}} = R_{\vec{b}} R_{\vec{a}} \iff \vec{a} \perp \vec{b}$.